سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

نظری علم الحیل

تصنیف

جے۔ ایچ۔ جینس ایم۔ اے۔ ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۵۷ھ سنہ ۱۳۴۷ف سنہ ۱۹۳۸ء

دار الطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب پروفیسر سر جے۔ ایچ جینس، مصنف اور مسنر جن اینڈ کمپنی، بوسٹن
(یو۔ ایس۔ اے۔) ناشرین کی اجازت سے ترجمہ کرکے شائع کی گئی ہے۔
مصنف کتاب اور ناشرین کتاب نے یہ اجازت بلا معاوضہ بخوشی عطا کی۔
ایسی علم دوستی قابلِ قدر اور قابلِ شکریہ ہے۔"

فہرست مضامین

نظری علم الحیل

مضمون　　صفحہ

مضمون	صفحہ

مضمون	صفحہ

مضمون | صفحہ

مضمون	صفحہ

علم الحیل نظری

پہلا باب

سکون اور حرکت

تمہید

۱ - **فطرت کی یکسانیت** - اگر ہم پانی میں ایک پتھر چھوڑیں تو وہ تہ تک ڈوب جائے گا، اگر ہم پانی میں ایک کاگ چھوڑیں تو وہ پانی کی سطح تک اُٹھ آئے گا۔ یہ دو بیانات نہ صرف اُن پتھروں اور کاگوں کے لیے درست تسلیم کیے جائیں گے جو ڈوبتے یا تیرتے دیکھے گئے ہیں بلکہ تمام پتھروں اور کاگوں کے لیے۔ اگر ہمارے پاس ایک پتھر کا ٹکڑا ہو جو کبھی بھی پانی میں نہ ڈالا گیا ہو تو ہمیں یقین ہوتا ہے کہ اگر ہم اُسے پانی میں چھوڑینگے تو وہ پانی میں ڈوبیگا۔ اب سوال یہ پیدا ہوتا ہے کہ ہمیں یہ فرض کرنے کا کیا حق حاصل ہے کہ یہ نیا اور ناآزمودہ پتھر کا ٹکڑا پانی میں ڈوبیگا۔ ہم جانتے ہیں کہ لاکھوں

پتھر کے ٹکڑے مختلف اوقات پانی میں ڈالے جا چکے ہیں، ہم جانتے ہیں کہ ان میں ایک بھی ایسا نہ نکلا جو نہ ڈوبا ہو۔ اس سے ہم یہ مستنبط کرتے ہیں کہ فطرت تمام پتھر کے ٹکڑوں کے ساتھ ایکساں سلوک کرتی ہے جبکہ وہ پانی میں ڈالے جاتے ہیں اور اس لیے ہمیں یقین ہوتا ہے کہ ایک نئے اور نا آزمودہ پتھر کے ٹکڑے کے ساتھ بھی قوائے فطرت وہی سلوک کریں گی جو وہ بے شمار پتھر کے ٹکڑوں کے ساتھ کرتی دیکھی گئی ہیں اور اس لیے وہ پانی میں ڈوبیگا۔ یہ اصول فطرت کی یکسانیت کے طور پر مشہور ہے، جب یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ قوائے فطرت نے فلاں کام ایک بار کیا ہے تو اُن ہی حالات کے تحت پھر وہ وہی کام کریں گی۔

۲ ـ قوانین فطرت ـ وہ اُصول جو اوپر مذکور ہوا یہ کہنے کے مرادف ہے کہ قوائے فطرت کا عمل بعض قوانین کے تحت ہوتا ہے، اِن قوانین کو ہم **قوانین فطرت** کہتے ہیں۔ مثلاً اگر یہ معلوم ہو چکا ہو کہ ہر پتھر جو کبھی پانی میں ڈالا جا چکا ہے پانی میں ڈوبا ہے تو جیسا کہ ہم پہلے کہہ چکے ہیں فطرت کی یکسانیت کا اُصول اس مفروض کی رہبری کرتا ہے کہ ہر پتھر جو آئندہ کبھی پانی میں ڈالا جائے گا تہ تک ڈوبے گا اور پھر ہم قانون فطرت کے طور پر اس کا اعلان کر سکتے ہیں کہ ہر پتھر جو پانی میں ڈالا جائے تہ تک ڈوبے گا۔ (۲)

سائنس کا وہ حصہ جس میں قوانین فطرت سے بحث کی جاتی ہے علم الفطرت (Natural Science) کہلاتا ہے۔ یہ دو حصوں میں منقسم ہے ایک تجربی اور دوسرا نظری۔ تجربی سائنس میں قوانین فطرت کی جستجو وقتاً فوقتاً قوائے فطرت کے عمل کا مشاہدہ کرنے سے کی جاتی ہے۔ نظری سائنس میں اُن قوانین فطرت کو جو تجربی سائنس نے دریافت کئے ہیں مواد کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے، ممکن ہو تو اِن قوانین فطرت کو سادہ تر شکلوں میں تحویل کیا جاتا ہے، اور پھر یہ معلوم کیا جاتا ہے کہ اِن قوانین سے کیونکر

پیشین گوئی ہو سکتی ہے کہ قوائے فطرت کا عمل اُن صورتوں میں کیا ہوگا جو تجربہ کی کسوٹی پر فی الواقع آزمائے نہیں گئے ہیں۔ مثلاً تجربی سائنس سے معلوم ہوتا ہے کہ پتھر ڈوبتا ہے، کاگ تیرتا ہے، اور علیٰ ہذا متعدد متشابہ قوانین۔ اِن قوانین کی مدد سے نظری سائنس میں وہ سادہ قوانین فطرت ماخوذ ہوتے ہیں جو ڈوبنے یا تیرنے کے تمام مظاہر پر حکمران ہیں اور پھر ایک قدم آگے بڑھنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اِن قوانین کی مدد سے ہم کس طرح تجربہ کو فی الواقعی عمل میں لانے سے پیشتر پیشین گوئی کر سکتے ہیں کہ ایک دی ہوئی شئے ڈوبے گی یا تیرے گی۔ مثالاً تجربی سائنس یہ دریافت نہیں کر سکتی کہ آیا پچاس ہزار ٹن کا ایک جہاز تیرے گا یا ڈوبیگا کیونکہ پچاس ہزار ٹن کا کوئی جہاز موجود نہیں ہے جس سے تجربہ کیا جائے لیکن بحری معمار فطرت کی یکسانیت کے بھروسہ تجربی سائنس سے معلوم شدہ قوانین فطرت کی بناء پر اور اِن قوانین کو استعمال کرنے کے اُس طریقہ سے جو نظری سائنس سے معلوم ہو پچاس ہزار ٹن کا ایک جہاز بنا سکتا ہے پورے اعتماد کے ساتھ کہ وہ اُسی طریقہ پر پیش آئے گا جس کی پیشین گوئی نظری سائنس نے کی ہے۔

۳ ـ علم الحیل۔ سائنس کی اُس شاخ میں جو علم الحیل کے طور پر معروف ہے اجسام کی حرکت پر اور اُن قوائے فطرت پر بحث کی جاتی ہے جو اِس حرکت کا سبب ہوتی ہیں یا حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہیں۔ وہ قوانین فطرت جو اِن قوتوں کے عمل اور اجسام کی حرکت پر حاوی ہیں مدت سے معلوم ہیں اور نیوٹن انہیں سادہ ترین شکل میں تحویل کر چکا ہے۔ اِس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ **تجربی علم الحیل** سائنس کی ایک تکمیل یافتہ شاخ ہے۔

اِس کتاب میں **نظری علم الحیل** سے بحث کی جائے گی۔ ہم اُن قوانین سے ابتدا کریں گے جو تجربی علم الحیل نے مہیا کئے ہیں اور

پھر اِس پر بحث کریں گے کہ اِن قوانین کو اجسام کی حرکت کے متعلق پیشن گوئی کرنے میں کس طرح استعمال کیا جا سکتا ہے، مثلاً زمین پر اجسام کا گرنا، مرمیوں کا پھینکنا، سورج کے گرد زمین کی اور سیاروں کی حرکت وغیرہ۔ سوالات کی ایک اہم جماعت جن پر ہمیں بحث کرنی ہوگی وہ ہونگے جن میں کوئی حرکت وقوع پذیر نہیں ہوتی کیونکہ قوائے فطرت جو حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہیں اس قدر برابر متوازن ہوتی ہیں کہ کوئی حرکت واقع نہیں ہوتی۔ ایسے مسئلوں کو سکونیاتی کہا جاتا ہے۔

ایک نقطہ کی حرکت

۴ ۔ سکون کی حالت ۔ کسی جسم کی حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر یہ متعین کرنا ضروری ہے کہ کسی جسم کے سکون سے کیا مراد ہے۔ معمولی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ ٹرین ساکن ہے جبکہ وہ پٹڑیوں پر حرکت نہ کر رہی ہو۔ لیکن ہم جانتے ہیں کہ ٹرین، زمین کے بقیہ حصہ کے اشتراک میں فی الواقعی ساکن نہیں ہے بلکہ سورج کے گرد ایک بڑی رفتار سے حرکت کر رہی ہے۔ اسی طرح ایک مکھی جو ریل کے ڈبہ کی دیوار پر رینگ رہی ہو ایک لحاظ سے ساکن کہی جا سکتی ہے جبکہ وہ دیوار کے ایک ہی مقام پر ٹھہری رہے۔ لیکن مکھی فی الواقعی ساکن نہیں ہوگی، وہ دیہات میں ٹرین کی جو حرکت ہے اس میں حصہ لے گی، دیہات سورج کے گرد زمین کی جو حرکت ہے اُس میں حصہ لیں گے، اور سورج فضا میں نظام شمسی کی جو حرکت ہے اُس میں حصہ لے گا۔

یہ مثالیں اِس امر کی متقاضی ہیں کہ سکون اور حرکت کے تصورات کو صاف، صریح اور ٹھیک معنے دئے جائیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ہمارے بیانات کافی ٹھیک ہوتے اگر ہم پہلی صورت میں کہتے کہ ٹرین زمین کے لحاظ سے ساکن تھی اور دوسری صورت میں کہتے کہ مکھی ڈبہ کے

لحاظ سے ساکن تھی۔

۵۔ حوالے کا فریم ۔پس سکون اور حرکت پر بحث کرنے سے پیشتر یہ ضروری معلوم ہوتا ہے کہ حوالے کے فریم کے تصور کا اضافہ کیا جائے۔ زمین نے ٹرین کی حرکت کے لیے حوالہ کا ایک فریم مہیا کیا اور جب ٹرین پٹڑیوں پر حرکت نہ کر رہی ہو تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ ٹرین ساکن ہے جبکہ زمین کو حوالے کے فریم کے طور پر لیا گیا ہو۔ اسی طرح (۴) ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ مکھی ساکن تھی جبکہ ڈبہ کو حوالے کا فریم لیا گیا ہو۔ صریحاً کوئی فریم کاری حقیقی یا خیالی یا کوئی مادی جسم حوالے کے فریم کے طور پر لیا جا سکتا ہے بشرطیکہ وہ استوار ہو یعنی وہ خود اپنی شکل اور جسامت نہ بدل رہا ہو۔

اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ ایک نقطہ بلحاظ کسی حوالے کے فریم کے ساکن ہے جبکہ اس نقطہ کا فاصلہ حوالے کے فریم کے ہر نقطہ سے غیر متبدل رہے۔

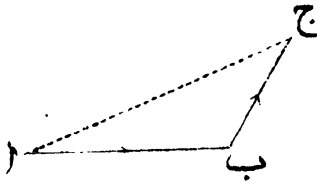
۶۔ حوالے کے فریم کے لحاظ سے حرکت ۔حوالے کے فریم کے تصور کو واضح کر دینے کے بعد اس کے لحاظ سے ہم نہ صرف سکون پر بحث کر سکتے ہیں بلکہ حرکت پر بھی۔ جب ٹرین پٹڑیوں پر ایک میل حرکت کر لیتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ ٹرین اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے یعنی زمین کے لحاظ سے ایک میل حرکت کر چکی ہے۔ جب مکھی ڈبہ کے فرش سے چھت تک رینگ جاتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے یعنی ڈبہ کے لحاظ سے آٹھ فٹ (مثالاً) حرکت کر چکی ہے۔

دو لمحات $ت_۱$، $ت_۲$ کے درمیانی وقفہ میں ٹرین کے لحاظ سے مکھی نے جو فاصلہ طے کیا ہے اُسے مقرر کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ وہ حقیقی نقطہ جہاں سے

مکھی چلی ہے ٹرین کے موجودہ محل سے (فرض کرو) ایک میل پیچھے ہے لیکن
وہ نقطہ جہاں سے ہم پیمائش کرتے ہیں وہ نقطہ ہے جو ڈبہ میں وقت $ت_۲$ پر
اُسی جگہ ہے جس جگہ وہ وقت $ت_۱$ پر تھا۔ اِس لیے بالعموم ایک دئے ہوئے
حوالے کے فریم کے لحاظ سے اوقات $ت_۱$ اور $ت_۲$ کے درمیانی وقفہ میں
طے شدہ فاصلہ مقرر کرنے میں ہم اول وہ نقطہ ا معلوم کرتے ہیں جو وقت
$ت_۲$ پر حوالے کے فریم کے لحاظ سے اسی محل میں قائم رہتا ہے جس میں
وہ نقطہ جہاں سے متحرک نقطہ وقت $ت_۱$ پر چلا ہے قائم تھا۔ اِس نقطہ ا سے
نقطہ ب تک جس پر متحرک نقطہ وقت $ت_۲$ پر پہنچا ہے وہ فاصلہ ہوگا جو
متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے طے ہوا ہے۔

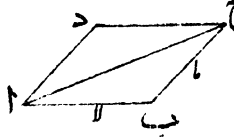
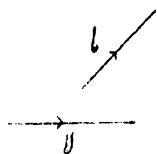
ایک ذرہ ا کے لحاظ سے کسی ذرہ ب کی حرکت سے اِس کی
وہ حرکت مراد ہے جو ا کے ساتھ حرکت کرنے والے حوالے ایک فریم
کے لحاظ سے معلوم کی گئی ہو۔

۷ ۔ حرکتوں کی ترکیب ۔ فرض کرو کہ ایک دئے ہوئے
وقت میں متحرک نقطہ اپنے حوالے کے فریم کے لحاظ سے ایک خاص فاصلہ
طے کرتا ہے اور اس اثناء میں حوالے کا یہ فریم خود ایک دوسرے حوالے
کے فریم کے لحاظ سے کوئی اور فاصلہ طے کرتا ہے، چنانچہ ایسی صورت
واقع ہوگی اگر مکھی ڈبہ کی دیوار پر چڑھے اور اس اثناء میں ڈبہ خود زمین
کے لحاظ سے حرکت کرے۔

فرض کرو کہ اِس کاغذ کے مستوی میں جس پر شکل (۱) کھینچی گئی ہے
حوالے کا ایک فریم حرکت کر رہا ہے اور کاغذ خود حوالے کا دوسرا فریم (۵)
ہے۔ فرض کرو کہ متحرک نقطہ ا سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور
اثنائے حرکت میں حوالے کے پہلے فریم کا وہ نقطہ جو ابتداً متحرک
نقطہ پر منطبق تھا ا سے ب تک حرکت کر چکا ہے اور اس اثناء
میں متحرک نقطے نے ج تک حرکت کی ہے۔ اب خط اب،

فریم ۲ کے لحاظ سے فریم ا کی حرکت کو تعبیر کرتا ہے اور ب ج فریم ا کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی حرکت کو تعبیر کرتا ہے ۔ متحرک نقطہ کی کل حرکت بلحاظ فریم ۲ کے ا ج سے تعبیر ہوتی ہے ۔ حرکت ا ج کو دو حرکتوں

شکل (۱)

ا ب، ب ج کا مرکب یا ان دو حرکتوں کا حاصل کہتے ہیں ۔ پس اگر ایک نقطہ فریم ا کے لحاظ سے فاصلہ ب ج طے کرے اور اس اثنا میں فریم ا فریم ۲ کے لحاظ سے فاصلہ ا ب طے کرے تو نقطہ کی حاصل حرکت بلحاظ فریم ۲ کے فاصلہ ا ج کے مساوی ہوگی جو دو فاصلوں ا ب، ب ج کو لیکر انہیں اس طریقہ سے رکھنے سے حاصل ہوتی ہے کہ نقطہ ب جس پر ایک فاصلہ ختم ہوتا ہے وہی نقطہ ہوتا ہے جس پر دوسرا فاصلہ ابتدا کرتا ہے ۔

دو حرکتوں کو مرکب کرنے کا ایک اور طریقہ ہے ۔ فرض کرو کہ لا، ما سے دو حرکتیں تعبیر ہوتی ہیں ۔ محصلہ بالا قاعدہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ہمیں ایک مثلث ا ب ج بنانا چاہیئے جس کے اضلاع ا ب، ب ج طول میں لا، ما کے مساوی ہوں تو مطلوبہ حرکت ا ج کے مساوی ہوگی ۔ ایسا ایک مثلث ا ب ج بنا لینے کے بعد فرض کرو کہ ہم مثلث کے اضلاع کے متوازی خطوط ا د، ج د کھینچ کر متوازی الاضلاع

اب ج د کی تکمیل کرتے ہیں ۔ اب چونکہ اد، ب ج کے مساوی ہے اس لئے وہ بھی حرکت ما کو تعبیر کرے گا اور اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے وہ دو اضلاع جو ا پر ملتے ہیں دی ہوئی حرکتوں کو تعبیر کرتے ہیں اور وتر اج جو ا میں سے گذرتا ہے حاصل حرکت کو تعبیر کرتا ہے ۔ اس لیے دو حرکتوں لا، ما کو مرکب کرنے کے لیے حسب ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے :

شکل (۲)

(۶) ایک متوازی الاضلاع اب ج د بناؤ ایسا کہ اضلاع اب، اد جو ا پر ملتے ہیں دی ہوئی دو حرکتوں لا، ما کو مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر کریں تو وتر اج جو ا میں سے گذرتا ہے اُس حاصل حرکت کو تعبیر کریگا جو اِن دو حرکتوں کو مرکب کرنے سے حاصل ہوتی ہے ۔

رفتار

۸ ۔ یکساں اور متغیر رفتار ۔ رفتار سے مُراد صرف حرکت کی شرح ہے ۔ وہ یکساں ہو گی یا متغیر ۔ اگر ایک نقطہ اس طریقہ سے حرکت کرے کہ اس کی حرکت کے ہر ثانیہ میں خواہ منتخبہ ثانیہ کوئی ہو مرتسمہ فاصلہ ا فٹ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ کی رفتار، ا فٹ فی ثانیہ کی ایک **یکساں** رفتار ہے ۔ لیکن اگر نقطہ ایک ثانیہ میں ا فٹ حرکت کرے، دوسرے ثانیہ میں ب فٹ حرکت کرے اور تیسرے میں

ج فٹ اور علیٰ ہذا تو ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ ا، ب، ج میں سے کسی سے رفتار کی پیمائش ہوتی ہے ۔ اس صورت میں رفتار کو **متغیر** کہا جاتا ہے کیونکہ وہ حرکت کی مختلف منزلوں پر مختلف ہوتی ہے ۔ کسی لمحہ پر رفتار معلوم کرنے کے لیے ہم وقت کا ایک صغیر وقفہ فرت لیتے ہیں اور فاصلہ فرس کی پیمائش کرتے ہیں جو اس وقفہ میں مرتسم ہوا ہے ۔ اب ہم نسبت $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ کو اس لمحہ پر کی رفتار کہتے ہیں جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے ۔ اگر رفتار ایکساں ہے تو $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ وہ فاصلہ ہوگا جو اکائی وقت میں مرتسم ہوتا ہے اور اس لیے رفتار کی موجودہ تعریف وہی ہو جاتی ہے جو اوپر بیان کی جا چکی ہے ۔

اوسط رفتار ۔ اگر کوئی نقطہ متغیر رفتار سے حرکت کرے اور ت ثانیوں میں ا فٹ فاصلہ مرتسم کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وقت ت میں متحرک نقطہ کی "اوسط رفتار" $\frac{\text{ا}}{\text{ت}}$ ہے ۔ یہ اوسط رفتار وہ رفتار ہے جو ایک خیالی نقطہ کی ہوگی جو ایکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور وقت ت میں وہی فاصلہ طے کرتا ہے جو حقیقی نقطہ متغیر رفتار سے طے کرتا ہے ۔

اکائیاں ۔ رفتار کی پیمائش میں طول کی ایک اکائی اور وقت کی ایک اکائی کی ضرورت ہے، مثلاً جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک نقطہ ا فٹ فی ثانیہ کی رفتار رکھتا ہے تو گویا ہم نے فٹ کو طول کی اکائی اور ثانیہ کو وقت کی اکائی منتخب کیا ہے ۔ ہم اسی رفتار کی مقدار کو دوسری اکائیوں میں ایک سادہ تناسب کے ذریعہ معلوم کر سکتے ہیں ۔　(۷)

مثالاً فرض کرو کہ ا فٹ فی ثانیہ کی رفتار کو میلوں اور گھنٹوں کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے ۔

نقطہ ایک ثانیہ میں ۱ فٹ حرکت کرتا ہے اور اس لیے ایک گھنٹہ میں
۱ × ۶۰ × ۶۰ فٹ حرکت کریگا اور اس لیے ایک گھنٹہ میں

$$\frac{۱ \times ۶۰ \times ۶۰}{۱۷۶۰ \times ۳} = \frac{۱۵ ۱}{۲۲} \text{ میل}$$

حرکت کرے گا ۔ پس نقطہ کی رفتار $\frac{۱۵ ۱}{۲۲}$ میل فی گھنٹہ ہے ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک ریل گاڑی ۱۸ گھنٹوں میں ۹۱۸ میل کا فاصلہ طے کرتی ہے ۔ اس کی اوسط رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو ۔

۲ ۔ ایک ٹرین اور ایک موٹر کی رفتاروں کا مقابلہ کرو جبکہ اول الذکر ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ طے کرے اور ثانی الذکر ۱۵۰۰ گز فی دقیقہ ۔

۳ ۔ ایک آدمی $۹\frac{۴}{۵}$ ثانیوں میں ۱۰۰ گز دوڑتا ہے ۔ اُس کی اوسط چال میلوں میں فی گھنٹہ کیا ہے ۔

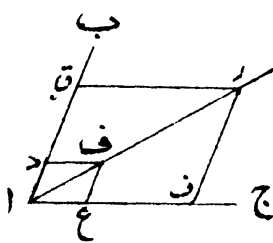
۴ ۔ ایک شہری گھڑی کی دو سوئیاں ۱۰ اور ۷ فٹ لمبی ہیں ۔ ان کے سروں کی رفتاریں معلوم کرو ۔

۵ ۔ زمین کے قطر کو ۷۹۲۷ میل لیکر معلوم کرو کہ اُس آدمی کی رفتار فٹ ثانیہ اکائیوں میں کیا ہوگی جو خط اُستوا پر کھڑا ہے (زمین کے محور کے گرد زمین کی یومی گردش کی وجہ سے) ۔

۶ ۔ دو گاڑیاں، علی الترتیب ۲۳۰ اور ۴۴۰ فٹ لمبی، متوازی راستوں پر ایک دوسرے سے گذر جاتی ہیں، پہلی گاڑی دوسری سے دوچند رفتار سے حرکت کررہی ہے ۔ چھوٹی گاڑی کا ایک مسافر دیکھتا ہے کہ لمبی گاڑی اُس سے تین ثانیوں میں گذر جاتی ہے ۔ دونوں گاڑیوں کی رفتاریں معلوم کرو ۔

۹ ۔ رفتاروں کی ترکیب ۔ تمام حرکتیں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں

حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے پیمائش کی جانی چاہئیں۔ پس رفتار یعنی حرکت کی شرح کو بھی حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے پیمائش کرنا چاہئے۔ ایک نقطہ حوالے کے ایک فریم کے لحاظ سے ایک خاص رفتار رکھ سکتا ہے اور خود حوالے کا فریم ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے ایک دوسری رفتار رکھ سکتا ہے۔ اب اگر متحرک نقطہ کی رفتار دوسرے فریم کے لحاظ سے معلوم کرنی ہو تو اس عمل کو دو رفتاروں کو مرکب کرنے کا عمل کہتے ہیں۔

اس غرض کے لیے ہم ان حرکتوں پر غور کرتے ہیں جو وقت کے ایک ایک صغیر وقفہ فرت میں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ پہلے فریم کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی رفتار سمت ا ب میں $و_1$ ہے اور دوسرے فریم کے لحاظ سے پہلے فریم کی رفتار سمت ا ج میں $و_2$ ہے۔ پس متحرک نقطہ پہلے فریم کے لحاظ سے وقت فرت میں ا ب پر فاصلہ $و_1$ فرت (فرض کرو ا د) طے کرتا ہے اور اس اثناء میں خود فریم دوسرے فریم کے لحاظ سے ا ج پر فاصلہ $و_2$ فرت (فرض کرو ا ع) طے کرتا ہے۔ (۸)

شکل (۳)

فرض کرو کہ اس متوازی الاضلاع کا وتر ا ف ہے جس کے دو کنارے ا د، ا ع ہیں تو نقطہ کی حاصل حرکت دوسرے فریم کے لحاظ سے وقت فرت میں ا ف ہوگی۔ اب چونکہ متحرک نقطہ وقت فرت میں فاصلہ ا ف مرتسم کرتا ہے اس لیے حاصل رفتار $\frac{اف}{فرت}$ ہوگی۔

اب فرض کرو کہ ہم یہ قرارداد اختیار کرتے ہیں کہ رفتاریں خطوطِ مستقیم سے تعبیر ہوں گی، خط کی سمت رفتار کی سمت کے متوازی ہوگی اور اس کا طول رفتار کی مقدار کے متناسب لیا جائے گا، خطوں کے طول کسی پیمانہ کی بموجب کھینچے جا سکتے ہیں مثلاً ہم طول کے ہر انچ سے ایک فٹ فی ثانیہ کی رفتار تعبیر کر سکتے ہیں چنانچہ ایسی صورت میں تین فٹ فی ثانیہ کی رفتار تین انچ لمبے خط سے جو حرکت کی سمت کے متوازی کھینچا گیا ہو تعبیر ہوگی۔

شکل (۳) میں فرض کرو کہ اف، اق سے رفتاریں و۲، و۱ کسی پیمانہ پر تعبیر ہوتی ہیں۔ چونکہ پیمانہ دونوں رفتاروں کے لیے ایک ہی ہے اس لیے

اف : اق = و۲ : و۱

لیکن اع = و۲ فرت، اد = و۱ فرت

اس لیے اع : اد = و۲ : و۱

اور اس لیے اف : اق = اع : اد

اگر ہم متوازی الاضلاع اف رق کی تکمیل کریں تو وتر ار ف میں سے گذرے گا اور ہمیں حاصل ہوگا

ار : اف = اف : اع

اگر حاصل رفتار و ہو تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ

$$و = \frac{اف}{فرت}$$

(۹) اس لیے اف : اع = و فرت : و۲ فرت

= و : و۲

اور اس لیے ار : اف = و : و۲

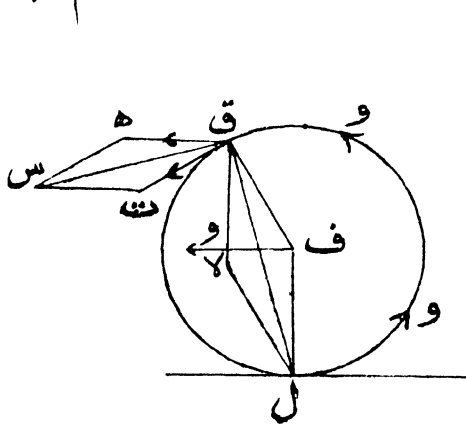
پس ار، رفتار و کی مقدار کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے جس پر اف، رفتار و۲ کو تعبیر کرتا ہے۔ نیز چونکہ ار، حاصل حرکت اف کی سمت

ہیں ہے اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ا ر، رفتار و کو مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر کرتا ہے۔ اِس طرح ہم نے حسب ذیل مسئلہ ثابت کردیا۔

مسئلہ۔ اگر دو رفتاریں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے جو کسی راس ا سے نکلتے ہیں مقدار اور سمت دونوں کے لحاظ سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل مقدار اور سمت میں اُسی پیمانہ پر متوازی الاضلاع کے اُس وتر سے تعبیر ہوگا جو ا سے نکلتا ہے۔

یہ مسئلہ **رفتاروں کے متوازی الاضلاع** کے طور پر مشہور ہے۔

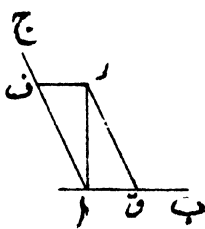
ہم اس کا مفہوم دو سادہ مثالوں سے واضح کریں گے۔

ا۔ فرض کرو کہ ایک گاڑی ایک ہموار سڑک پر رفتار و سے حرکت کررہی ہے۔ ہم حوالہ کا پہلا فریم گاڑی کا جسم لیں گے اور دوسرا فریم سڑک۔ اب فریم ا کی رفتار فریم ۲ کے لحاظ سے و ہے۔ فریم ا کے لحاظ سے گاڑی کے کسی پہیہ ف کا مرکز ثابت ہے، اِس لیے کور کا کوئی نقطہ، ف کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ فریم ا کے لحاظ سے سڑک پیچھے کی طرف رفتار و سے حرکت کررہی ہے، اس لیے اگر پہیہ سڑک پر نہ پھسلے تو کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار فریم ا کے لحاظ سے و ہونی چاہیئے۔ اِس لیے کور پر کے کسی نقطہ ق کی رفتار فریم ا کے لحاظ سے مماس ق ت پر و ہوگی۔ اس رفتار کو خط ق ت سے تعبیر کرو تو

شکل (۴)

گاڑی کی رفتار سڑک کے لحاظ سے سڑک کے متوازی ایک مساوی خط ق ھ سے
تعبیر ہوگی۔ پس نقطہ ق کی حاصل رفتار متوازی الاضلاع ق ھ س ت
کے وتر ق س سے تعبیر ہوگی۔ صریحاً اس کی سمت زاویہ ھ ق ت کی
تنصیف کرتی ہے۔ فرض کرو کہ پہیہ کا زیرترین نقطہ ل ہے اور فرض کرو کہ
لا سے متوازی الاضلاع ق ف ل لا کی تکمیل ہوتی ہے۔ صریحاً یہ (۱۰)
متوازی الاضلاع، متوازی الاضلاع ق ت س ھ کے مشابہ ہے
کیونکہ دونوں متوازی الاضلاعوں میں متناظر خطوط علی القوائم ہیں۔ اسلیے

ق س : ق ت = ق ل : ق ف

اس لیے اس پیمانہ پر جس میں گاڑی کی رفتار مقدار میں، پہیہ کے نصف قطر
ق ف سے تعبیر ہوتی ہے نقطہ ق کی رفتار، ق ل سے تعبیر ہوگی۔
پس کور پر کے مختلف نقطوں کی رفتاریں، ل سے ان کے جو فاصلے ہیں ان کے
متناسب ہیں اور رفتاروں کی سمتیں ہر صورت میں اس خط پر عمود ہیں جو نقطہ کو
ل سے ملاتا ہے۔

۲۔ ایک جنگی جہاز ۱۸ بحری میلوں کی رفتار سے سفر کر رہا ہے اور اس کی
توپوں سے بلحاظ جہاز کے ۲۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گرمیاں فائر
کیجا سکتی ہیں۔ توپوں کو کس سمت میں قایم کرنا چاہیے کہ ان کی ضرب ایک
ایسی شئے پر پڑے جس کی سمت جہاز سے اس کی حرکت کی سمت پر عمود ہے۔

فرض کرو کہ جہاز کی
حرکت کی سمت اب
ہے اور فرض کرو کہ توپ کو
سمت اج میں قایم کیا گیا
ہے تو جہاز کے لحاظ سے
گولے کی جو رفتار ہے اس کو
اج پر کے ایک خط اف
سے تعبیر کیا جا سکتا ہے اور

شکل (۵)

سمندر کے لحاظ سے جہاز کی جو رفتار ہے اُس کو ا ب پر کے ایک خط ا ق سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ متوازی الاضلاع ا ف ر ق کی تکمیل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ وتر ا ر، گولے کی رفتار کو سمندر کے لحاظ سے مقدار اور سمت دونوں میں تعبیر کرے گا۔ اس لیے ا ر کو حسب سوال ا ب کے علی القوائم ہونا چاہیے۔ اس لیے اگر زاویہ ف ا ر، ط ہو جس میں توپ کو نشانہ کی شے نظر آنے کے بعد گھمانا پڑتا ہے تو

$$\text{جب ط} = \frac{\text{ف ر}}{\text{ا ف}} = \frac{\text{جہاز کی رفتار}}{\text{گولے کی رفتار}}$$

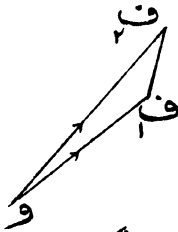
جہاز کی رفتار ۱۸ بحری میل فی گھنٹہ ہے اور ایک بحری میل = ۱۫۱۵۱۵ معمولی میل = ۶۰۸۰ فٹ، اس لیے ۱۸ بحری میل کی رفتار، ۱۰۹۴۴۰ فٹ فی گھنٹہ کی رفتار کے مساوی ہے یعنی ۳۰٫۴ فٹ فی ثانیہ۔ پس

$$\text{جب ط} = \frac{۳۰٫۴}{۲۰۰۰} = ۰٫۰۱۵۲ \text{ اور اس لیے ط} = ۰^\circ ۵۲' ۱۶''$$ —

رفتاروں کا مثلث

۱۰۔ ہم رفتاروں کو ایک اور قاعدہ سے بھی مرکب کر سکتے ہیں، یہ قاعدہ **رفتاروں کے مثلث** کے طور پر مشہور ہے۔ شکل (۳) میں دو رفتاریں ا ف، ا ق سے تعبیر ہوئی تھیں اور اِن کا حاصل ا ر سے۔ لیکن اِن دو رفتاروں کو ا ف، ف ر سے بھی تعبیر کیا جا سکتا ہے اور ان کے حاصل کو ر ا سے۔ پس ہمیں حسب ذیل قاعدہ ملتا ہے:

(۱۱) **اگر دو رفتاریں ایک مثلث کے دو ضلعوں سے جو ترتیب وار لئے گئے ہوں تعبیر ہوں تو اِن کا حاصل تیسرے ضلع سے تعبیر ہوگا جبکہ اسے سمت میں پہلے ضلع سے دوسرے ضلع تک لیا جائے**

مثلاً فرض کرو کہ لمحات ت، ت، پر کسی متحرک نقطہ کی رفتاریں کسی پیمانہ پر خطوط

و ف₁ اور و ف₂ سے تعبیر ہوتی ہیں جہاں یہ خطوط و میں سے کھینچے گئے ہیں تو ف₁ ف₂ سے اسی پیمانہ پر وہ زائد رفتار تعبیر ہوگی جو نقطہ نے اس وقفہ میں حاصل کی ہے۔

کیونکہ ہم ایک ایسے فریم کا تصور کرسکتے ہیں جو وقت ت₁ پر ذرہ کی یکساں رفتار و ف₁ سے حرکت کر رہا

شکل (٦)

ہو۔ وقت ت₂ پر کی رفتار و ف₂ کو فریم کی رفتار و ف₁ اور اس کے لحاظ سے ایک رفتار ف₁ ف₂ کا مرکب سمجھا جا سکتا ہے۔ صریحاً یہ موخرالذکر رفتار، رفتار کا اضافہ ہے۔

مثالیں

١ ـــ ایک گاڑی ۲۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے اور ایک شخص گاڑی سے ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اس سمت میں کودتا ہے جو گاڑی کی رفتار کی سمت کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ زمین کے لحاظ سے اس کی رفتار کیا ہے۔

۲ ـــ ایک ریلوے ٹرین پر جو ٦٠ میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت کر رہی ہے ایک گولی کی زد پڑتی ہے جس کو اُفقاً اور ٹرین کے علی القوایم ۴۴۰ فٹ کی رفتار سے فائر کیا گیا ہے۔ اس رفتار کی سمت اور مقدار معلوم معلوم کرو جس سے گولی ایک شخص کو جو ٹرین میں ہے ٹرین کی طرف آتی نظر آئے گی۔

۳ ـــ ایک جہاز جس کا سر شمال مشرق کی جانب ہے ۱۲ بحری میل کی شرح سے سمندر میں جس کی موجیں جنوب مشرق کی جانب ۵ بحری میل کی شرح سے بہہ رہی ہیں حرکت کر رہا ہے۔ ڈہائی گھنٹوں میں جہاز کتنی دور جائیگا۔

۴ ـــ ایک ٹرین ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے اور انتصابی سے ۳۰° کے زاویہ پر اسی سمت میں جس میں ٹرین حرکت کر رہی ہے بارش ۲۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ہو رہی ہے۔ ٹرین کی کھڑکیوں پر بارش کے قطرے کس سمت میں گرتے نظر آئیں گے۔

۵ ـــ ایک جہاز کا راستہ جانب جنوب ہے اور اس کی چال ۲۰ بحری میل ہے

ہوا مغرب سے چل رہی ہے لیکن جہاز کے دودکش سے دھواں شمال سے مشرقی جانب ۳۰° کی سمت میں جاتا ہوا دکھائی دیتا ہے ۔ ہوا کی رفتار کیا ہے ۔

۶ ۔ ایک شخص ایک نہر کو جو ایک میل چوڑی ہے عبور کرنا چاہتا ہے ۔ وہ بہاؤ کے مخالف، کنارے سے ۳۰° کا زاویہ بناتے ہوئے اپنی کشتی کھیتا ہے ۔ اُسے عبور کرنے میں کتنی دیر لگے گی اگر وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اپنی کشتی چلائے اور بہاؤ کی رفتار بھی ۴ میل فی گھنٹہ ہو ۔

۷ ۔ ایک نہر کے بہاؤ کی رفتار ا ہے اور ایک شخص اپنی کشتی رفتار ب سے چلا سکتا ہے ۔ اِس شخص کو اپنی کشتی کس سمت میں چلانی چاہیئے اگر وہ ساحل کے ایک ایسے نقطہ پر پہنچنا چاہے جو اُس کی روانگی کے نقطہ کے ٹھیک مقابل ہو ۔ نیز اُسے کس سمت میں کشتی کھینی چاہیئے کہ وہ نہر کو کم سے کم وقت میں عبور کرے ۔

(۱۲) ۸ ۔ ایک جہاز جس کا سر جانب جنوب ہے ایک نہر میں جس کا بہاؤ جانب مغرب ہے جارہا ہے ۔ دو گھنٹوں کے ختم پر معلوم ہوا کہ جہاز جنوب سے جانب مغرب ۱۵° کی سمت میں ۳۶ میل طے کر چکا ہے ۔ جہاز اور نہر کی رفتاریں معلوم کرو ۔

۹ ۔ ایک شخص جو جانب مشرق ۳ میل فی گھنٹہ کی شرح سے سفر کررہا ہے معلوم کرتا ہے کہ ہوا ٹھیک شمال سے چلتی ہوئی محسوس ہورہی ہے ۔ لیکن جب وہ اپنی چال دُگنی کرتا ہے تو اُسے ہوا شمال مشرق سے چلتی ہوئی معلوم ہوتی ہے ۔ ہوا کی سمت اور اس کی رفتار معلوم کرو ۔

اسراع

۱۱ ۔ اسراع رفتار کے اضافہ کی شرح ہے ۔ اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک متحرک نقطہ کی رفتار، ایک ثانیہ میں بقدر مقدار ع کے بڑھتی ہے خواہ یہ ثانیہ کوئی ہو تو ہم کہتے ہیں کہ نقطہ کی حرکت میں ایکساں اسراع ع فی ثانیہ ہے ۔ مثلاً یہ معلوم ہوا ہے کہ جب ایک پتھر یا کوئی جسم جاذبہ ارض کے

تحت گرتا ہے تو اس کی رفتار میں ایک خاص مستقل رفتار ع فی ثانیہ کا اضافہ ہوتا ہے جہاں ع سے تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار تعبیر ہوتی ہے ۔ پس ہم کہتے ہیں کہ ایک گرتا ہوا پتھر ع فی ثانیہ یعنے تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع رکھتا ہے ۔

بالعموم اسراع ایکساں نہیں ہوگا، رفتار کے اضافہ کی شرح سفر کی مختلف منزلوں پر مختلف ہوگی ۔ کسی لمحہ پر اسراع معلوم کرنے کے لیے ہم وقت کے ایک صغیر وقفہ فرت میں رفتار کی تبدیلی کا مشاہدہ کرتے ہیں ۔ اگر رفتار کا اضافہ فرو ہو تو ہم کہتے ہیں کہ $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ اس لمحہ پر اسراع ہے جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے ۔ اسراع بلاشبہ مقدار اور علامت دونوں رکھے گا کیونکہ رفتار یا تو بڑھ رہی ہوگی یا گھٹ رہی ہوگی ۔ جب رفتار گھٹ رہی ہو تو اسراع کی علامت منفی لینی چاہیئے ۔ منفی اسراع کو **ابطاء** کہا جاتا ہے مثلاً ابطاء ع کا مطلب یہ ہوگا کہ رفتار بقدر مقدار ع فی اکائی وقت گھٹتی ہے ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک مزدور ایک مکان کی چھت سے گرا اور ۴ ثانیوں میں زمین پر آرہا ۔ اس نے زمین کو کس رفتار سے ضرب لگائی جبکہ جاذبہ کی وجہ سے اسراع ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو ۔

۲ ۔ ایک ٹرین کی رفتار ایک دئے ہوئے لمحہ پر ۳۰ میل فی گھنٹہ ہے اور وہ ایک فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے حرکت کرتی ہے ۔ ۲۰ ثانیوں کے بعد اس کی رفتار معلوم کرو ۔

(۱۳) ۳ ۔ ایک ٹرین بریک ڈالنے کے دس ثانیوں بعد رکتی ہے ۔ اگر ابطاء ۸ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو ٹرین کی رفتار بریک ڈالتے وقت کیا تھی ۔

۴ ۔ ایک جسم ۲۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ابتداء کرتا ہے اور ۶ فٹ فی ثانیہ

فی ثانیہ کے اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار حاصل کرنے میں اُسے کتنی دیر لگے گی۔

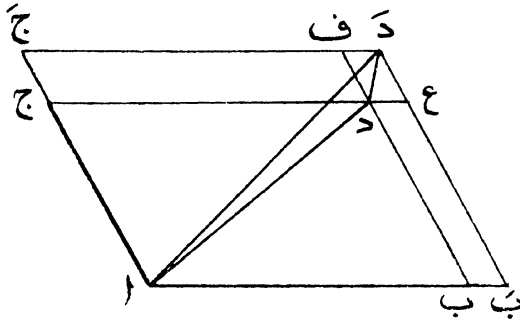
۵۔ دو جسم ایک ہی لمحہ پر علی الترتیب رفتاروں ۶ اور ۹ سے ابتدا کرتے ہیں۔ پہلے جسم کی حرکت میں ۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا ابطا وقوع پذیر ہوتا ہے اور دوسرے جسم کی حرکت یکساں ہے پہلے جسم کے ساکن ہونے تک دوسرا جسم کتنی دور جائے گا۔

۶۔ ایک جسم سکون سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے اور چار ثانیوں تک ۸ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے ایکساں اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ اگر اِس کے بعد اسراع رُک جائے تو اِس کے بعد پانچ ثانیوں میں جسم کتنی دور جائے گا۔

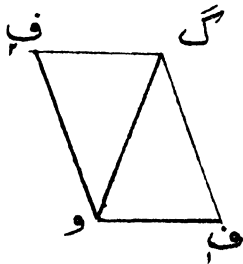
۷۔ ایک ٹرین کی رفتار ۵ ثانیوں میں ۴۰ میل فی گھنٹہ سے ۳۰ میل فی گھنٹہ میں گھٹ جاتی ہے اگر ابطاء یکسان ہو تو ساکن ہونے سے پیشتر وہ اور کتنی دور جائے گی۔

۸۔ ایک جسم جو جاذبہ کے تحت گر رہا ہے ۳۲٫۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کا اسراع رکھتا ہے۔ اِس اسراع کو (ا) سینٹی میٹر/ثانیہ اور (ب) میل/گھنٹہ کی اکائیوں میں بیان کرو۔

۱۲۔ اسراعوں کا متوازی الاضلاع۔ مسئلہ۔ فرض کرو کہ ایک نقطہ کی رفتار دو رفتاروں و۱ و۲ سے جو معلومہ سمتوں میں ہیں مرکب ہے اور فرض کرو کہ یہ رفتاریں متغیر ہیں اور اِنکے اسراع ع۱ ع۲ ہیں۔ اب اگر رفتاروں کی سمت میں دو خطوط کسی پیمانہ پر ع۱ ع۲ کو تعبیر کرنے کے لیے کھینچے جائیں تو حاصل اسراع اُسی پیمانہ پر اُس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوگا جسکے دو کنارے یہ خطوط ہیں۔

اِس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ہم نقطہ کی حرکت پر کسی صغیر وقفہ فرت میں غور کرتے ہیں جس میں ترکیبی اسراع ع۱ ع۲ ہیں شکل میں

فرض کرو کہ اس وقفہ کی ابتدا پر اب اور اج سے علی الترتیب رفتاریں و۱، و۲ تعبیر ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ بَ ب اور ج جَ سے اُسی پیمانہ پر وقفہ فرت میں اِن رفتاروں کے صغیر اضافے تعبیر ہوتے ہیں یعنے وہ ع۱ فرت اور ع۲ فرت کو تعبیر کرتے ہیں۔ تب ابَ، اجَ وقفہ فرت کے ختم پر رفتاروں کو تعبیر کریں گے۔

شکل (۷)

(۱۴) شکل میں خطوط ب د ف، بَ ع دَ، ج د ع، جَ ف دَ رفتاروں کو تعبیر کرنے والے خطوں اب اور اج کے متوازی کھینچو۔ اِس طرح وقفہ فرت کی ابتدا پر حاصل رفتار اد سے تعبیر ہوگی اور وقفہ کے ختم پر ادَ سے۔ رفتار ادَ کو دو رفتاروں اد، ددَ کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے اور حسب دفعہ (۱۰) ددَ سے وقفہ فرت میں رفتار کا اضافہ تعبیر ہوتا ہے۔ پس اگر حاصل اسراع ع ہو تو خط ددَ، رفتار ع فرت کو تعبیر کرے گا۔ اُسی پیمانہ پر خطوط دع اور دف سے رفتاریں ع۱ فرت اور ع۲ فرت تعبیر ہوتی ہیں اور د ع دَ ف ایک متوازی الاضلاع ہے۔

شکل (۸)

اگر اسراع ع۱ اور ع۲ کو وف۱ اور وف۲ شکل (۸) کسی پیمانہ پر تعبیر کریں

اور اگر تکمیل یافتہ متوازی الاضلاع کا وتر وگ ہو تو صریحاً وف۲ : وف = ع۱ : ع۲ = د ع : د ف اس لیے متوازی الاضلاع وف۱ گ ف۲ (شکل ۸) اور متوازی الاضلاع د ع دَ ف (شکل ۷) متشابہ اور متشابہاً واقع ہوں گے۔ اس لیے

وگ : وف۱ = ددَ : د ع = ع فرت : ع۱ فرت = ع : ع۱

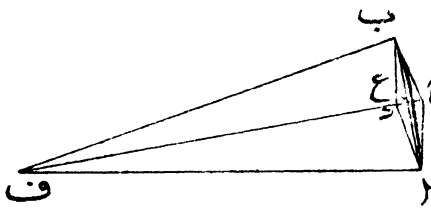
پس وگ اسراع ع کو اسی پیمانہ پر تعبیر کرتا ہے جس پر وف۱ اور وف۲ اسراعوں ع۱ اور ع۲ کو تعبیر کرتے ہیں، نیز وگ چونکہ ددَ کے متوازی ہے اس لیے وہ ع کی سمت کو بھی تعبیر کرے گا اور اس طرح مسئلہ ثابت ہو چکا۔

یہ ظاہر ہے کہ کسی لمحہ پر اسراع کا اسی سمت میں ہونا ضروری نہیں ہے جس میں رفتار ہے۔ شکل ۷ میں سمتیں ا د اور ا دَ، وقفہ فرت کی ابتداء اور ختم پر کی رفتاروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ جب انتہا میں ہم فرت = ۰ لیتے ہیں تو یہ خطوط منطبق ہو جاتے ہیں اور رفتار کی سمت اس لمحہ پر جس پر وقفہ فرت لیا گیا ہے ا د کی سمت ہوتی ہے۔ لیکن اس لمحہ پر اسراع کی سمت ددَ ہے۔

تمثیلاً ہم ایک ذرہ کی حرکت پر غور کرتے ہیں جو ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے یعنے پہیہ کے محیط کے کسی نقطہ کی حرکت پر جبکہ پہیہ اپنے مرکز کے گرد یکساں رفتار و سے گردش کر رہا ہو۔

فرض کرو کہ اس نقطہ کے دو محل دو لمحات پر ا، ب (شکل ۹) ہیں اور ا، ب پر کے مماس نقطہ ج پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ د، متوازی الاضلاع ا ج ب د کی تکمیل کرتا ہے۔

پہلے لمحہ پر نقطہ کی رفتار، ا ج پر رفتار و ہے۔ فرض کرو کہ یہ رفتار خود خط ا ج سے تعبیر ہوتی ہے۔ دوسرے لمحہ پر رفتار، ج ب پر رفتار و ہے، اس رفتار کو اسی پیمانہ پر خط ج ب سے یا ا د سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ ا ج اور ا د سے دو لمحوں پر کی رفتاریں تعبیر ہوتی ہیں اس لیے خط ج د سے رفتار کا اضافہ ان دو لمحات کے درمیان تعبیر ہوگا۔ (۱۵)

اب فرض کرو کہ اِن دو لمحات کے درمیان ایک صغیر وقفہ فرت کا فرق ہے تو نقطے ا، ب ایک دوسرے سے بہت ہی قریب ہونگے اور اِن کے درمیان صغیر قوس و فرت کا فاصلہ ہوگا۔ شکل میں ج د، ف بیں سے گذرتا ہے خواہ ا، ب دائرہ پر کہیں ہوں، اِس لیے جب ب کو ا پر منطبق کیا جاتا ہے تو ج د، دائرہ کے اُس نصف قطر پر منطبق ہوتا ہے جو ا میں سے گذرتا ہے۔ لیکن اگر متحرک نقطہ کا اسراع ع ہو تو وقت فرت میں رفتار میں ع فرت کا اضافہ ہونا چاہیئے۔ اس لیے رفتار کے اضافہ ع فرت کو سمت اور مقدار میں ج د تعبیر کرتا ہے اور اس لیے ا پر کا اسراع، ا میں سے گذرنے والے نصف قطر پر ہے۔

شکل (۹)

یہ وہ صورت ہے جس میں اسراع، رفتار کے علی القوائم ہے۔

اسراع کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج د = ۲ ج ع اور متشابہ مثلثوں سے

ع ج : ج ب = ب ع : ب ف

اب ع ج یا ½ ج د، رفتار ½ ع فرت کو تعبیر کرتا ہے اور ج ب، اسی پیمانہ پر رفتار و کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے

½ ع فرت : و = ب ع : ب ف

انتہا میں جبکہ ب ا بہت چھوٹا ہو تو ب ع یا ½ ب ا، دائرہ کی قوس ب ا کے نصف کے مماثل ہو جاتا ہے اور اس لیے ½ و فرت کے مماثل ہو جاتا ہے۔ پس اگر دائرہ کا نصف قطر ا ہو تو

½ ع فرت : و = ½ و فرت : ا

یعنے $ع = \frac{و^2}{ر}$

مثالیں

۱۔ ایک ہوائی چکی کے بادبان طول میں ۲۰ فٹ ہیں اور چکی دس ثانیوں میں ایک بار گھومتی ہے۔ ایک بادبان کے سرے پر کے ایک نقطہ کا اسراع معلوم کرو۔

۲۔ ۳ فٹ نصف قطر کا ایک پہیہ ۱۰ گردش فی ثانیہ کی شرح سے گھوم رہا ہے اور اسی اثناء میں جاذبہ کی وجہ سے ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے اسراع سے آزادانہ گر رہا ہے۔ پہیہ کے محیط پر کے مختلف نقطوں کے حاصل اسراع معلوم کرو۔

۳۔ زمین کے اُستوائی قطر کو ۷۹۲۰ میل لیکر زمین کے مرکز کی جانب (ا) ایک نقطہ کا اسراع جو خط اُستواء پر زمین کے لحاظ سے ساکن ہے، اور (ب) ایک جسم کا اسراع جو جاذبہ کے تحت خط اُستواء پر ایک ایسے اسراع سے گر رہا ہے جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ۳۲٫۰۹ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے، معلوم کرو۔ (۱۶)

۴۔ یہ فرض کر کے چاند زمین کے گرد $\frac{1}{2}$ ۲۹ دنوں میں ۲۴۰۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اس کا اسراع جانب زمین معلوم کرو۔

۵۔ سیارے سورج کے گرد مختلف دوری مدتوں میں دائرے مرتسم کرتے ہیں اس طور پر کہ دوری مدتوں کے مربع دائروں کے نصف قطروں کے مکعبوں کے متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ سیاروں کے اسراع، سورج سے ان کے فاصلوں کے مربعوں کے بالعکس متناسب ہیں۔

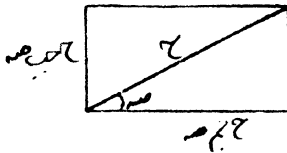
سمتی

۱۳ ۔ ہم نے تین مقداریں معلوم کی ہیں، حرکت، رفتار، اور اسراع۔ ان میں سے ہر ایک مقدار قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کی جا سکتی ہے۔

وہ مقداریں جو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مُرکب ہو سکیں سمتی کہلاتی ہیں ۔ سمتی میں مقدار اور سمت دونوں ہونے چاہئیں اور اس لیے اُس کو کسی پیمانہ پر ایک خط مستقیم کے ذریعہ تعبیر ہونا چاہیے ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ حرکت، رفتار، اور اسراع اسب کے سب سمتی ہیں ۔

ایک مستوی میں سمتیوں کی ترکیب اور تحلیل

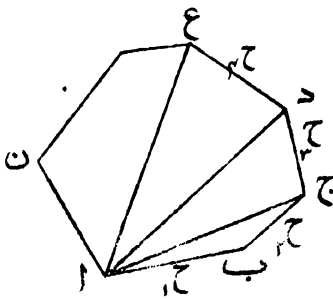
۱۴ ۔ سمتی کی تعریف سے ظاہر ہے کہ دو سمتی قانون متوازی الاضلاع کے اطلاق سے ایک سمتی میں مرکب کئے جا سکتے ہیں ۔ تعریف سے یہ بھی مستنبط ہوتا ہے کہ کسی ایک سمتی کو دو سمتیوں کے مماثل سمجھا جا سکتا ہے جبکہ یہ دو سمتی ایک متوازی الاضلاع کے کناروں سے تعبیر ہوں جو اِس طریقہ سے بنایا گیا ہو کہ ابتدائی سمتی اس کے وتر سے تعبیر ہو جائے ۔ یہ کہنا ایسا ہی ہے کہ کوئی سمتی دو دوسرے سمتیوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے ۔

ح جب صہ ح ح جم صہ صہ

شکل (۱۰)

بالخصوص اگر ہم ایک قائم الزاویہ متوازی الاضلاع بنائیں جس کا وتر سمتی ح کو تعبیر کرے تو معلوم ہوگا کہ سمتی ح ، دو سمتیوں ح جم صہ اور ح جب صہ میں تحلیل ہو سکتا ہے جہاں یہ اجزائے تحلیلی ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور ایسی سمتوں میں ہیں کہ سمتی ح اِن کے ساتھ زاویے صہ اور $\frac{\pi}{2}$ ۔ صہ بناتا ہے ۔

اگر ہم ایک مستوی میں دو ثابت قائم محاور د لا ، و ما لیں تو ہم دیکھتے کہ کوئی سمتی ح دو اجزائے ترکیبی ح جم صہ اور ح جب صہ میں

اِن محوروں کے متوازی تحلیل کیا جا سکتا ہے جہاں صہ وہ زاویہ ہے جو ح، محور ولا کے ساتھ بناتا ہے۔ اجزائے ترکیبی ح جم صہ، ح جب صہ کو ح کے اجزائے ترکیبی محوروں ولا، وما کے متوازی کہا جاتا ہے۔ (۱۷)

متعدد سمتیوں ح۱، ح۲، ح۳، .... ح‌ن کو مرکب کرنیکے دو طریقے ہیں۔ پہلا طریقہ یہ ہے کہ ایک کثیر الاضلاع ا ب ج د .... ن بنایا جائے ایسا کہ اس کے اضلاع اب، ب ج، ج د، .... م ن علی الترتیب سمتیوں ح۱، ح۲، ح۳، .... ح‌ن کو تعبیر کریں تو ا ن اِن کے حاصل کو تعبیر کرے گا۔ کیونکہ ح۱، ح۲ کو اول سمتی ح۱،۲ میں جو ا ج سے تعبیر ہوتا ہے مرکب کیا جا سکتا ہے، پھر ح۱،۲ اور ح۳ کو اُس سمتی میں مرکب کیا جا سکتا ہے جو ا د سے تعبیر ہوتا ہے اور علیٰ ہذا تا آنکہ بالآخر ا ن حاصل ہو۔

شکل (۱۱)

دوسرا طریقہ یہ ہے کہ ہم ہر سمتی کو مثلاً ح‌س کو قائم محوروں ولا، وما پر اس کے اجزائے ترکیبی ح‌س جم صہ‌س، ح‌س جب صہ‌س میں تحلیل کر سکتے ہیں تو اس طرح ن سمتی، ۲ ن سمتیوں میں

تحلیل ہوں گے جن میں سے ن سمتی محور و لا کے متوازی اور ن سمتی محور و ما کے متوازی ہوں گے۔ پہلے جٹ کو محور و لا کے متوازی ایک واحد سمتی

$$\text{لا} \equiv \text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \ldots\ldots$$

میں مرکب کیا جا سکتا ہے اور دوسرے جٹ کو محور و ما کے متوازی ایک واحد سمتی

$$\text{ما} \equiv \text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \ldots\ldots\ldots$$

میں۔ اِس طرح دو سمتی محوروں ولا، و ما کے متوازی لا اور ما حاصل ہوں گے اگر اِن کا حاصل سمتی ح ہو جو ولا کے ساتھ زاویہ صہ بنائے تو

$$\text{ح}\,\text{جم صہ} = \text{لا} = \text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{ح}\,\text{جب صہ} = \text{ما} = \text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \ldots\ldots \quad (2)$$

ح کی عددی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم (۱) اور (۲) کے مربع لیتے ہیں اور انہیں جمع کرتے ہیں تو

$$\text{ح}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2$$

$$= (\text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \ldots)^2 + (\text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \ldots)^2$$

$$= \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 + \text{ح}_3^2 + \ldots + 2\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,(\text{جم صہ}_1\,\text{جم صہ}_2 + \text{جب صہ}_1\,\text{جب صہ}_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 + \text{ح}_3^2 + \ldots\ldots + 2\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{جم}\,(\text{صہ}_1 - \text{صہ}_2) + \ldots\ldots$$

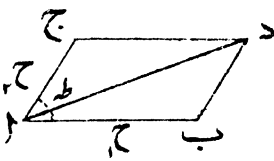
(۱۸) حاصل ح کی سمت معلوم کرنے کے لیے ہم (۱) اور (۲) کی متناظر طرفین کو تقسیم کرتے ہیں تو

$$\text{مس صہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{ح}_1\,\text{جم صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جم صہ}_2 + \ldots\ldots}{\text{ح}_1\,\text{جب صہ}_1 + \text{ح}_2\,\text{جب صہ}_2 + \ldots\ldots}$$

اگر صرف دو سمتیاں ح_1 اور ح_2 ہوں جو ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بنائیں تو ہم رکھ سکتے ہیں $\text{صہ}_1 - \text{صہ}_2 = \text{طہ}$ اور اس طرح

$$\text{ح}^2 = \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 + 2\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{جم طہ}$$

چونکہ ح صریحاً ایک متوازی الاضلاع کا وتر ہے جس کے کنارے ح_1، ح_2 طول کے ہیں اور زاویہ طہ پر ملتے ہیں اس لیے نتیجۂ بالا کو راست مثلث ا د ج کے علم ہندسہ سے جس میں ج پر کا زاویہ صریحاً π - طہ ہے حاصل کیا جا سکتا ہے ۔ پس

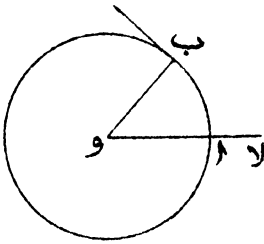
$$\text{ح}^2 = \text{ح}_1^2 + \text{ح}_2^2 - 2\,\text{ح}_1\,\text{ح}_2\,\text{جم}(\pi - \text{طہ})$$

جو صریحاً اوپر کے جملے کے مماثل ہے۔
ہم اس طریقہ کی توضیح کے لیے کہ سمتی ایک مستوی میں قائم اجزائے ترکیبی میں تحلیل کئے جا سکتے ہیں دو مثالیں لیتے ہیں۔

شکل (۱۲)

۱۔ شکل ۲ صفحہ (۸) میں فرض کرو کہ جہاز کی سمت (ا ب شکل ۵) کو محور و لا لیا گیا ہے اور اُس سمت کو جس میں گولی چلتی ہے محور و ما لیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ گولی کو رفتار و سے فائر کیا گیا ہے جو و لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے اور فرض کرو کہ جہاز کی رفتار ع ہے۔ حاصل رفتار و ما پر ہونی چاہئے تاکہ و لا پر رفتار (فرض کرو لا) صفر ہو۔ لیکن

$$\text{لا} = \text{ع} + \text{و}\,\text{جم طہ}$$

اس لئے

$$\text{جم طہ} = -\frac{\text{ع}}{\text{و}}$$

یہ وہی نتیجہ ہے جو حاصل ہو چکا ہے۔

۲ — ایک نقطہ کا اسراع معلوم کرنا جو یکساں رفتار و سے نصف قطر ا کے ایک دائرہ میں حرکت کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ وقت ت = ۰ پر ذرہ کا محل ا ہے اور لا کا محور و ا ہے۔

ب و ا لا

شکل (۱۳)

وقت ت کے بعد ذرہ، قوس کا طول و ت طے کرے گا، اس لیے اگر وقت ت کے بعد اس کا محل ب ہے تو زاویہ ب و ا دائری ناپ میں $\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$ ہے۔ اسلیے ب پر رفتار کی سمت یعنی ب پر کے مماس کی سمت و لا کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{2} + \frac{\text{وت}}{\text{ا}}$ بنائے گی (۱۹)

اور اس لیے رفتار کے اجزائے ترکیبی محاور و لا، و ما پر و_1 اور و_2 ہوں تو

$$\text{و}_1 = \text{و جم}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\text{وت}}{\text{ا}}\right) = -\text{و جب}\,\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$$

$$\text{و}_2 = \text{و جب}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\text{وت}}{\text{ا}}\right) = \text{و جم}\,\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$$

و لا پر اسراع $\frac{\text{فر}\,\text{و}_1}{\text{فر ت}}$ ہے اور اس لیے بلحاظ ت کے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$-\frac{\text{و}^2}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$$

اسی طرح و ما پر اسراع $\frac{\text{فر}\,\text{و}_2}{\text{فر ت}}$ یعنی

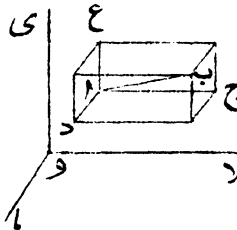
$$-\frac{\text{و}^2}{\text{ا}}\,\text{جب}\,\frac{\text{وت}}{\text{ا}}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ان اسراعوں کو مرکب کرنے سے ب و پر اسراع $\frac{و^2}{ر}$ حاصل ہوتا ہے

اور یہ وہی نتیجہ ہے جو صفحہ (۲۴) پر حاصل کیا جاچکا ہے۔

فضا میں سمتیوں کی ترکیب اور تحلیل

یہ ہوسکتا ہے کہ وہ سمتی جنہیں مرکب کرنا ہے ایک ہی مستوی میں نہ ہوں۔ لیکن ان کا حاصل دریافت کرنے کا طریقہ اصولاً وہی ہے۔ چنانچہ ہم فضا میں ایک کثیر الاضلاع ا ب ج د .... ن بناتے ہیں ایسا کہ اس کے اضلاع ا ب، ب ج، .... م ن سمتیوں $ح_1$، $ح_2$، ... $ح_ن$ کو تعبیر کریں حسب صورت ماسبق یہ آسانی کے ساتھ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ حاصل سمتی ا ن ہے۔ بالعموم سہولت اس میں ہوتی ہے کہ ہر سمتی کو فضا میں قائم محوروں کے متوازی تحلیل کیا جائے۔

شکل (۱۴)

اگر سمتی ا ب دیا گیا ہو تو ہم ا میں سے اور اسی طرح ب میں سے تین مستویاں محددوں کے مستویوں کے متوازی کھینچتے ہیں۔ ان سے ایک قائم متوازی السطوح حاصل ہوتا ہے جس کا ایک وتر ا ب ہے۔ اس کے کناروں ا ج، ا د، ا ع سے تین سمتی تعبیر ہوں گے جو ا ب کے عوض لیے جا سکتے ہیں یہ سمتی جو محوروں کے متوازی ہیں سمتی ا ب کے اجزائے ترکیبی ہیں۔

فرض کرو کہ ن سمتی ہیں اور سمتی $ح_س$ کے سمتی زاویے $عہ_س$، $بہ_س$، $جہ_س$

(۲۰) سے تعبیر ہوتے ہیں ۔ حسب طریقۂ بالا ہر سمتی $ح_س$ کو محوروں کے متوازی تین اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، اِن اجزائے ترکیبی کی مقداریں ہیں

$$\text{ح}_\text{س}\ \text{جم عس}،\ \text{ح}_\text{س}\ \text{جم بس}،\ \text{ح}_\text{س}\ \text{جم جس}$$

اِس طریقہ سے ۳ ن سمتی حاصل ہوں گے، اِن میں سے محور لا کے متوازی ن سمتیوں کو ایک واحد سمتی لا میں مرکب کیا جا سکتا ہے چنانچہ

$$\text{لا} = \text{ح}_۱\ \text{جم عہ}_۱ + \text{ح}_۲\ \text{جم عہ}_۲ + \cdots + \text{ح}_\text{ن}\ \text{جم عہ}_\text{ن} \quad (۳)$$

پس اِس پورے نظام کی بجائے ایک واحد سمتی لا کو لیا جا سکتا ہے،
اسی طرح محور ما اور محور ے کے متوازی سمتیوں کو ایک ایک واحد سمتی میں مرکب کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\text{ما} = \text{ح}_۱\ \text{جم بہ}_۱ + \text{ح}_۲\ \text{جم بہ}_۲ + \cdots + \text{ح}_\text{ن}\ \text{جم بہ}_\text{ن} \quad (۴)$$

$$\text{ے} = \text{ح}_۱\ \text{جم جہ}_۱ + \text{ح}_۲\ \text{جم جہ}_۲ + \cdots + \text{ح}_\text{ن}\ \text{جم جہ}_\text{ن} \quad (۵)$$

اِن تین سمتیوں لا، ما، ے کا حاصل اور اِس لیے ابتدائی ن سمتیوں کا حاصل صریحاً اُس قائم الزاویہ متوازی السطوح کا ایک وتر ہے جس کے کنارے لا، ما، ے ہیں۔ اگر اِس حاصل کے طول کو ح سے تعبیر کیا جائے اور اِس کے سمتی زاویوں کو عہ، بہ، جہ سے تو

$$\text{ح}^۲ = \text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ + \text{ے}^۲$$

$$\text{اور جم عہ} = \frac{\text{لا}}{\text{ح}}،\ \text{جم بہ} = \frac{\text{ما}}{\text{ح}}،\ \text{جم جہ} = \frac{\text{ے}}{\text{ح}}$$

اس لیے حاصل، مقدار اور سمت دونوں میں پوری طرح معلوم ہوگیا۔

مرکز ہندسی

۱۶ — فرض کرو کہ سمتیوں کا ایک نظام سمت میں و ا$_1$، و ا$_2$، ...، و ا$_ن$ سے اور مقداریں ک$_1$ × و ا$_1$، ک$_2$ × و ا$_2$، ....، ک$_ن$ × و ا$_ن$ سے تعبیر ہوتا ہے جہاں ک$_1$، ک$_2$، ....، ک$_ن$ کوئی مقداریں ہیں۔ فرض کرو کہ ا$_ر$ کے محدد، و میں سے گذرنے والے محوروں کے لحاظ سے، لا$_ر$، ما$_ر$، ی$_ر$ ہیں اور ان محوروں کے لحاظ سے و ا$_ر$ کے سمتی زاویے ع$_ر$، ب$_ر$، ج$_ر$ ہیں اور سمتی ک$_ر$ × و ا$_ر$ کی مقدار ح$_ر$ ہے۔ ان محوروں پر اس سمتی کے اجزائے ترکیبی ہیں

ح$_ر$ جم ع$_ر$ = ک$_ر$ × و ا$_ر$ جم ع$_ر$ = ک$_ر$ لا$_ر$

ح$_ر$ جم ب$_ر$ = ک$_ر$ × و ا$_ر$ جم ب$_ر$ = ک$_ر$ ما$_ر$

ح$_ر$ جم ج$_ر$ = ک$_ر$ × و ا$_ر$ جم ج$_ر$ = ک$_ر$ ی$_ر$

اس لیئے مساواتوں (۳)، (۴)، (۵) کو لکھا جا سکتا ہے اس طرح

لا = $\sum_1^{ن}$ ک$_ر$ لا$_ر$، ما = $\sum_1^{ن}$ ک$_ر$ ما$_ر$، ے = $\sum_1^{ن}$ ک$_ر$ ی$_ر$

(۲۱) اس نتیجہ کی تفہیم کے لیے ہم نقطوں کے ایک نظام کے مرکز ہندسی کے تخیل سے استفادہ کرتے ہیں۔ بموجب تعریف نقطوں کے کسی نظام کا مرکز ہندسی وہ نقطہ ہے کہ اس کا فاصلہ محددوں کے تین مستویوں میں سے کسی سے ان فاصلوں کا اوسط ہوتا ہے جو اس مستوی سے نظام کے تمام نقطوں کے ہیں جبکہ ہر فاصلہ کو اس کی واجب علامت کے ساتھ لیا گیا ہو

اِس تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہم خواہ کوئی مستوی لیں اُس سے مرکز ہندسی کا فاصلہ اُن فاصلوں کا اوسط ہوتا ہے جو اس مستوی سے ن نقطوں کے ہیں۔ کیونکہ اگر رویں نقطہ کے محدد لار، مار، یر ہوں تو مرکز ہندسی کے محدد (فرض کرو لاَ، ماَ، یَ) ہوں گے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{1}^{\text{ن}} \text{لا}_{\text{ر}} ،\quad \bar{\text{ما}} = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{1}^{\text{ن}} \text{ما}_{\text{ر}} ،\quad \bar{\text{ی}} = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{1}^{\text{ن}} \text{ی}_{\text{ر}} ، \quad \ldots (۹)$$

اور مرکز ہندسی سے کسی مستوی

$$\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج ی} + \text{د} = ۰$$

کا عمودی فاصلہ ہوگا

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2}} \left(\text{ا}\,\bar{\text{لا}} + \text{ب}\,\bar{\text{ما}} + \text{ج}\,\bar{\text{ی}} + \text{د} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2}} \frac{1}{\text{ن}} \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\text{ا لا}_{\text{ر}} + \text{ب ما}_{\text{ر}} + \text{ج ی}_{\text{ر}} + \text{د} \right)$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \sum_{1}^{\text{ن}} \frac{\text{ا لا}_{\text{ر}} + \text{ب ما}_{\text{ر}} + \text{ج ی}_{\text{ر}} + \text{د}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2}}$$

جس سے نتیجہ ثابت ہے۔

اب فرض کرو کہ ن نقطوں میں سے کر نقطے سب کے سب نقطہ لار، مار، یر پر منطبق ہوتے ہیں، کب نقطے لاب، ماب، یب پر اور علیٰ ہذا القیاس تو مرکز ہندسی کے محدد ہوں گے (مساواتوں (۷) کی رو سے)

$$\left.\begin{aligned} \bar{\text{لا}} &= \frac{1}{\text{ن}} \sum \text{ک لا}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}} \text{لا}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}} \\ \bar{\text{ما}} &= \frac{1}{\text{ن}} \sum \text{ک ما}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}} \text{ما}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}} \\ \bar{\text{ی}} &= \frac{1}{\text{ن}} \sum \text{ک ی}_{\text{ر}} = \frac{\sum \text{ک}_{\text{ر}} \text{ی}_{\text{ر}}}{\sum \text{ک}_{\text{ر}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (۸)$$

جہاں عمل جمع فضاء کے ان مختلف نقطوں پر لیا گیا ہے جن پر اصلی نقطے مجتمع ہیں۔ ان نقطوں کو ا، ب، ج ..... سے تعبیر کرو تو نقطہ لاَ، مَا، یَ کو ضاربوں ک، ک ..... کے جواب میں نقطوں ا، ب، ج ..... کا مرکز ہندسی کہتے ہیں۔ (۲۲)

ان نتیجوں کے ذریعہ مساواتیں (۶)

$$لا = لاَ \sum ک ، ما = مَا \sum ک ، ے = یَ \sum ک \quad (۹)$$

میں تحویل ہوتی ہیں۔

اس لیے سمتیوں کے مندرجۂ بالا جٹ کا حاصل خط و ج کی سمت میں ہے اور اس کی مقدار و ج $\sum ک$ ہے۔ مساواتوں (۹) کی رو سے ضارب ک کوئی عدد ہو سکتے ہیں مثبت یا منفی اس لیے مجموعہ $\sum ک$ مثبت، صفر یا منفی ہو سکتا ہے۔ بالخصوص اگر سمتی مقدار اور سمت دونوں میں و ا، و ا ..... و ان سے تعبیر ہوں تو حاصل سمت و ج میں ہے اور اس کی مقدار ن × و ج ہے جہاں ن سمتیوں کی تعداد ہے اور نقطہ ج حسب تعریف بالا مرکز ہندسی ہے۔ پس حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:۔

مسئلہ۔ اگر مقداروں ک × و ا، ک × و ا ..... کے سمتی خطوط و ا، و ا ..... پر عمل کریں تو ان کے حاصل کی مقدار (ک + ک + ...) و ث ہو گی اور وہ سمت

و ث میں عمل کرے گا جہاں ث' ا' ا'..... کام کر ہندسی ضاربوں ک' ک'.... کے جواب میں ہے۔

مثالیں

۱ ۔ دو سمیتوں کا حاصل معلوم کرو جن کی مقداریں ۵ ف' ۱۲ ف ہیں اور جو ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔

۲ ۔ ایک سمتی ف' دو سمیتوں کا حاصل ہے جو اس کے ساتھ مخالف سمتوں میں ۳۰° اور ۴۵° کے زاویے بناتے ہیں۔ یہ موخر الذکر سمتی کتنے بڑے ہیں

۳ ۔ معلومہ مقداروں کے دو سمیتوں کی سمتیں کس طرح معلوم کیجا سکتی ہیں کہ ان کا حاصل دی ہوئی مقدار اور سمت کا ہو۔ یہ کب ناممکن ہوگا۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ اگر دو معلومہ سمیتوں کے درمیانی زاویہ کو بڑھا دیا جائے تو ان کا حاصل گھٹتا ہے۔

۵ ۔ کن شرطوں کے تحت مقداروں ۷' ۲۴' اور ۲۵ کے سمیتوں کے ایک نظام کا حاصل صفر کے مساوی ہوگا۔

۶ ۔ طولوں ف' ف' اور ف $\sqrt{2}$ کے تین سمتی ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور باہم علی القوائم ہیں۔ حاصل کی مقدار اور وہ زاویے معلوم کرو جو حاصل کی سمت اور ہر جزو ترکیبی کی سمت کے درمیان ہیں۔ (۲۳)

۷ ۔ طولوں ف' ۲ ف' ۳ ف کے تین سمتی ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور ان کی سمتیں اس نقطہ پر ملنے والے ایک مکعب کے تین رخوں کے وتروں کی سمتیں ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار معلوم کرو۔

۸ ۔ تین سمتی ایک متوازی السطوح کے تین رخوں کے وتروں سے جو ایک راس ا پر ملتے ہیں تعبیر ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا حاصل متوازی السطوح کے اس وتر کے دوچند سے تعبیر ہوتا ہے جو ا سے کھینچا گیا ہے۔

۹ ۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ د ہے اور راس کے

اندرونی دائرہ کا مرکز ع ہے۔ ثابت کرو کہ سمتیوں ا × ا د، ب × ب د، ج × ج د کا حاصل (ا + ب + ج) ع د ہے جہاں ا، ب، ج، مثلث کے ضلعوں کے طول ہیں۔

۱۰ — دو متوازی الاضلاع ا ب ج د، اَ بَ جَ دَ ایک ہی مستوی میں ہیں۔ ان سمتیوں کا حاصل معلوم کرو جو ایک نقطہ سے اَا، بَ ب، جَ ج، دَ د کے متوازی اور ان کے متناسب کھینچے گئے ہیں۔

۱۱ — اگر مثلث ا ب ج کے حائط دائرہ کا مرکز و ہو اور مرکز عمود ی ف تو ثابت کرو کہ و ف، سمتیوں و ا، و ب اور و ج کا حاصل ہے۔ نیز یہ کہ ۲ ف و، سمتیوں ف ا، ف ب، ف ج کا حاصل ہے۔

۱۲ — ایک دائرے کے وتر ا و ب اور ج و د علی القوائم متقاطع ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سمتیوں و ا، و ب، و ج، و د کا حاصل سمتی و ف کے دوچند سے تعبیر ہوتا ہے جہاں ف، دائرہ کا مرکز ہے۔

عام مثالیں

(ان مثالوں میں اسراع بوجہ جاذبہ ارض کو ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ فرض کرو)

۱ — ایک نقطہ ۲، ۳، ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتاریں ایکساتھ ان سمتوں میں رکھتا ہے جو اس نقطہ کی ہیں جو ایک مثلث متساوی الاضلاع کے تین ضلعوں کو ترتیب وار مرتسم کرتا ہے۔ اول الذکر نقطہ کی رفتار کی مقدار معلوم کرو۔

۲ — ایک نقطہ ایک ساتھ رفتاریں (ہر ایک و کے مساوی) ان خطوں کی سمتوں میں رکھتا ہے جو ایک منتظم مسدس کے مرکز سے اس کے پانچ راسوں تک کھینچے گئے ہیں۔ حاصل رفتار کی مقدار اور سمت معلوم کرو۔

۳ — جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ایک شامیانہ جو عرشے کے اوپر ۸ فٹ بلند ہے عرشہ کے اس حصہ کو بارش سے بچاتا ہے جو شامیانہ کے کنارے کے انتصابی ظل سے ۴ فٹ سے زیادہ پیچھے ہے لیکن جب جہاز ساکن ہوتا ہے تو

عرشہ کے خشک و تر حصوں کا خط فاصل اس ظل سے ۶ فٹ آگے ہوتا ہے۔ جہاز کی رفتار معلوم کرو اگر بارش کی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۴ ــ ایک جہاز پر جو خط استوا پر مشرق سے مغرب کی طرف جا رہا ہے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دن ظہر (مقامی وقت) سے دوسرے دن ظہر (مقامی وقت) تک فاصلہ طے شدہ ۴۲۰ میل ہے۔ دن کتنا طویل ہوگا اگر جہاز اسی شرح سے مغرب سے مشرق کی جانب چلے۔

۵ ــ ایک ریل کی پٹڑی شرقاً غرباً عرض بلد ل میں واقع ہے۔ ایک ریل گاڑی کو اس پٹڑی پر کس شرح سے چلنا چاہیئے کہ سورج ہمیشہ اس کے ٹھیک جنوب میں رہے۔ (۲۴)

۶ ــ ایک جہاز کا ٹھیک راستہ اور رفتار معلوم کرو جو جانب شمال (بموجب کمپاس) ۱۰ بحری میلوں کی شرح سے ۴ بحری میل کے بہاؤ میں جو جنوب مشرق کی جانب ہے جا رہا ہے۔ نیز کمپاس سے سمت کی وہ تبدیلی معلوم کرو تاکہ جہاز ٹھیک شمالی راستہ اختیار کرے۔

۷ ــ ایک سیکل سوار ہوا کی رفتار سے زیادہ تیز سیکل چلاتا ہے اور ہوا کی سمت سمجھنے میں غلطی کرتا ہے اور اس سمت کو ہوا کی سمت سمجھتا ہے جس میں ہوا اسے آکر لگتی ہے جبکہ وہ متحرک ہے۔ ثابت کرو کہ ہوا ہمیشہ اس کے خلاف چلتی ہوئی معلوم ہوگی خواہ وہ کسی سمت میں سیکل چلائے۔

۸ ــ ایک جہاز جو شرقاً ۲۰ بحری میل کی چال سے جا رہا ہے بوقت ۱۱ بجے صبح ایک روشنی کے مینار سے گذرتا ہے۔ یک دوسرا جہاز جو اسی شرح سے جنوب میں جا رہا ہے اسی نقطہ کو ایک بجے دوپہر پر عبور کرتا ہے۔ کس وقت وہ باہم قریب ترین ہوں گے اور اس وقت ان کے درمیان کیا فاصلہ ہوگا۔

۹ ــ دو ذرے ایک دائرے کے محیط میں علی الترتیب رفتاروں و اور ۲ و سے مخالف سمتوں میں حرکت کرتے ہیں کن محلوں میں ان کی اضافی رفتار بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی ہوگی اور اس وقت اس کی قیمتیں کیا ہونگی۔

۱۰ ــ دو ذروں کی اضافی حرکت معلوم کرو جو ایک ہی رفتار و سے حرکت کر رہے ہیں لیکن ایک ذرہ نصف قطر ا کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے اور دوسرا

ایک قطر پر حرکت کرتا ہے۔

۱۱۔ دو ذرّے یکساں طور پر خطوطِ مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ ایک معلومہ وقت پر اِن کے درمیان فاصلہ ا ہے اور اِن کی اضافی رفتار و ہے، اِس اضافی رفتار کے اجزائے ترکیبی ا کی سمت میں اور اِس کے عمود وار ع اور ط ہیں۔ ثابت کرو کہ جب وہ باہم قریب ترین ہوتے ہیں تو اِن کے درمیان فاصلہ $\frac{اط}{و}$ ہے اور وہ اس محل پر وقفہ $\frac{اع}{و^2}$ کے بعد پہنچتے ہیں۔

۱۲۔ ایک کھیت میں تین گھوڑے ایک خاص لمحہ پر ایک مثلث متساوی الاضلاع کے راسوں پر ہیں۔ ایک شخص کے لحاظ سے جو ایک سڑک پر جا رہا ہے گھوڑوں کی اضافی حرکت سمت میں مثلث کے ضلعوں کے اطراف (ایک ہی جہت میں) اور مقدار میں شخص کی رفتار کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ تین گھوڑے ہم نقطہ خطوں پر حرکت کر رہے ہیں۔

۱۳۔ دو نقطے نصف قطروں ا اور ب کے ہم مرکز دائرے ایسی رفتاروں سے مرتسم کرتے ہیں جو نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ اضافی رفتار اُس خط کے متوازی ہے جو اِن نقطوں کو ملاتا ہے جبکہ اِن نقطوں سے کھینچے ہوئے نصف قطروں کا درمیانی زاویہ

$$جم^{-1} \frac{۲\,اب}{ا^2 + ب^2}$$ ہو۔

۱۴۔ ایک پتھر کو ایک غبارے سے جو افقاً حرکت کر رہا ہے چھوڑا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ ۴ ثانیہ ہوا میں رہتا ہے اور زمین سے ایسی سمت میں ٹکراتا ہے جو انتصابی سے ۱۵ درجہ کا زاویہ بناتی ہے۔ غبارے کی رفتار معلوم کرو۔

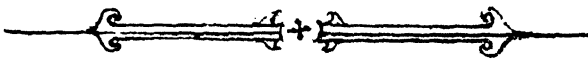
(۲۵) ۱۵۔ ایک گولہ اوپر وار سمت میں افق کے ساتھ ۳۰ درجہ کے زاویہ پر ۶۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک مکان کی چھت سے پھینکا گیا ہے۔ پہلے اور دوسرے ثانیوں کے ختم پر اس کی حرکت کی سمتیں اور نیز اس کی رفتاریں معلوم کرو۔

۱۶ — ایک گولہ ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ہوا میں اچھالا گیا اور ایک ثانیہ کے ختم پر معلوم ہوا کہ وہ اچھال کی سمت کے علی القوائم خط میں حرکت کر رہا ہے۔ اس لمحہ پر اُس کی رفتار کیا ہے۔

۱۷ — اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ گولی کی رفتار ایک یکساں افقی رفتار ہے جو آواز کی رفتار کے ن گنے کے مساوی ہے تو ثابت کرو کہ وہ نقطے جن پر گولی کے فائر کرنے کی اور گولی کے نشانے پر لگنے کی آوازیں ایک ساتھ سُنائی دیتی ہیں خروج المرکز ن کے ایک قطع زائد پر واقع ہیں۔ اُس صورت کا امتحان کرو جس میں ن اکائی کے تقریباً مساوی ہو۔

۱۸ — اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائری مدار میں ۲۹٫۶ کیلومیٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتی ہے اور نور کی رفتار ۳۰۰۰۰۰ کیلومیٹر فی ثانیہ ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی حرکت کی وجہ سے سورج کا ظاہری ہٹاؤ کیا ہے۔

۱۹ — اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائرہ کو ایک سال میں یکساں طور پر مرتسم کرتی ہے اور سورج اور زمین کے مرکزوں کے درمیان سورج کے ۲۲۰ نصف قطروں کا فاصلہ ہے اور سورج کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کا ۱۰۸ گنا ہے تو زمین کے سایہ کے راس کی رفتار معلوم کرو اگر سورج کے نصف قطر کو طول کی اکائی اور ایک سال کو وقت کی اکائی فرض کیا جائے۔

(۲۴)

دوسرا باب

قوت اور قوانین حرکت

قوانین نیوٹن

۱۷ ـ ہم قبل ازیں بیان کر چکے ہیں کہ قوانین حرکت وہ مواد ہے جسے تجربی علم الحیل نے نظری علم الحیل کے واسطے مہیا کیا ہے تاکہ اِس سے کام لیا جائے ـ نیوٹن نے اِن قوانین کو جامع شکل میں بیان کیا ہے ـ

قانون اول ـ ہر جسم اپنی حالت سکون میں رہتا ہے یا ایک خطِ مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں تاآنکہ وہ قوت عاملہ سے اپنی حالت بدلنے پر مجبور ہو جائے ـ

قانون دوم ـ معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اُس خط مستقیم کی سمت میں وقوع پذیر ہوتی ہے جس میں قوت عمل کرتی ہے ـ

قانون سوم ـ ہر عمل کے جواب میں ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے ـ

۱۸ ـ اِن قوانین میں مختلف نئی اصطلاحیں بیان ہوئی ہیں ـ قوت،

معیار حرکت، عمل، تعامل ۔ اور اِن قوانین کو پوری طرح سمجھنے کے لیے ان اصطلاحات کی صراحت ہونی چاہیئے ۔

قانون اول میں حرکت کا تخیل اور نیز قوت کا تخیل داخل ہیں، اول الذکر پر بحث کی جا چکی ہے ثانی الذکر پر بحث کرنی ہے ۔

لفظ "قوت" عام طور پر استعمال میں آتا ہے ۔ اِس لفظ سے سب سے اول اعصابی قوت کا خیال وابستہ ہے مثلاً ہم کسی پتھر کو راستہ سے ہٹانے میں قوت لگاتے ہیں لیکن علمی طور پر اس لفظ کے وسیع معنے ہیں مثالاً جب دو ریل کے ڈبے ٹکراتے ہیں تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک دوسرے پر قوت لگاتے ہیں یا ہم کہتے ہیں کہ زمین تمام اجسام پر قوت لگاتی ہے جس کی باعث وہ زمین کی جانب گرتے ہیں اِلّا انکہ وہ اِسی طرح سہارے گئے ہوں کہ اس قوت کی مزاحمت کر سکیں ۔

حرکت کا قانون اول فی الواقعی اس امر کی تصریح کرتا ہے کہ قوت سے کیا مراد ہے ۔ قوت وہ ہے جو ایک جسم کی حالت سکون کو یا ایک خط مستقیم میں اِس کی یکساں حرکت کی حالت کو بدلتی ہے یا بدلنے کا میلان رکھتی ہے ۔

مثالاً ریل کے ایک ڈبے پر غور کرو جو ہموار پٹڑیوں پر ساکن کھڑا ہے ۔ اگر ایک دوسرا ڈبہ آکر اِس سے لگے تو وہ حرکت کرنے لگیگا، اس لیے اِس پر قوت لگی ہے ۔

لیکن قانون اول سے اِس سے کچھ زیادہ ہی کا اظہار ہوتا ہے ۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک جسم کو قوتوں کے عمل سے آزاد رکھا جائے تو وہ اپنی حالت سکون میں یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں رہے گا ۔ اِس لیے کسی جسم کی طبعی حالت یہ ہونی چاہیے کہ وہ ساکن رہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کرے یعنے اِس کی رفتار یکساں ہو صرف قوت کی موجودگی ہی اِس طبعی حالت کو بدل سکتی ہے ۔

ریل کے ڈبے کی صورت پر مکرر غور کرو ۔ فرض کرو کہ ٹکر سے وہ حرکت میں

آچکا ہے اور دس میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ قانون اول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب تک اس پر قوتیں عمل نہیں کرتیں وہ اسی خط مستقیم میں جس میں وہ حرکت کرنا شروع کیا تھا دس میل فی گھنٹے کی غیر متغیر رفتار سے اپنی حرکت جاری رکھے گا لیکن جب ڈبہ ٹکر سے فی الواقعی حرکت میں آتا ہے تو ہم جانتے ہیں کہ وہ ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت جاری نہیں رکھے گا بلکہ جلد یا بدیر ساکن ہو جائے گا۔ اس لیے قوتیں عمل کرنی چاہئیں۔ اب ہم ان قوتوں کی نوعیت پر غور کریں گے۔

سب سے اول ہمیں ایک قوت پر غور کرنا ہوگا جو ہوا کی مزاحمت کے طور پر مشہور ہے ڈبے کے سامنے کی ہوا اس پر سمت مخالف سے اس طور پر دباؤ ڈالتی ہے کہ اس کی حرکت میں ابطا پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے ہوا ڈبے پر قوت لگاتی ہے عین ایسے ہی جیسے ایک شخص اپنے ہاتھ سے اس کو سمت مخالف سے دبا کر قوت لگائے۔ صرف یہ قوت ہی ڈبے کو کسی نہ کسی وقت ٹھہرا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ بریک ڈال دئے گئے ہیں اور پہیئے اس قدر مضبوطی سے جکڑے ہوئے ہیں کہ وہ ڈبے کے لحاظ سے ساکن ہیں اور اس لیے وہ پٹڑیوں پر پھسلتے ہیں۔ اس صورت میں ڈبے پر پٹڑیوں سے ایک بڑی قوت لگے گی اور یہ قوت بھی ڈبے کی حرکت کو روکنے کا میلان رکھے گی۔ اگر بریک نہ بھی ڈالے گئے ہوں اور پہیئے پھرنے میں آزاد ہوں تو بھی پٹڑیوں سے ایک قوت ڈبے پر لگے گی اگرچہ کہ یہ قوت پہلے کی بہ نسبت کمتر ہوگی۔

فرض کرو کہ راستہ سیدھا نہیں ہے بلکہ منحنی ہے۔ ہم تصور کر سکتے ہیں کہ حرکت کچھ وقت تک جاری رہے گی لیکن یہ حرکت اس منحنی پر ہوگی اور وہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہوگی جیسا کہ قانون اول کی بموجب ہوتی اگر قوت کا عمل ہوتا۔ پس قوت لگی ہے، یہ قوت پٹڑیوں کی وہ قوت ہے جو پہیوں کے محیط سے نکلے ہوئے حصوں (کوروں) پر لگتی ہے اور جو ڈبے کو منحنی کے گرد موڑتی ہے۔ اگر یہ حصے نہ ہوتے تو یہ قوت عمل نہ کرتی اور حرکت ایک خط مستقیم میں جاری رہتی یعنی ڈبہ پٹڑیوں پر سے اتر جاتا۔

قانون اول کا مفہوم سمجھانے کے لیے ہم ایک اور مثال لیتے ہیں۔

فرض کرو ایک گولی بندوق سے فائر کی گئی ہے، اب ہم اس کی حرکت پر غور کریں گے۔ یہاں وہ قوتیں جو حرکت پیدا کرتی ہیں بارود کے دباؤ سے مہیا ہوتی ہیں۔ جب گولی بندوق سے نکل جاتی ہے تو یہ قوتیں اِن قوتوں کے مقابلے میں جو گولی پر عمل کرتی ہیں بہت بڑی ہوتی ہیں اس لئے گولی تقریباً ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کرتی نظر آتی ہے۔ اس حرکت کو بدلنے کا میلان رکھنے والی قوتیں دو ہیں ایک ہوا کی مزاحمت اور دوسری گولی کا وزن۔ ہوا کی مزاحمت جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں گولی کے پہلوؤں اور سروں پر دباؤ ڈالکر حرکت کو روکنے کا میلان رکھتی ہے اور گولی کا وزن اُس کو زمین کی طرف کھینچ کر لانا چاہتا ہے اور اس طرح ایک خط مستقیم مرتسم کرنے کی بجائے گولی سے ایک ایبسا راستہ مرتسم کراتا ہے جو زمین کی جانب نیچے وار منحنی ہے۔ (Downward؟) (۲۸)

۱۹ — یہ تخیل کہ کسی جسم کی طبعی حالت ایک خطِ مستقیم میں یکساں حرکت ہے یا سکون ہے (جو یکساں حرکت کی وہ مخصوص صورت ہے جبکہ رفتار صفر ہو) گیلیلو (سنہ ۱۵۶۴ تا سنہ ۱۶۴۲) سے منسوب کیا جاتا ہے۔ اِس قانون کے انکشاف کا دلچسپ ذکر "Mach's science of Mechanic's" کے باب دوم میں یا "Cox's Mechanics" کے باب نہم میں ملے گا۔ گیلیلو سے بیشتر ارسطو کی سند پر بالعموم یہ تسلیم کیا جاتا تھا کہ ہر جسم اک فطری مقام رکھتا ہے اور اس کی طبعی حالت اِس فطری مقام میں سکون کی حالت ہے۔ مثلاً یہ سمجھا جاتا تھا کہ پتھر پانی میں ڈوبتا ہے اِس وجہ سے نہیں کہ قوت جاذبہ اُس پر عمل کرتی ہے اور اُس کو نیچے وار حرکت میں لاتی ہے بلکہ اِس وجہ سے کہ اُس کا فطری مقام پانی کی تہہ ہے۔ اسی طرح یہ سمجھا جاتا تھا کہ کاگ کا فطری مقام سطح آب ہے۔ چنانچہ جیبرارڈ سنہ ۱۶۳۴ء میں لکھتا ہے "[۱] لاتعول اجسام ہیں جن میں سے ہر ایک اپنی اپنی جگہ پر ہے" اور جاذبہ ارض کی یہ تعریف کرتا ہے کہ یہ "[۲] وہ قوت ہے جو ایک جسم اپنے مزاحم پر لگاتا ہے تاکہ اپنے مقام پر واپس آجائے۔"

---

[۱] "Millions de matiers, qui sont disposees chacunes en leurs lieux."

[۲] 'la force qu'une matiere demonstre a son obstacle, pour retourner en son lieu."

× پس گیلیلو سے بیشتر قوت کے اثر کو یہ سمجھا جاتا تھا کہ وہ ایک جسم کو اس کے فطری مقام سے باہر رکھتی ہے۔ گیلیلو نے دیکھا کہ اجسام کے کوئی فطری مقامات نہیں ہیں بلکہ فطری حالتیں ہیں یعنی سکون کی یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی، اور قوت کا اثر کسی جسم کو اپنے فطری مقام سے حرکت دینے کا نہیں ہے بلکہ اس کی فطری حالت میں خلل انداز ہونے کا یعنی اس کی چال کو بدلنے کا۔ گیلیلو کا یہ انکشاف وہی ہے جو نیوٹن کے قانون اول سے ظاہر ہے۔

×۲ — یہ طے کرنے کے بعد کہ کسی جسم کی فطری حالت سے کیا مراد ہے اور نیز قوت سے کیا مراد ہے یعنی وہ جو فطری حالت کو بدلنے کا میلان رکھتی ہے ہم یہ دریافت کرینگے کہ وہ کونسا قانون ہے جو قوت کے پیدا کردہ اثر پر حکمران ہے۔ اگر ہمیں ایک قوت دی جائے تو یہ قوت ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی فطری حالت کو کس قدر بدلے گی۔ اس کا جواب قانون دوم میں ملے گا۔

✓ **قانون دوم۔ معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح قوت عاملہ کے متناسب ہوتی ہے اور اس خطِ مستقیم کی سمت میں واقع ہوتی ہے جسمیں قوت عمل کرتی ہے۔**

✓ پس قوت ایک خاص مقدار یعنے جسم کے معیار حرکت میں تبدیلی پیدا کرتی ہے اور یہ قوت اس معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح کے متناسب ہوتی ہے۔

✓ معیار حرکت سے مراد جسم کی رفتار اور اس کی کمیت کا حاصل ضرب ہے۔ کمیت مادے کی صرف وہ مقدار ہے جس سے جسم ترکیب پایا ہے اور اس لیے کمیت جسم کی حرکت پر منحصر نہیں ہوتی۔ پس

معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح = کمیت × رفتار کی تبدیلی کی شرح

= کمیت × اسراع،

✓ حسب تعریف اسراع۔ اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ قوت دو مقداروں کے حاصل ضرب کے

متناسب ہوتی ہے، ایک جسم کی کمیت اور دوسری اس کا اسراع۔

۲۱ ۔ کمیت کی پیمائش ۔ اگر ہم کسی جسم کو اپنے ہاتھ سے چھوڑدیں تو اس جسم پر بالعموم دو قوتیں عمل کریں گی ۔ ایک ہوا کی مزاحمت اور دوسری جسم کا وزن ۔ اگر ہم جسم کو خلا میں لٹکائیں اور یہ انتظام رکھیں کہ جسم کو جس لمحے پر ہم چاہیں چھوڑ سکیں تو ہوا کی مزاحمت سے نجات ملے گی اور جسم پر عمل کرنیوالی قوت صرف اس کا وزن ہوگا۔ اب اگر ہم کسی دو اجسام کو خلا میں ایک دوسرے کے برابر لٹکائیں اور ٹھیک ایک ہی لمحے پر انھیں چھوڑدیں تو معلوم ہوگا کہ وہ زمین کی جانب گرتے ہوئے پورے دقفے میں ایک دوسرے کے برابر رہتے ہیں۔ اس لیے کسی لمحہ پر ان کے اسراع برابر ہوتے ہیں۔

حرکت کے قانون دوم سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان اجسام پر عمل کرنیوالی قوتیں ان کی کمیتوں کے متناسب ہیں۔ یہ قوتیں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں اجسام کے صرف اوزان ہیں اور چونکہ یہ تجربی نتیجہ درست رہتا ہے خواہ اجسام کوئی ہوں اس لیے حسب ذیل عام قانون حاصل ہوتا ہے:۔

اجسام کی کمیتیں ان کے اوزان کے متناسب ہوتی ہیں۔

(۳۰) اس قانون سے ہم کسی دو جسموں کی کمیتوں کا مقابلہ کرسکتے ہیں۔ ہر ملک میں ایک خاص کمیت کو معیار کے طور پر منتخب کیا جاتا ہے اور کسی دوسرے جسم کی کمیت کا اس معیار سے یا اس کی نقل سے مقابلہ کیا جاتا ہے۔ اور اس طریقہ سے ہم کسی جسم کی حقیقی کمیت کا علم حاصل کرتے ہیں۔ مثلاً جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک جسم کی کمیت ن پاؤنڈ ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس کی کمیت (یا وزن) لندن میں رکھے ہوئے ایک خاص معیاری جسم کی کمیت (یا وزن) کا

ن گنا ہے۔

۲۲۔ قوت کی پیمائش ۔ ایک اکائی کمیت کا وزن وہ قوت ہے جسے ایک اکائی قوت کو تعبیر کرنے کے لیے اختیار کیا جا سکتا ہے اور ایسا کیا جائے تو تمام دیگر قوتوں کا مقابلہ اس قوت سے ہو سکتا ہے۔ مثلاً م پونڈ وزن کی قوت سے ایسی قوت مراد ہو گی جو معیاری پونڈ کے وزن سے م گنی بڑی ہے۔

قوت کی یہ اکائی علمی نہیں ہے بلکہ سہولت بخش ہے، علمی اس وجہ سے نہیں کہ وہ بدلتی ہے جبکہ کمیت کو زمین کی سطح پر مقام بمقام لے جایا جاتا ہے چنانچہ ایک پونڈ کی کمیت کا وزن لندن میں واشنگٹن کی بہ نسبت زیادہ ہو گا، اس لیے اگر ایک پونڈ کے وزن کو قوت کی اکائی متصور کیا جائے تو ہمیں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ قوت کی یہ اکائی زمین کی سطح کے مختلف مقامات پر مختلف ہو گی اور لندن میں م پونڈ وزن کی قوت واشنگٹن میں م پونڈ وزن کی قوت سے مختلف ہو گی۔ یہی وجہ ہے کہ علمی مقاصد کے لیے قوت کی ایک دوسری اکائی بالعموم استعمال کی جاتی ہے۔ اس کو قوت کی مطلق اکائی کہتے ہیں اور وہ ایسی منتخب کی جاتی ہے کہ اُس کا انحصار زمین کی سطح کے کسی مقام پر نہیں ہوتا۔ قوت کی اس دوسری اکائی کی تعریف یہ ہے کہ وہ اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے، برخلاف اس کے قوت کی قبل الذکر اکائی ایسا اسراع پیدا کرتی ہے جو اُس نقطہ پر جاذبۂ ارض کی قیمت کے مساوی ہوتا ہے۔ پس اگر جاذبہ ارض کی قیمت یعنے کسی جسم کا اسراع جبکہ جسم خلا میں آزادانہ گر رہا ہو ج ہو تو علمی اکائی، مطلق اکائی کا ج گنا ہے۔

اگر اکائی قوت، اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرے تو قوت ق، کمیت ک میں اسراع $\frac{ق}{ک}$ پیدا کرے گی۔ اس لیے اسراع کو

ع سے تعبیر کیا جائے تو حسب ذیل بنیادی مساوات حاصل ہو گی :

$$ق = ک ع \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

یہ مساوات نیوٹن کے قانون دوم کو ریاضی کی زبان میں ادا کرتی ہے۔ یہاں قوت ق کو مطلق اکائیوں میں پیمائش کرنا چاہیئے۔

۲۳۔ قانون سوم ۔ ہر عمل کے جواب میں ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے۔

یہ عام مشاہدہ کی بات ہے کہ کوئی جسم ا کسی دوسرے جسم ب پر قوت نہیں لگا سکتا تاآنکہ ب بھی اسی وقت ا پر قوت نہ لگائے۔ مثلاً جب کوئی پہلوان لوہے کے ایک بڑے گولے کو پھینکتا ہے تو اسے ہوشیار رہنا چاہیئے کہ کہیں گولہ اسے نہ گرادے، جب وہ گولے پر قوت لگاتا ہے تو اس کے ساتھ ہی گولہ اس پر قوت ڈالتا ہے اور اس لیے اسے چاہیئے کہ اس قوت کے اثرات کا مقابلہ کرنے کے لیے تیار رہے۔ اسی طرح جب بندوق گولی پر قوت ڈال کر اسے فائر کرتی ہے تو گولی بھی بندوق پر قوت لگاتی ہے جس کا اظہار بندوق کے پیچھے ہٹنے سے یا دھکہ دینے سے ہوتا ہے۔ پس تمام قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور انہیں بہ سہولت تمام عمل اور تعامل کہا جاسکتا ہے۔ حرکت کا قانون سوم یہ ظاہر کرتا ہے کہ ایسی کوئی دو قوتیں مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہوتی ہیں۔

قانون سوم کا مفہوم اس تعامل کا امتحان کرنے پر معلوم ہو گا جو ان قوتوں کے جواب میں ہیں جن کو ہم قبل ازیں تمثیلاً استعمال کر چکے ہیں پہلی مثال دو ریلوے ڈبوں کے درمیان ٹکر کی ہے۔ ڈبہ ا، ڈبہ ب سے ٹکراتا ہے جس کی وجہ سے ڈبہ ب پر قوت لگتی ہے اور وہ حرکت میں آتا ہے۔ قانون سوم سے معلوم ہوتا ہے کہ ٹکر کے لمحہ پر ب کو ا پر قوت لگانی چاہیئے، یہ قوت، مقدار میں اس قوت کے مساوی ہو گی جو ا، ب پر لگاتا ہے

لیکن وہ سمت میں مخالف ہو گی۔ تعامل کی یہ قوت صرف ٹکر کے لمحہ میں عمل کریگی اور اس قوت کا نتیجہ ا کی رفتار کی تبدیلی کی صورت میں ظاہر ہو گا چنانچہ یہ قوت یا تو ا کی حرکت کو صرف روک دے گی اور اس لیے ا ٹکر کے بعد تخفیف شدہ رفتار سے آگے بڑھے گا یا وہ ا کی حرکت کو الٹا دے گی اور اس لیے ا، ب سے ٹکرانے کے بعد جس سمت سے آیا تھا اسی سمت میں واپس ہو گا۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ جب ب حرکت میں آچکتا ہے تو اس پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں :۔

(ا) ہوا کی مزاحمت،

(ب) پٹڑیوں کی رگڑ،

(ج) پہیئے کے کوروں پر پٹڑیوں کا دباؤ، جو ڈبہ کو منحنی کے گرد موڑتا ہے۔

وہ تعامل جو پہلی قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ اپنے سامنے اور قریب کی ہوا پر لگاتا ہے جس کی وجہ سے یہ ہوا اُس سمت میں حرکت کرتی ہے جس میں ڈبہ متحرک ہے۔ فی الحقیقت یہی وہ قوت ہے جو اُس فضا سے ہوا کو خارج کرتی ہے جو کسی لمحہ پر ڈبہ اختیار کرتا ہے۔

(۳۲) وہ تعامل جو دوسری قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ کے ساتھ پٹڑیوں کو بھی کھینچ کر لیجانے کا میلان رکھتی ہے۔ لیکن پٹڑیاں چونکہ استوار طور پر نیچے جکڑی ہوئی ہوتی ہیں اس لیے یہ قوت عملاً کوئی حرکت پیدا نہیں کر سکتی۔

وہ تعامل جو تیسری قوت کے متناظر ہے وہ قوت ہے جو ڈبہ کے پہیئوں کی کوریں منحنی کی بیرونی پٹڑی پر لگاتی ہیں۔ پٹڑیاں ان کوروں کو اُس سمت میں دباتی ہیں جو منحنی کے مرکزی جانب ہے اور اس لیے یہ کوریں پٹڑیوں کو اس منحنی کے مرکز سے پرے اور بیرونی جانب دباتی ہیں۔ اگر پٹڑیاں اچھی طرح ثابت نہ کی گئی ہوں تو یہ دباؤ انھیں متذکرۂ بالا سمت میں متحرک کرے گا، پٹڑیاں "پھیل" جائیں گی اور ڈبہ

پٹڑیوں سے اُتر جائے گا۔

گولی کی مثال میں بھی گولی پر عمل کرنے والی تین قوتیں ہیں:

(ا) باروت کا دباؤ، گولی نالی سے نکلنے کے پیشتر،

(ب) ہوا کی مزاحمت، گولی کی پرواز کی اثناء میں،

(ج) گولی کا وزن جو اُسے نیچے وار زمین کی طرف کھینچتا ہے۔

وہ تعامل جو پہلی قوت کے متناظر ہے گولی کا وہ دباؤ ہے جو باروت کو پیچھے ڈھکیلتا ہے۔ یہ دباؤ اپنی باری پر بندوق پر منتقل ہوتا ہے جس سے بندوق کا دھکہ پیدا ہوتا ہے۔

دو تعامل جو دوسری قوت کے متناظر ہے ہوا کو حرکت میں لاتا ہے (جیسا کہ ہم ڈبہ کی صورت میں دیکھ چکے ہیں) اور گولی کے لیے راستہ بناتا ہے اور اس ہوا میں حرکت پیدا کرتا ہے جو گولی کی پرواز کا ساتھ دیتی ہے۔

وہ تعامل جو تیسری قوت یعنے گولی کے وزن کے متناظر ہے زیادہ دلچسپ ہے کیونکہ اس کے وجود کے متعلق کوئی راست شہادت حاصل نہیں ہو سکتی۔ ہم فطرت کی یکسانیت کے اصول سے ہی یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ چونکہ ہر اُس صورت میں جو کبھی آزمائی جا چکی ہے عمل کے ساتھ ہمیشہ ایک مساوی اور مخالف تعامل ہوتا ہے اس لیے اس صورت میں بھی جو مشابہ ہے لیکن اسے آزمایا نہیں جا سکتا ہم فرض کر سکتے ہیں کہ عمل کے ساتھ مساوی اور مخالف تعامل ہے۔

وہ قوت جس کا ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں گولی کا وزن ہے جو اُسے زمین کی جانب کھینچتا ہے۔ یہ قوت یقیناً اُس قوت کو تعبیر کرتی ہے جو زمین خود گولی پر لگاتی ہے یعنی قوت جاذبہ، اس قوت کے ساتھ اس کا تعامل ہونا چاہئے۔ اس لیے گولی زمین پر ایک ایسی قوت سے عمل کرنی چاہئے جو گولی کے وزن کے مساوی ہو، یہ قوت زمین کو اوپر وار گولی کی جانب کھینچے گی۔ گولی زمین پر جو قوت لگاتی ہے وہ قانون سوم کی رو سے عین اتنی ہی بڑی ہے جتنی زمین گولی پر لگاتی ہے۔ لیکن گولی کی وجہ سے زمین میں جو اوپر وار اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اُس نیچے وار اسراع سے بہت ہی کم ہے جو زمین گولی میں

پیدا کرتی ہے، کیونکہ قوت جس جسم پر عمل کرتی ہے اُس کی کمیت اور اسراع کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے اور چونکہ گولی کی کمیت کے مقابلہ میں زمین کی کمیت بہت بڑی ہے اس لیے زمین کا اسراع گولی کے اسراع کے مقابلہ میں بہت چھوٹا ہوگا۔

اگرچہ ان وجوہ کی بنا پر اُس اسراع کا راست مشاہدہ نہیں کیا جاسکتا جو زمین میں اِس کے اوپر متحرک گولی کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے تاہم بالکل اِسی کے مشابہ ایک صورت ہے جس میں اس کا راست مشاہدہ ہوسکتا ہے۔

(۳۳) چاند پر جو زمین کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جاذبہ ارض بالکل اُسی طریقہ سے عمل کرتا ہے جس طریقہ سے وہ گولی پر کرتا ہے۔ اگر چاند پر کوئی قوت عمل نہ کرتی تو وہ ایک خط مستقیم مرتسم کرتا، لیکن واقعہ یہ ہے کہ وہ مسلسل زمین کی جانب جاذبہ کی اُسی قوت سے کھنچتا ہے جو گولی کو کھینچتی ہے۔ پس بالکل اُسی طرح زمین میں بھی چاند کی جانب اسراع پیدا ہونا چاہئے۔ یہ اسراع ایسا ہے کہ اس کا مشاہدہ علم ہیئت کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے۔

اُن خیالات کا لحاظ کرتے جن کی تفہیم اوپر کی جاچکی ہے حرکت کے متذکرہ تین قوانین کو مکرر شکل ذیل میں بیان کیا جاسکتا ہے:

۱۔ کسی جسم کی طبعی حالت عدم اسراع کی ہوتی ہے۔ اِس طبعی حالت سے گریز قوت کے عمل سے پیدا ہوتا ہے۔

۲۔ جب کوئی قوت عمل کرکے ایک جسم کی طبعی حالت میں خلل ڈالتی ہے تو یہ قوت جسم کی کمیت اور پیدا شدہ اسراع کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے۔

۳۔ قوتیں جوڑوں میں واقع ہوتی ہیں، ہر عمل کے ساتھ ایک تعامل ہوتا ہے اور قوتوں کا ہر زوج مساوی اور مخالف ہوتا ہے

حوالے کا قریم

۲۵ — قوانین حرکت کے بیان کرنے میں ہم نے جسم کی حرکت کا ذکر حوالے کے اُس فریم کی تخصیص کئے بغیر کیا ہے جس کے لحاظ سے اس حرکت کی پیمائش ہونی چاہئے۔ بالعموم حرکت کی پیمائش عمل میں زمین کی سطح کے لحاظ سے کی جاتی ہے۔ نیوٹن کو یقین تھا کہ ایک ایسے حوالے کے فریم کا تصور کرنا جو فضاء میں فی الواقعی ثابت ہو ممکن ہے، وہ تمام حرکت کو اس فریم کے لحاظ سے پیمائش کرنے کا مشورہ دیتا ہے۔ چنانچہ نیوٹن کے قوانین حرکت کا اطلاق اُس حرکت پر ہوتا ہے جو فضاء کے ثابت محوروں کے حوالے سے پیمائش کی گئی ہو حالانکہ تمام مسئلوں میں اِلّا اُن مسئلوں کے جو علم ہیئت سے متعلق ہیں ہمیں اُن قوانین حرکت کے جاننے کی ضرورت ہے جو زمین کے ساتھ حرکت کرنے والے محوروں کے حوالے سے بیان کئے گئے ہوں۔

اول ہم یہ معلوم کریں گے کہ حرکت کو اُن محوروں کے ایک جٹ کے حوالہ سے بیان کرنے کا کیا اثر ہوگا جو فضاء میں یکساں رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کر رہے ہیں۔ ایک جسم جو کسی قوتوں کے زیرِ عمل نہ ہو فضاء میں کوئی اسراع نہیں رکھیگا اور اس لیے وہ متحرک محوروں کے لحاظ سے کوئی اسراع نہیں رکھیگا کیونکہ خود محاور فضاء میں اسراع نہیں رکھتے۔ نیز کسی اسراع کی وہی قیمت ہوگی خواہ اُس کا حوالہ فضاء کے ثابت محوروں سے دیا جائے یا متحرک محوروں سے، کیونکہ وہ اسراع جو متحرک محوروں کے حوالے سے پیمائش کیا گیا ہو حاصل ہوگا اگر ہم فضاء کے ثابت محوروں کے حوالے سے حاصل شدہ اسراع کو فضاء کے متحرک محوروں کے حوالے سے حاصل شدہ اسراع کے ساتھ مرکب کریں لیکن یہ آخری اسراع صفر ہے۔ (۳۴)

پس یہ معلوم ہوا کہ قوانین حرکت ٹھیک وہی شکل رکھتے ہیں جبکہ حرکت اُن محوروں کے حوالے سے بیان کی گئی ہو جو فضاء میں

حرکت کرتے ہیں بشرطیکہ یہ محور عدم اسراع کے ساتھ حرکت کریں ۔

عدم اسراع کی یہ شرط اُن محوروں کے جٹ سے پوری نہیں ہوتی جو زمین کی سطح میں ثابت ہوں ۔ زمین کی سطح کا کوئی نقطہ زمین کی گردش کی وجہ سے اس کے محور کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے ۔ اگر اس دائرہ کا نصف قطر ا ہو اور و وہ رفتار ہو جس سے یہ دائرہ مرتسم ہوا ہے تو نقطہ کا اسراع زمین کے محور کی جانب حسب دفعہ ۱۲ $\frac{و^{۲}}{ا}$ ہوگا۔ اس لیے محوروں کے کسی جٹ کا اسراع جو زمین کی سطح میں ثابت ہوں $\frac{و^{۲}}{ا}$ ہوگا اور قوانین حرکت کے اطلاق میں اس کا خیال رکھنا ہوگا۔ خط استواء کے کسی نقطہ پر و = ۴۶۵۱۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ اور ا = ۶۳۷×۱۰^{۶} سینٹی میٹر، اس لیے اسراع = $\frac{و^{۲}}{ا}$ = ۳،۴ سینٹی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ

اگر کسی جسم کو خط استواء پر گرایا جائے تو اس کا اسراع ۹۷۸،۱ سینٹی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ معلوم ہوگا جبکہ حرکت کا حوالہ زمین کے ثابت محوروں سے دیا جائے، لیکن اس کے اصلی اسراع کی مقدار

$$۹۷۸،۱ + ۳،۴ = ۹۸۱،۵$$

ہوگی جبکہ حرکت کا حوالہ فضاء کے ثابت محوروں سے دیا جائے ۔

اس سے اُس علت کے ایک جزو کی صراحت ہوتی ہے کہ کیوں جاذبہ ارض زمین کی سطح پر نقطہ بہ نقطہ متغیر نظر آتا ہے ۔ ایک کیلوگرام کی کمیت کا وزن قطب شمالی پر پیچ دار ترازو کے پیچ کو ایک خاص طول تک کھینچیگا ۔ اگر اس ترازو کو خط استواء پر منتقل کیا جائے تو وزن کا ایک حصہ، زمین کے مرکز کی جانب کمیت کا جو اسراع ہے اُس کے پیدا کرنے میں صرف ہوگا اور صرف بقیہ حصہ ہی پیچ کو کھینچنے میں کام آئے گا۔ پہلا حصہ تقریباً $۳\frac{۱}{۲}$ گرام کا وزن ہے

اور دوسرا تقریباً ½ ۹۹۶ گرام کا وزن۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ زمین کے مرکز کی جانب زمین کی سطح کا جو اسراع ہے اس کی وجہ سے خط استوا پر ایک کیلو گرام کی کمیت پیچ دار ترازو پر ایک ایسی قوت سے عمل کرتی معلوم ہو گی جو صرف ½ ۹۹۶ گرام پر زمین کی کشش کے مساوی ہو گی۔

حرکت کا حوالہ زمین کی سطح پر کے محوروں کے ذریعہ دینے میں خطاؤں کا ایک اور حصہ داخل ہوگا، یہ خطائیں محوروں کی سمتوں میں تبدیلی ہونے سے پیدا ہوتی ہیں۔ مثلاً اگر ہم قوانین حرکت کو استعمال کریں یہ فرض کر کے کہ وہ زمین کی سطح کے ثابت محوروں کے حوالہ سے درست ہیں اور ان کا اطلاق ایک پتھر کے گرنے پر کریں تو ہم دیکھیں گے کہ پتھر زمین کی سطح کے ایک ایسے نقطہ پر لگنا چاہئے جو انتصاباً اُس نقطے کے نیچے ہے جس سے وہ گرایا گیا ہے۔ اگر ہم زمین کی گردش کی رعایت رکھیں تو معلوم ہوگا کہ وہ نقطہ جس پر پتھر فی الواقعی ضرب لگاتا ہے اُس نقطہ کے کچھ مشرق میں ہونا چاہئے جو انتصاباً اُس نقطے کے نیچے ہے جہاں سے وہ چلا تھا۔

اگر زمین پر کی حرکت کو وہ حرکت سمجھ کر استعمال کیا جائے جو فضا کے ثابت محوروں کے حوالے سے پیمائش کی گئی ہو تو اس کی وجہ سے جو خطائیں داخل ہوں گی وہ بالعموم یا تو بہت ہی چھوٹی ہوتی ہیں یا بہت آسانی سے درست کی جا سکتی ہیں۔ اس لیے ہم ایسی خطاؤں کو فی الحال بالکل نظر انداز کر کے آگے بڑھیں گے اور حرکت پر قوانین حرکت کا اطلاق زمین کی سطح کے حوالے سے کریں گے۔

قوانین حرکت صرف ایک ذرہ کی حرکت پر اطلاق پذیر ہیں

۲۶ — قوانین نیوٹن کی تکمیل میں ایک اور قید ہے جسے یہاں سمجھ لینا

چاہیئے ۔ قانون دوم سے شاید ہم یہ فرض کرلیں کہ کسی جسم پر عمل کرنے والی قوت اور جسم کی کمیت کا علم ہو جانے سے ہم جسم کا ایک معین اسراع اخذ کر سکتے ہیں ۔ اگر جسم محدود جثے کا ہے تو اس کے مختلف نقطوں پر اسراع مختلف ہوگا ، مثلاً ہم دیکھ چکے ہیں کہ زمین کی گردش کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ خط استوا پر کے ایک نقطہ کا اسراع قطب شمالی پر کے ایک نقطہ کے اسراع سے مختلف ہوتا ہے ۔ پھر وہ کونسا اسراع ہے جو قانون دوم سے متعین ہوتا ہے ؟

اس مشکل کا جواب یہ ہے کہ قانون دوم کو صرف ذرات پر یعنے مادے کے اس قدر چھوٹے ٹکڑوں پر اطلاق پذیر سمجھنا چاہیئے جنہیں نقطے سمجھا جا سکتا ہے ۔ ایک متحرک ذرہ کا ایک واحد معین اسراع ہوگا عین ایسے ہی جیسے ایک متحرک نقطہ کا ہوتا ہے ۔ اس قانون کو (۳۶) ذروں پر استعمال کرکے ہم وہ قوانین اخذ کرسکیں گے جو محدود جثے کے اجسام پر اطلاق پذیر ہیں ۔ اس مسئلہ پر کسی آئندہ باب میں بحث کی جائے گی ۔ لیکن جہاں یہ ظاہر ہے کہ اس قانون کو سختی کے ساتھ ذروں پر استعمال کرنا چاہیئے وہاں یہ بھی ظاہر ہے کہ بہت سے ایسے مسئلے ہو سکتے ہیں جس میں ہم محدود جثوں کے اجسام کو ذروں کے طور پر استعمال کرسکتے ہیں اور اس سے کوئی قابل قدر خطا پیدا نہیں ہو گی ایسی صورت پیدا ہوئی تھی جب ہم نے دفعہ ۱۸ میں بندوق کی گولی پر بحث کی تھی ، گولی کے جثے کی بحث اثنائے سوال میں پیدا ہی نہیں ہوئی کیونکہ ہم گولی کے تمام نقطوں کا ایک ہی اسراع تصور کرسکتے ہیں ۔ اسی طرح بہت سی صورتیں وقوع پذیر ہونگی جن میں ہم محدود جثے کے جسم کو اس طرح استعمال کریں گے گویا کہ وہ ایک ذرہ ہے ۔ آئندہ باب میں ذروں پر اور ان اجسام پر قوتوں کے عمل سے بحث کی جائے گی جن کو ہم ذروں کے طور پر استعمال کر سکتے ہیں ۔

(۳۷)

تیسرا باب

واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں

قوتوں کی ترکیب اور تحلیل

۲۷ — حرکت کے قانون دوم سے ہم وہ اسراع معلوم کرسکتے ہیں جو پیدا ہوتا ہے جبکہ معلومہ کمیت کے ایک ذرہ پر ایک معلومہ قوت عمل کرتی ہے۔

مثلاً بندوق کی گولی کی پرواز پر غور کرو جو دفعہ ۱۸ میں زیر بحث آچکی ہے۔ جب تک گولی ہوا میں رہتی ہے اُس پر دو قوتیں ایک ساتھ عمل کرتی ہیں، ایک گولی کا وزن اور دوسری ہوا کی مزاحمت۔ ان کے علاوہ باد مخالف چل سکتی ہے جو گولی پر ایک افقی دباؤ اُس کی حرکت کی عمود وار سمت میں ڈالے گی۔ ہوا کی مزاحمت گولی کی حرکت میں ایسا پیدا کرتی ہے یعنی اُس سمت کے خلاف اسراع پیدا کرتی ہے جس میں گولی حرکت کررہی ہے۔ گولی کا وزن اُسے نیچے کھینچتا ہے یعنی زمین کی جانب اسراع پیدا کرتا ہے۔ باد مخالف گولی کو اُس کے راستہ سے ہٹا دے گی یعنی اُس سمت میں اسراع پیدا کرے گی جس میں وہ چل رہی ہے۔ پس ہم ان تین قوتوں کے متعلق یہ سمجھ سکتے ہیں کہ ہر ایک اپنا اپنا اسراع پیدا کررہی ہے۔ یہ تین اسراع حرکت کے قانون دوم سے جدا جدا محسوب ہوسکتے ہیں اور پھر ان تین

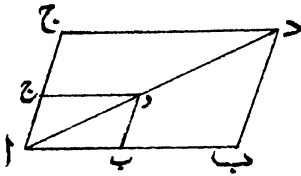
اسراعوں کو مرکب کر کے ہم گولی کا حاصل اسراع معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ حاصل اسراع ایک خاص واحد قوت سے پیدا کیا جا سکتا تھا اور اسلئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ واحد قوت، اسراع پیدا شدہ کا لحاظ کرتے تذکرہ بالا تین مختلف قوتوں کے اجتماع کے معادل ہے یعنے یہ واحد قوت اِن تین مختلف قوتوں کا **حاصل** ہے۔ اب ہم اِن خیالات کو ریاضی کی ٹھیک شکل میں بیان کریں گے۔ اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ قوت، مقدار اور سمت دونوں رکھتی ہے اور اس لیے اِس کو ایک خط مستقیم سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ ہم ثابت کریں گے کہ قوتوں کو متوازی الاضلاع کے قانون کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔ (۳۸) اِس کو ثابت کر دینے کے بعد یہ نتیجہ نکلیگا کہ قوتیں سمتیاں ہیں اور انھیں اُن عام قاعدوں کی بموجب تحلیل اور مرکب کیا جا سکتا ہے جو بیان کئے جا چکے ہیں۔

۲۸ ۔ قوتوں کا متوازی الاضلاع مسئلہ۔ اگر دو قوتیں مقدار اور سمت میں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے تعبیر ہوں تو انکا حاصل اِس متوازی الاضلاع کے وتر سے تعبیر ہوگا۔

فرض کرو کہ یہ دو قوتیں، اب اور اج سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ اب، اج سے وہ اسراع تعبیر ہوتے ہیں جو پیدا ہوتے اگر وہ کسی ذرہ پر جداگانہ عمل کرتیں۔ چونکہ حرکت کے قانون دوم کی رو سے اسراع قوت کے متناسب ہوتا ہے اس لیے

اب : اج = اب : اج

متوازی الاضلاع اب ج د اور اب ج د بناؤ۔

اُس تناسب کی وجہ سے جو اوپر ابھی حاصل ہو چکا ہے یہ دو متوازی الاضلاع متشابہ ہوں گے اور اِس لیے اد ایک خط مستقیم

ہوگا اور حاصل ہوگا

ا د : ا د = ا ب : ا ب

لیکن ا د جو کنا روں ا ب، ا ج کے متوازی الاضلاع کا وتر ہے حاصل اسراع کو تعبیر کرتا ہے۔ اب چونکہ ا ب اُس قوت کو تعبیر

شکل (۱۵)

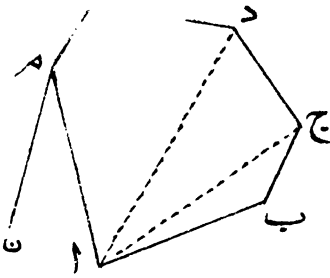
کرتا ہے جو اسراع ا ب پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے اس لیے محصلہ بالا تناسب سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا د، اُس قوت کو تعبیر کرے گا جو اسراع ا د پیدا کرنے کے لیے ضروری ہے۔ بہ الفاظ دیگر ذرہ کا اسراع وہی ہے جو ہوتا اگر اس پر ایک واحد قوت جو ا د سے تعبیر ہوتی ہے عمل کرتی۔ اس لیے قوتوں ا ب، ا ج کے حاصل کو ا د تعبیر کرتا ہے۔

اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوت ایک سمتی ہے اور اس لیے قوتیں اُن قوانین کی بموجب جو دفعات ۱۴ تا ۱۶ میں بیان کئے جا چکے ہیں مرکب کیجا سکتی ہیں۔

ذرہ توازن میں

۲۹ ۔ سکونیات میں ہمیں صرف ساکن ذرات یا ساکن ذرات کے نظامات سے بحث کرنی ہوتی ہے۔ اس لیے ہر ذرہ پر حاصل قوت صفر ہونی چاہیئے۔ اس لیے اُن صورتوں پر غور کرنا اہم ہے جن میں قوتوں کے کسی نظام کا حاصل صفر ہوا کرتا ہے۔

(۳۹) **۳۰** ۔ **قوتوں کا کثیر الاضلاع مسئلہ**۔ اگر ایک ذرہ پر عمل کرنیوالی قوتیں خطوط مستقیم سے تعبیر کیگئی ہوں تو یہ قوتیں توازن میں ہونگی اگر وہ کثیر الاضلاع جو ان تمام

خطوط مستقیم کو کناروں کے طور پر لینے سے بنے ایک بند کثیر الاضلاع ہو یعنی اگر ان تمام خطوط مستقیم کو سرا بہ سرا رکھنے کے بعد ہم ابتدائی نقطہ پر واپس لوٹ آئیں۔

فرض کرو کہ قوتوں کی کوئی تعداد جو ایک ساتھ ایک ذرہ پر عمل کرتی ہیں خطوط مستقیم ا ب، ب ج، ج د، ... م ن سے تعبیر کی گئی ہیں۔ چونکہ قوت ایک سمتی ہے اسلیے وہ قوتیں جو ا ب اور ب ج سے تعبیر ہوتی ہیں ایک واحد قوت کے مماثل ہیں جو ا ج سے تعبیر ہوتی ہے اور اسلیئے ان دو قوتوں کی بجائے یہ قوت رکھی جا سکتی ہے۔

شکل (۱۶)

اس لیے قوتوں کا دیا ہوا نظام اب اُن قوتوں کا نظام سمجھا جا سکتا ہے جو خطوط مستقیم ا ج، ج د، ..... م ن سے تعبیر ہوتی ہیں۔ پھر ان میں سے پہلی دو قوتوں کی بجائے ایک واحد قوت جو ا د سے تعبیر ہوتی ہے رکھی جا سکتی ہے اور قوتوں کا دیا ہوا نظام اُن قوتوں میں تحویل ہوتا ہے جو ا د، د ع، ... م ن سے تعبیر ہوتی ہیں۔ اس طرح ہم اس عمل کو جاری رکھ سکتے ہیں تا آنکہ ہم اُس واحد قوت پر پہنچ جائیں جو ا ن سے تعبیر ہوتی ہے۔ اس لیے یہ قوت تمام قوتوں کے حاصل کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر کثیر الاضلاع ایک بند کثیر الاضلاع ہے تو نقطے ا اور ن منطبق ہوں گے اور اس لیے حاصل قوت جو ا ن سے تعبیر ہوتی ہے معدوم ہو گی اور ذرہ توازن میں ہو گا۔ اس کے برعکس اگر ذرہ توازن میں ہو تو ا ن معدوم ہو گا اور اس لیے کثیر الاضلاع ایک بند کثیر الاضلاع ہو گا۔

پس توازن کی وہ شرط جو ثابت شدہ مسئلہ میں مندرج ہے ضروری اور کافی ہے۔ ضروری اس وجہ سے کہ یہ شرط پوری

ہونی چاہیے اگر ذرہ کو توازن میں ہونا ہے اور کافی اس وجہ سے کہ توازن کا یقین ہو جاتا ہے جوں ہی یہ شرط پوری ہو جاتی ہے۔

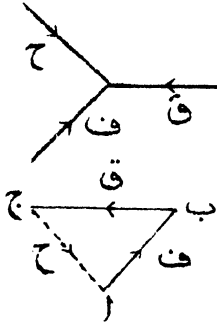
۳۱ ــ قوتوں کا مثلث ــ اگر صرف تین قوتیں ہوں تو مسئلہ بالا ایک سادہ تر مسئلہ میں تحویل ہوتا ہے، یہ مسئلہ **قوتوں کے مثلث** کے طور پر مشہور ہے اور حسب ذیل ہے:

مسئلہ ــ اگر ایک ذرہ پر تین قوتیں جو خطوط مستقیم سے تعبیر کیگئی ہوں عمل کریں تو ذرہ توازن میں ہوگا اگر یہ تین خطوط مستقیم ایک مثلث کے اضلاع بنیں جبکہ انہیں سرا بہ سرا رکھا جائے۔

یہ مسئلہ چونکہ **قوتوں کے کثیر الاضلاع** کی ایک مخصوص صورت ہے اس لیے کسی جداگانہ ثبوت کی ضرورت نہیں ہے ــ حسب سابق اس کا عکس بھی درست ہے، اس لیے مسئلہ میں بیان کی ہوئی شرط توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے۔

جب صرف تین قوتیں عمل کر رہی ہوں تو توازن کی شرط کو اس سے بھی زیادہ سادہ شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

۳۲ ــ لامی کا مسئلہ ــ **جب ایک ذرہ تین قوتوں کے زیر عمل ہو تو توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ یہ تین قوتیں ایک مستوی میں ہوں اور ہر ایک قوت اُس زاویہ کی جیب کے متناسب ہو جو دوسری دو قوتوں کے درمیان ہے۔**

فرض کرو کہ ایک ذرہ تین قوتوں ف، ق، ح کے زیر عمل ہے۔

توازن کے لیے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہم تین خطوں کو جو مقدار اور سمت میں قوتوں ف، ق، ح کو تعبیر کریں سرا بہ سرا رکھکر ایک مثلث بنا سکیں۔

شکل (۱۷)

فرض کرو کہ اب، قوت ف کو تعبیر کرتا ہے۔ اس کے سرے ب پر ایک خط ب ج جو قوت ق کو تعبیر کرے لگاؤ۔ اِس لیے ج ا سے قوت ح تعبیر ہونی چاہئے اگر توازن کی شرطوں کو پورا ہونا ہے۔ اِس لیے یہ تین قوتیں ایک مستوی میں ہونی چاہئیں یعنے اُس مستوی میں جو قوتوں کے نقطہ عمل میں سے گذرے اور اب ج کے متوازی ہو۔

مان لو کہ توازن ہے تو تین قوتیں مثلث اب ج کے اضلاع سے تعبیر ہوں گی۔ فرض کرو کہ اِس مثلث کے اضلاع حسب معمول ا، ب، ج سے اور زاوئے ا، ب، ج سے تعبیر کئے گئے ہیں۔ تب مثلث کی ایک معلومہ خاصیت کی رو سے

$$\frac{ا}{جب\ ا} = \frac{ب}{جب\ ب} = \frac{ج}{جب\ ج}\ .$$

لیکن ہمارے عمل کی بموجب ا، ب، ج، قوتوں کی مقداروں کے متناسب ہیں، اس لیے

$$\frac{ج}{ف} = \frac{ب}{ح} = \frac{ا}{ق}$$

اس لیے

$$\frac{ف}{جب\ ج} = \frac{ق}{جب\ ا} = \frac{ح}{جب\ ب}$$

(۴۱) اگر (ف ق) سے وہ زاویہ تعبیر کیا جائے جو قوتوں ف اور ق کے خطوط عمل کے درمیان ہے تو (ف ق) = π - ب، اِس لیے جب ب = جب (ف ق) اور اس لیے

$$\frac{\text{ف}}{\text{جب (ق ح)}} = \frac{\text{ق}}{\text{جب (ح ف)}} = \frac{\text{ح}}{\text{جب (ف ق)}} \quad \text{....(۱۱)}$$

اِس مسئلہ کا عکس درست ہے کیونکہ اگر ربط (۱۱) پورا ہو اور اگر قوتوں کے خطوط عمل ایک مستوی میں ہوں تو ہم ایک مثلث بنا سکتے ہیں جس کے اضلاع قوتوں ف، ق، ح کو تعبیر کرینگے اور اس لیے توازن ہوگا۔

۳۳۔ توازن کے لیے تحلیلی شرطیں۔ اگر توازن کی شرطوں کو تحلیلی شکل میں بیان کیا جائے تو توازن کی شرط یہ ہے کہ تمام عاملہ قوتوں کا حاصل صفر ہونا چاہئے۔ اگر قوتیں انفرادی طور پر معلوم ہوں تو حاصل قوت سمیتوں کو مرکب کرنے کے قاعدوں سے جو دفعات ۱۴ تا ۱۶ میں بیان ہو چکے ہیں فوراً معلوم کی جا سکتی ہے۔

اگر قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں عمل کرتی ہیں تو فرض کرو کہ اِن کی مقداریں ح_1، ح_2، ....، ح_n ہیں اور فرض کرو کہ اِن کے خطوط عمل محور لا کے ساتھ زاوئے ص_1، ص_2، ....، ص_n بناتے ہیں۔ تب حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہوں گے جہاں (دیکھو دفعہ ۱۴)

$$\text{لا} = \text{ح}_1 \text{ جم ص}_1 + \text{ح}_2 \text{ جم ص}_2 + \ldots\ldots$$

$$\text{ما} = \text{ح}_1 \text{ جب ص}_1 + \text{ح}_2 \text{ جب ص}_2 + \ldots\ldots$$

حاصل کی مقدار $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ ہے اور وہ معدوم ہوگا صرف اگر لا اور ما جداگانہ معدوم ہوں۔ اس لیے توازن کے لیے شرط یہ ہے کہ

محوروں کے متوازی یہ اجزائے ترکیبی جداگانہ معدوم ہوں یعنی عمل کرنیوالی مختلف قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو جبکہ انہیں ہر ایک محور کے متوازی تحلیل کیا گیا ہو۔

اسی طرح جب قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں عمل نہیں کرتیں تو توازن کے لیے یہ شرط ہے کہ فضا کے تین محوروں کی سمتوں میں اِن قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعے جدا جدا معدوم ہوں۔

مثالیں

۱۔ ۲ اور ۸ پونڈ وزن کی دو قوتیں دو سمتوں میں جو علی القوائم ہیں عمل کرتی ہیں۔ اِن کے حاصل کی مقدار معلوم کرو۔ (۴۲)

۲۔ تین قوتیں ہر ایک ف کے مساوی تین قائم محوروں پر عمل کرتی ہیں۔ اِن کا حاصل معلوم کرو۔

۳۔ دو قوتوں ف۱ اور ف۲ کا حاصل جہاں قوتیں علی القوائم عمل کررہی ہیں ح ہے۔ اگر ف۱ اور ف۲ میں سے ہر ایک میں ۳ پونڈ کا اضافہ کیا جائے تو ح میں ۴ پونڈ کا اضافہ ہوتا ہے اور اب وہ ف۱ اور ف۲ کی ابتدائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ ف۱ اور ف۲ کو معلوم کرو۔

۴۔ ایک نقطہ و پر عمل کرنے والی قوتیں و ا، و ب، و ج.. ... و ن سے تعبیر کی گئی ہیں۔ اگر یہ قوتیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ نقطوں ا، ب، ج، ....، ن کا مرکز ہندسی و ہے۔

۵۔ ا ب ج د ع ف ایک منتظم مسدس ہے۔ اُن قوتوں کا حاصل معلوم کرو جو ا ب، ا ج، ا د، ا ع، ا ف سے تعبیر ہوتی ہیں۔

۶۔ ا ب ج د ع ف ایک منتظم مسدس ہے۔ ثابت کرو کہ اُن قوتوں کا حاصل جو ا ب، ۲ ا ج، ۳ ا د، ۴ ا ع، ۵ ا ف سے تعبیر ہوتی ہیں $\sqrt{351} \times$ ا ب سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس حاصل کی سمت معلوم کرو۔

۷۔ ا ب ج ایک مثلث ہے اور ب ج میں کوئی نقطہ ن ہے۔ اگر ن ق، اُن قوتوں کے حاصل کو تعبیر کرے جو ا ن، ن ب، ب ج سے تعبیر ہوتی ہیں تو ثابت کرو کہ ق کا طریق، ب ج کے متوازی ایک خط مستقیم ہے۔

قوتوں کے نمونے

ذرہ کا وزن

۳۴۔ کسی ذرہ کا وزن ہمیشہ انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے، کیونکہ زمین کی سطح پر کے کسی دئے ہوئے مقام پر یہ معلوم ہوا ہے کہ تمام ذروں کے وزن متوازی سمتوں میں عمل کرتے ہیں اور یہ سمت زیر بحث مقام پر انتصابی کہلاتی ہے۔ وزن وہ تجاذبی قوت ہے جس سے زمین ذرہ کو کھینچتی ہے بجز ایک چھوٹی تصحیح کے جو اِس واقعہ کی وجہ سے عائد کرنی ہوگی کہ وہ محور جو زمین میں ثابت ہیں بغیر اسراع کے حرکت نہیں کرتے۔ اِس تصحیح پر ہم یہاں بحث نہیں کریں گے۔ جب کسی جسم کے وزن کو و کہا جاتا ہے تو اِس کا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اِس جسم کو زمین کی سطح کے لحاظ سے ساکن رکھنے کے لیے ایک قوت ق کی ضرورت ہے جو انتصاباً اوپر وار عمل کرے۔

ڈوری کا تناؤ

۳۵۔ کسی جسم پر قوت لگانے کا ایک آسان ذریعہ ڈوری یا رسی ہے اور اِس قوت کو ڈوری کا تناؤ کہتے ہیں۔ فرض کرو کہ ا ب ج د.....، ڈوری ہے اور فرض کرو کہ اِس کے سرے پر ایک ذرہ ف بندھا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے حصے ا ب، ب ج،..... اِس قدر چھوٹے ہیں کہ ہر ایک کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔

شکل (۱۸)

ڈوری کے کسی ذرہ مثلاً ب ج پر تین قوتیں عمل کریں گی،

(۱) اس کا وزن (۲) وہ قوت جو ڈوری کا ذرہ ج د، ذرہ ب ج پر لگاتا ہے اور (۳) وہ قوت جو ذرہ ا ب، ب ج پر لگاتا ہے۔

(۴۳) بالعموم کسی ڈوری کا وزن بمقابلہ دوسرے اوزان کے جو مسئلہ میں شامل ہوتے ہیں بہت خفیف ہوتا ہے۔ اِس لیے سہولت اِس میں ہے کہ ڈوری کو ایسی سمجھیں کہ وہ وزن رکھتی ہی نہیں۔ اس صورت میں ذرہ ا ب پر صرف دو قوتیں عمل کرتی ہیں اور اس لیے توازن کے لیے یہ قوتیں مساوی اور مخالف ہونی چاہئیں۔

۳۶ — ملائمت۔ ڈوری کو ہم کامل طور پر ملائم اس وقت کہینگے جبکہ وہ قوت جو ایک ذرہ دوسرے متصلہ ذرہ پر لگاتا ہے اِن دو ذروں کو ملانے والی سمت میں ہو۔ مثلاً اگر زیر بحث ذرہ کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ہو تو ذرہ ب ج پر عمل کرنے والی قوتیں سمتوں ف ق، ق ر میں ہونگی۔ ب ج کو توازن میں رکھنے کے لیے یہ قوتیں مقدار میں مساوی ہونی چاہئیں۔ فرض کرو کہ ہر ایک کی مقدار ت ہے۔ نیز یہ دو قوتیں مخالف سمتوں میں ہونی چاہئیں، اس لیے ف ق ر کو ایک خط مستقیم ہونا چاہئے۔

چونکہ تیسرے قانون کی رُو سے عمل اور تعامل مساوی اور مخالف ہوتے ہیں، اِس لیے وہ قوت بھی جو ب ج، ج د پر لگاتا ہے سمت ق ر میں ت ہونی چاہئے۔ یہ پھر توازن کے لیے اُس قوت کے مساوی ہونی چاہئے جو د ع، ج د پر لگاتا ہے۔ اس لیے یہ قوت مقدار ت کی ہونی چاہئے اور ق ر س ایک خط مستقیم ہونا چاہئے۔

ہم اس استدلال کو جاری رکھ کر یہ معلوم کرتے ہیں کہ تمام ذرے ایک خط مستقیم ف ق ر س .... میں واقع ہونے چاہئیں اور یہ کہ ہر ذرہ دوسرے متصلہ ذرہ پر ایک ہی قوت ت کے ساتھ ڈوری کی سمت میں عمل کرتا ہے۔ قوت ت کو تناؤ کہتے ہیں۔ پس ڈوری کے کسی نقطہ ف پر تناؤ وہ قوت ہے جس سے ڈوری کا وہ ذرہ جو ف کی ایک جانب ہے اُس ذرہ پر جو ف کی دوسری جانب ہے عمل کرتا ہے۔

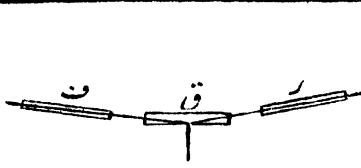
کسی کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ڈوری کے ہر نقطہ پر تناؤ مقدار اور سمت میں وہی ہوتا ہے جبکہ ڈوری بیرونی قوتوں کے زیر عمل نہ ہو۔

اِس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

ایک کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ڈوری جبکہ اُس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں ایک خط مستقیم میں ہونی چاہئے جبکہ وہ توازن میں ہو۔

اگر تناؤ معدوم ہو تو خواہ طول ف ق، ق ر، .... کے عناصر کی سمتیں کچھ ہی ہوں توازن ہوگا۔ جب تناؤ معدوم ہوتا ہے تو ڈوری کو غیر تنی ہوئی کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ غیر تنی ہوئی ڈوری کسی شکل میں بہ حالت توازن ساکن رہ سکتی ہے۔

(۴۴) آیندہ ثابت کیا جائیگا کہ جب ایک کامل طور پر ملائم اور غیر وزنی ڈوری ایک چکنی کھونٹی یا چرخی پر سے گذرتی ہے تو تناؤ کی مقدار ڈوری کے تمام نقطوں پر ایک ہی ہوتی ہے اور کھونٹی یا چرخی کے نقاط تماس پر اس کی سمت کھونٹی یا چرخی کے مماس کی سمت ہوتی ہے

۳۷ — اگر ڈوری مطلقاً غیر وزنی نہ ہو بلکہ بہت ہلکی ہو تو اس کے کسی ذرہ پر مثلاً ق پر تین قوتیں عمل کریں گی — اس کا وزن انتصاباً نیچے اور وہ دو قوتیں جن سے متصلہ ذرے سمتوں ف ق، ر ق میں عمل کرتے ہیں۔ لامی کے

مسئلہ سے ہر قوت اُس زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئیے جو باقی دو قوتوں کے درمیان ہے۔ چونکہ وزن چھوٹا ہے اس لیے جب ف ق ر کو چھوٹا ہونا چاہئیے یعنے ف ق ر کو قریب قریب ایک خط مستقیم ہونا چاہئیے۔ تاہم یہ

شکل (۱۹)

خط کا ملا سیدھا نہیں ہو سکتا الا آنکہ ڈوری مطلقاً بے وزن ہو۔ اس لیے کسی حقیقی ڈوری میں اس کے وزن کی وجہ سے کچھ نہ کچھ "جھوک" ہوگا، اگرچہ یہ جھوک اس قدر خفیف ہو سکتا ہے کہ اس کی شناخت نہ ہو سکے۔

۳۸ ـــ امتداد پذیر اور نا امتداد پذیر ڈوریاں ـ تناؤ جیسا کہ معلوم ہو چکا ہوگا ایک قوت ہے جو ڈوری کے ہر نقطہ پر عمل کرتی ہے اور ڈوری کو اس کے طول کی سمت میں وسیع کرنے کا میلان رکھتی ہے۔ ہو سکتا ہے کہ ڈوری وسیع کرنے کے اس میلان کو قبول کرے یا نہ کرے۔ وہ ڈوری جو تناؤ کے تحت وسیع ہوتی ہے امتداد پذیر کہلاتی ہے اور وہ ڈوری جو بالکل وسیع نہیں ہوتی یا ہوتی بھی ہے تو اس قدر کم کہ توسیع کی مقدار ناقابل قدر ہے نا امتداد پذیر کہلاتی ہے۔

اس لئے کوئی نا امتداد ڈوری ایک ہی طول کی رہتی ہے خواہ کچھ ہی تناؤ اُس پر عمل کرے، برخلاف اس کے کسی امتداد پذیر ڈوری کا طول اسکے تناؤ پر منحصر ہوتا ہے۔

۱۶۶۰ء میں ہُک نے ایک قانون دریافت کیا تھا جس سے وہ ربط معلوم ہوتا ہے جو ایک ڈوری کے تناؤ اور اس کی توسیع کی مقدار کے درمیان پایا جاتا ہے؛ تناؤ توسیع کی مقدار کے متناسب ہوتا ہے۔

تعریف ـ کسی ڈوری کا وہ طول جبکہ تناؤ صفر ہو ڈوری کا

"فطری طول" کہلاتا ہے۔

تعریف۔ ایک وسیع شدہ ڈوری کا طول جسقدر اِس کے فطری طول سے تجاوز کرتا ہے اِس کو ڈوری کی "توسیع" کہتے ہیں۔

ہُک کا قانون۔ ڈوری کا تناؤ توسیع کے متناسب ہوتا ہے۔

(۴۵) اگرچہ ہُک نے اِس قانون کو ۱۶۶۰ء میں دریافت کرلیا تھا لیکن اُس نے اِس کی اشاعت ۱۶۷۶ء تک نہیں کی اور اُس وقت بھی اِس کو ایک حرفی معمہ (ceiinosssttuu) کی شکل میں پیش کیا۔

۱۶۷۸ء میں اُس نے سمجھایا کہ اِس حرفی معمہ کے حروف لاطینی الفاظ "ut tenso sic vis" کے حروف ہیں — "کسی پیچ کی طاقت اور اِس کے تناؤ میں ایک ہی تناسب رہتا ہے"۔ تناؤ (tenso) سے ہُک کا مطلب وہ مقدار ہے جسے ہم نے "توسیع" کہا ہے اور طاقت (vis) سے وہ قوت مراد ہے جو پیچ کو وسیع کرنے کا میلان رکھتی ہے یعنی تناؤ۔

۳۹ — ہُک کے قانون سے ہم صرف اُن توسیعات کا مقابلہ کرسکتے ہیں جو مختلف تناؤں سے پیدا ہوتی ہیں۔ کسی دئے ہوئے تناؤ سے پیدا شدہ حقیقی توسیع معلوم کرنے کے لیے ہمیں کسی دوسرے تناؤ سے پیدا شدہ توسیع معلوم کرنی چاہیئے تاکہ مقابلہ ہوسکے۔

تعریف۔ وہ قوت جو ایک ڈوری کو اِس کے فطری طول کا دوچند کرنے میں مطلوب ہوتی ہے ڈوری کی لچک کا مقیاس کہلاتی ہے۔

مثلاً اگر ایک ڈوری کا طول ا ہو اور لچک کا مقیاس لہ تو ہم جانتے ہیں کہ تناؤ لہ، توسیع ا پیدا کرتا ہے اور اس لیے تناؤ ت، توسیع $\frac{ت\, ا}{لہ}$ پیدا کرے گا۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ڈوری نا امتداد پذیر ہے تو اِس سے یہ مطلب ہوتا ہے کہ لہ اِس قدر بڑا ہے کہ توسیع $\frac{ت ل}{لہ}$ نظر انداز کی جا سکتی ہے۔

ہُک کا قانون صرف خاص حدود کے اندر درست رہتا ہے۔ اگر ہم کسی ڈوری کے تناؤ کو غیر معین طور پر بڑھاتے جائیں تو ہم دیکھیں گے کہ ایک خاص حد گذر جانے کے بعد ہُک کا قانون درست نہیں رہتا، اور اِس سے بھی زیادہ ایک خاص تناؤ پر پہنچتے ہی ڈوری دو ٹکڑوں میں ٹوٹ جاتی ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک وزن و، ایک ڈوری سے لٹک رہا ہے، اسے ایک جانب ایک افقی قوت سے کھینچا گیا ہے تاآنکہ ڈوری انتصابی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے۔ افقی قوت اور ڈوری کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک وزن کو جو ایک ڈوری سے لٹکا ہوا ہے ایک افقی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے جیسے اُسے سکون کے محل سے (جس میں ڈوری انتصابی ہوتی ہے) بعید تر کھینچا جاتا ہے ڈوری کا تناؤ مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔

۳۔ ۱۰۰ پونڈ کا ایک وزن دو ڈوریوں سے جو انتصابی کے ساتھ ۶۰° کے زاوئے بناتی ہیں لٹکایا گیا ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

۴۔ ۳۰ پونڈ کا ایک وزن دو امتداد پذیر ڈوریوں سے بندھا ہے، ڈوریوں کا فطری طول ۲ فٹ ہے، لچک کا مقیاس ۱۰۰ پونڈ ہے اور ڈوریوں کے دوسرے سِرے دو نقطوں سے بندھے ہیں جو ایک دوسرے سے ۴ فٹ کے افقی فاصلے پر ہیں۔ وہ محل معلوم کرو جس میں وزن توازن میں ساکن رہ سکتا ہے۔

۵۔ ایک وزن و، طول ل کے تین مساوی ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے، ڈوریوں کے دوسرے سرے تین نقطوں سے بندھے ہیں جو ضلع ا کے ایک

افقی متساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

(۴۶)

دو اجسام کے درمیان تعامل

۴۰۔ ایک اور طریقہ جس سے قوت ایک ذرہ پر لگائی جا سکتی ہے، اُس دباؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے جو ذرہ اور ایک ٹھوس جسم کے درمیان ہوتا ہے۔ ایسی قوت کو بالعموم تعامل کہتے ہیں۔

مثلاً وہ جسم جو ایک کمرہ کے فرش پر استادہ ہے اپنے وزن کے زیر عمل ہے۔ جو نیچے وار عمل کرتا ہے لیکن وہ ایک دوسری قوت کے عمل کی وجہ سے جو فرش سے اوپر وار عمل کرتی ہے ساکن رہتا ہے، یہ قوت جسم اور فرش کے درمیان تعامل ہے۔ یہ صاف ظاہر ہے کہ جسم کو سکون کی حالت میں متوازن رکھنے کے لئے تعامل کو جسم کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے اور اُسے انتصاباً عمل کرنا چاہئے۔

رگڑ

۴۱۔ فرض کرو کہ ایک چھوٹا جسم ایک ایسے مستوی پر پڑا ہے جس کا ڈھال تغیر پذیر ہو سکتا ہے مثلاً ڈیسک کے ڈھکن کی سطح مستوی۔ اگر اِس مستوی کو افقاً رکھا جائے تو جسم ساکن رہ سکتا ہے جیسا کہ قبل ازیں مذکور ہوا۔ اب مستوی کو بتدریج جھکاتے جاؤ تو معلوم ہوگا کہ جوں ہی جھکاؤ ایک خاص زاویہ پر پہنچتا ہے تو جسم مستوی پر نیچے وار پھسلنے لگتا ہے۔ وہ زاویہ جس پر جسم کے پھسلنے کی ابتدا ہوتی ہے اشیا کے مختلف جوڑوں کے لیے مختلف معلوم ہوا ہے، مثلاً لکڑی لکڑی پر پھسلنے کے لیے یہ زاویہ ۱۰° سے ۲۵° تک متغیر ہو سکتا ہے، لوہا لکڑی پر پھسلنے کے لیے یہ زاویہ ۱۰° سے ۳۰° تک متغیر ہوتا ہے اور لوہا لوہے پر پھسلنے کے لیے وہ صرف ۱۰° یا ۱۵° ہے۔

جب دو اشیا ایسی ہوں کہ یہ زاویہ صفر ہو۔ یعنی ایسی کہ ایک

دوسری پر صرف اُسوقت ہی ساکن رہ سکتی ہے جبکہ تماس کی سطح کاملاً افقی ہو تو ان کے درمیانی تماس کو کامل طور پر چکنا کہتے ہیں۔ کامل طور پر چکنے تماس کا قریب ترین تقرب جس کا تجربہ روزمرہ زندگی میں ہوتا ہے غالباً برف پر فولاد کا ہے مثلاً اسکیٹنگ میں۔

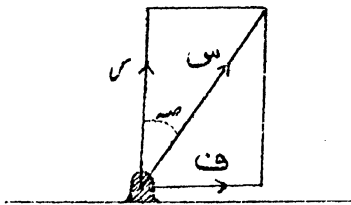
یہ معلوم ہوا ہے کہ وہ زاویہ جس تک ایک شئے سے بنی ہوئی مُستوی سطح کو جُھکانا پڑتا ہے تاآنکہ ایک دوسری شئے اِس پر پھسلنے لگے دوسری شئے کی مقدار اور رقبہ تماس دونوں کے بغیر تابع ہوتا ہے۔ یہ زاویہ زیر تماس دو اشیاء کی صرف نوعیت پر منحصر ہوتا ہے۔

نیز جب دو جسم کسی طریقہ پر باہم دبائے جاتے ہیں تو یہ معلوم ہوا ہے کہ تعامل کی سمت سطح فاصل کے عماد کے ساتھ کوئی زاویہ (ایک خاص انتہائی زاویہ کی حد تک) پھسلن کے وقوع کے بغیر بنا سکتی ہے لیکن جوں ہی یہ خاص زاویہ پہنچ جاتا ہے تو پھسلن واقع ہوتی ہے۔ اِس زاویہ کو رگڑ کا زاویہ کہتے ہیں۔ صریحاً یہ وہی زاویہ ہے جس میں سے اُس مُستوی کو جس کا ذکر اوپر آچکا ہے جھکایا جاسکتا ہے قبل اسکے کہ پھسلن واقع ہو، کیونکہ مُستوی کے عماد اور تعامل کی سمت کے درمیان جو زاویہ ہوتا ہے وہ صرف مُستوی کا ڈھال ہے۔

۴۷ ۔ کسی صورت میں جس میں رگڑ کی قوتیں عمل کریں فرض کرو کہ تعامل کا عمادی جزو ترکیبی ر ہے اور فرض کرو کہ تماس کے مُستوی میں اُس کا جزو ترکیبی ف ہے جو رگڑ سے پیدا ہوتا ہے۔ جب پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو تو حاصل کو عماد کے ساتھ زاویہ صہ بنانا چاہیے جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

پس اگر پورا تعامل س سے تعبیر ہو تو

ر = س جم صہ، ف = س جب صہ

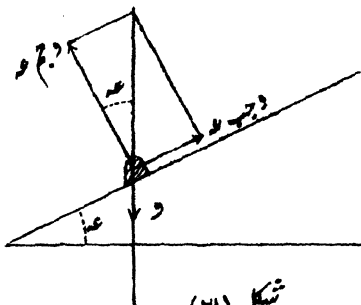
اور اس لیے ف = ر ﷲ س صہ

مقدار ﷲ س صہ کو رگڑ کی قدر کہتے ہیں اور اسے ایک واحد علامت مہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس لیے جب

شکل (۲۰)

پھسلن عین واقع ہونے کو ہو تو

ف = مہ ر

یہ صاف طور پر ذہن نشین ہونا چاہیے کہ اس مساوات سے رگڑ کی قوت کی ٹھیک قیمت حاصل ہوتی ہے **صرف اس وقت جبکہ پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو**۔ اس سے رگڑ کی قوت کی قیمت کی اوپر کی حد متعین ہوتی ہے۔ لیکن اس قوت کی حقیقی قیمت معلوم نہیں ہوتی جب تک کہ ہمیں یہ نہ معلوم ہو کہ نظام پھسلنے کے عین موقع پر ہے۔

۴۳ — مثلاً اس تجربہ پر غور کرو جس کا ذکر اوپر کیا جا چکا ہے، اس میں ایک ذرہ ایک افقی مستوی پر رکھا ہوا ہے اور مستوی کو بتدریج جھکایا جاتا ہے۔ جب مستوی افقی ہوتا ہے تو ذرہ ساکن رہتا ہے، اس پر صرف جاذبہ ارض اور مستوی کا تعامل عمل کرتے ہیں۔ اس لیے تعامل افقی ہے اور اس لیے ف = ۰ ۔ پھر اس نظام پر غور کرو جبکہ مستوی افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتے۔ اگر پھسلن واقع نہیں ہوتی تو ذرہ، اپنے وزن و اور اس تعامل کے زیر عمل توازن میں ہے۔ جو ذرہ اور مستوی کے درمیان ہے۔ اس لیے تعامل میں ایک انتصابی قوت و شامل ہونی چاہیئے۔ ہم اس تعامل کو دو اجزائے ترکیبی و جم عہ اور و جب عہ میں جو مستوی پر عمود اور اس کے متوازی ہیں تحلیل کر سکتے ہیں۔ قبل الذکر تعامل کا عمادی جزو ترکیبی ہے۔ اور موخر الذکر رگڑ کا جزو ترکیبی۔ اس لیے مستعملہ ترقیم میں

ر = و جم عہ

ف = و جب عہ

اس لیے اس صورت میں

ف = ر مس عہ

جیسے عہ بڑھتا ہے ف اور $\frac{\text{ف}}{\text{ر}}$ دونوں بڑھتے ہیں یہاں تک جب عہ،

شکل (۲۱)

قیمت صہ پر پہنچتا ہے تو ف/ر اپنی انتہائی قیمت مہ پر پہنچتا ہے اور اسکے بعد پھسلن واقع ہوتی ہے ۔

مثالیں

۱ — ۱۰۰ پونڈ کی ایک کمیت ایک کھردرے مستوی پر رکھی ہوئی ہے، یہ کمیت عین حرکت کرنے کو ہوتی ہے جبکہ اس پر ایک قوت ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی افقی طور پر عمل کرتی ہے۔ رگڑ کا زاویہ معلوم کرو ۔

۲ — ایک جسم ایک مائل سطح مستوی پر جو افق کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے رکھا ہوا ہے ۔ یہ جسم سطح کے نیچے عین حرکت کرنے کو ہوتا ہے جبکہ اس پر ایک افقی قوت اس کے وزن کے مساوی عمل کرتی ہے ۔ رگڑ کی قدر معلوم کرو ۔

۳ — ایک شخص جو ۲۰۰ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچنے کی قابلیت رکھتا ہے ایک افقی سڑک پر (رگڑ کی قدر $\frac{1}{3}$) ۷۰۰ پونڈ کی ایک کمیت گھسیٹنے کی کوشش کرتا ہے ۔ اس کی مدد کے لیے حمالہ کی زنجیر کمیت کے ساتھ باندھ دی گئی ہے، زنجیر انتصاباً لٹک رہی ہے ۔ زنجیر میں کتنا تناؤ ہونا چاہئے کہ شخص کمیت کو عین حرکت دے سکے ۔

۴ — ایک کیڑا، نصف قطر ا کے ایک نیم کروی پیالے کی اندرونی سطح پر اوپر وار رینگنے کی کوشش کرتا ہے ۔ وہ کتنا اونچا چڑھ سکتا ہے اگر اس کے پاؤں اور پیالے کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{3}$ ہو ۔

۵ — ایک شخص برف پر پتھر کے ایک گنڈ کو دھکیلنے کی کوشش میں افقی طور پر قوت لگاتا ہے لیکن اسے معلوم ہوتا ہے کہ جوں ہی پتھر حرکت کرنے لگتا ہے اس کے پاؤں پھسلنے لگتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ اگر وہ اوپر وار پتھر کو دھکیلے تو وہ بغیر کسی شکل کے پتھر کو متحرک کر سکتا ہے لیکن اگر وہ نیچے وار زور لگائے تو وہ اس کو شاید ہٹا بھی نہ سکے ۔

۶ — ایک چکنی چرخی ایک افقی مستوی کے کنارے رکھی ہوئی ہے ۔ اس پر سے

ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے ایک سرے پر وزن و آزادانہ لٹک رہا ہے اور دوسرے سرے پر وزن و بندھا ہے جو مستوی پر ساکن ہے۔ اگر رگڑ کی قدر مہ اس قدر بڑی ہو کہ حرکت وقوع پذیر نہیں ہوتی تو معلوم کرو کہ کس زاویہ میں سے مستوی کو جھکانا چاہیئے کہ حرکت عین واقع ہونے کو ہو۔ (۲۹)

۷۔ کمیت ک کا ایک سیاح کمیت ک کے ایک رہنما سے رسی کے ذریعہ بندھا ہوا ہے اور یہ دونوں ایک پہاڑ کے رخ پر ہیں جسے ایک مقلوب نیم کرہ سمجھا جا سکتا ہے۔ رسی کا طول پہاڑ کے مرکز پر زاویہ عہ بناتا ہے اور رسی پہاڑ کے کسی نقطہ کو مس نہیں کرتی۔ اگر ان میں سے کسی شخص اور پہاڑ کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہو تو معلوم کرو کہ پہاڑ کے رخ پر نیچے کی جانب سیاح کتنی دور تک جانے کی جرأت کر سکتا ہے قبل اس کے کہ وہ اور رہنما دونوں پہاڑ کے دامن میں گر جائیں۔

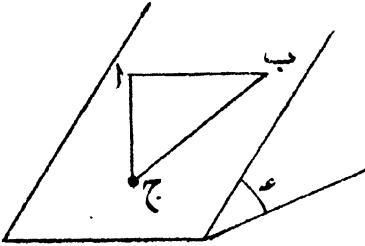
توضیحی امثلہ

۱۔ ایک وزنی ذرہ ج ایک چکنے مائل مستوی پر دو ڈوریوں کے ذریعہ جنکے طول ل، ل ہیں اور جو مستوی کے نقطوں ا، ب کے ساتھ بندھی ہوئی ہیں ساکن ہے۔ یہ نقطے ا، ب ایک ہی افقی خط میں ہیں اور ان کے درمیان فاصلہ ف ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ اور وہ تعامل معلوم کرو جو مستوی اور ذرہ کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ ذرہ کا وزن و ہے اور مستوی کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے۔ ذرہ حسب ذیل قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے:

(ا) اس کا وزن و جو انتصاباً نیچے وار عمل کرتا ہے،

(ب) ذرہ اور مستوی کے درمیان تعامل۔ چونکہ مستوی چکنا ہے، یہ تعامل مستوی کے عمود وار عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اس تعامل کی مقدار ر ہے۔

(ج) وہ دو تناؤ جن کی مقداریں مطلوب ہیں۔ فرض کرو کہ ان کی مقداریں ت، ت سے تعبیر ہوتی ہیں۔

چونکہ یہ چار قوتیں توازن پیدا کرتی ہیں اس لیے کسی سمت میں ان کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے ڈوریوں کے تناؤ مستوی کے عموددار کوئی اجزائے تحلیلی نہیں رکھتے، اس لئے قوتوں کو مستوی کے عموددار تحلیل کرنے سے ہمیں ایک ایسی مساوات ملے گی جس میں صرف دو قوتیں شامل ہونگی۔

شکل (۲۲)

وزن کا جزو تحلیلی مستوی کے عموددار و جم عہ ہے۔ تعامل پورے کا پورا مستوی کے عموددار ہے۔ اس لیے وہ مساوات جس کی ہمیں تلاش ہے

$$مہ - و جم عہ = ۰$$

ہے۔ اس سے فوراً تعامل کی مقدار معلوم ہوتی ہے۔

اب ہم مائل مستوی میں قوتوں کے اجزائے تحلیلی پر غور کریں گے۔ وہ قوتیں جن کے اجزائے ترکیبی اس مستوی میں ہیں صرف حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن جس کا جزو ترکیبی و جب عہ ہے اور خط میلان اعظم میں نیچے کی جانب عمل کرتا ہے۔

(ب) ڈوریوں کے تناؤ جو کاملاً مستوی میں ہیں اور جو ڈوریوں ج ا، ج ب کی سمت میں عمل کرتے ہیں۔

یہ تین قوتیں و جب عہ، ت$_۱$ اور ت$_۲$ توازن میں ہونی چاہئیں، اس لیئے لامی کے مسئلہ کی رو سے ہر ایک، دوسری دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئے۔ (۵۰)

شکل (۲۳) میں ان تین قوتوں کے خطوط عمل ج د، ج ا، ج ب ہیں۔ خط ج د، ج میں سے گذرنے والا خط میلان اعظم ہونے کی وجہ سے خط ا ب کے علی القوائم ہے جو افقی ہے۔ پس اگر د ج کو بڑھایا جائے اور وہ ا ب سے ن پر ملے تو زاویہ ا ن ج قائمہ ہے۔ اس لیے

جب ا ج د = جب ا ج ن = جم ج ا ن

اور اسی طرح

جب ب ا ج د = جب ب ج ن = جم ج ب ا ن

∴ لامی کے مسئلہ سے

$$\frac{\text{و جب عہ}}{\text{جب ا ج ب}} = \frac{\text{ت}_1}{\text{جب ب ج د}}$$

$$= \frac{\text{ت}_2}{\text{جب ا ج د}}$$

شکل (۲۳)

ان رشتوں سے جو اوپر حاصل ہوئے ہیں اِن نسبتوں کو مثلث ا ب ج کے زاویوں کی رقوم میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{\text{و جب عہ}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{ت}_1}{\text{جم ب}} = \frac{\text{ت}_2}{\text{جم ا}}$$

اب اگر ہم ضرورت سمجھیں تو جم ا، جم ب اور جب ج کو مثلث کے ضلعوں ل_1، ل_2 اور ف کی رقوم میں علم مثلث کے معمولی ضابطوں کی مدد سے بیان کر سکتے ہیں۔

طالب علم بطور خود اُس شکل کا امتحان کرے جو نتیجۂ بالا حسب ذیل دو خاص صورتوں میں اختیار کرتا ہے:

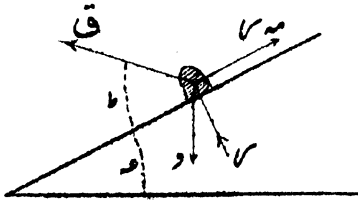
(ل) ا = ب = ۰، جس میں ا ج ب ایک خط مستقیم میں ہیں۔

(ب) ج = ۰، ا = ب = $\frac{\pi}{2}$، جس میں ڈوریاں متوازی ہیں۔

۲۔ اُس چھوٹی سے چھوٹی قوت کی مقدار اور سمت معلوم کرو جو ایک جسم کو جو ایک مائل مستوی پر ساکن ہے مستوی کے نیچے حرکت میں لائے۔

فرض کرو کہ مستوی کا زاویہ عہ ہے اور مستوی اور اُس جسم کے درمیان جسے متحرک کرنا ہے رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ جسم کا وزن و ہے اور فرض کرو کہ

ایک قوت ق مستوی کے نیچے ایک ایسی سمت میں اِس پر لگائی گئی ہے جو خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ ط بناتی ہے، اِس قوت کے متعلق فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ جسم کو متحرک کرنے کے لیے عین کافی ہے۔

جسم پر عمل کرنیوالی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اُس کا وزن و،

(ب) قوت عاملہ ق،

(ج) مستوی کے ساتھ تعامل۔

فرض کرو کہ اِس آخری قوت کو مستوی اور اِس کے عمود وار دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا گیا ہے۔ اگر بعد الذکر کو ر فرض کریں تو قبل الذکر جزو ترکیبی مہ ر ہوگا جو مستوی کی اوپر کی جانب عمل کرے گا کیونکہ بموجب فرض جسم مستوی کے نیچے عین حرکت کرنے کو ہے۔

شکل (۲۴)

(۵۱) اِن تمام قوتوں کا حاصل معدوم ہوتا ہے، اِس لیے کسی سمت میں اِن کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیئے۔ قوتوں کو مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے

$$ر + ق \text{ جب } ط - و \text{ جم } ع = ۰$$

اور مستوی میں تحلیل کرنے سے

$$ق \text{ جم } ط + و \text{ جب } ع - مہ ر = ۰$$

نامعلوم تعامل ر کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ق (مہ \text{ جب } ط + \text{جم } ط) - و (مہ \text{ جم } ع - \text{جب } ع) = ۰$$

اس لیے $ق = \frac{و (مہ \text{ جم } ع - \text{جب } ع)}{مہ \text{ جب } ط + \text{جم } ط}$

اس لیے مہ کی بجائے مس صہ رکھنے سے

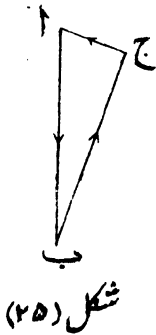
$$ق = \frac{و (\text{جم } ع \text{ مس } صہ - \text{جب } ع)}{\text{جم } ط + \text{مس } صہ \text{ جب } ط} = \frac{و \text{ جب } (صہ - ع)}{\text{جم } (ط - صہ)}$$

ق کی قیمت اقل ہوگی جبکہ جم (طہ - صہ) اعظم ہو اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ جم (طہ - صہ) = ا یعنی جبکہ طہ = صہ - اِس صورت میں ق کی قیمت ہے

ق = و جب (صہ - عہ)

پس یہ وہ چھوٹی سے چھوٹی قوت ہے جس سے حرکت پیدا کیجا سکتی ہے اور اسے عمل کرنا چاہئے اِس طور پر کہ وہ مستوی کے ساتھ ایک ایسا زاویہ طہ بنائے جو زاویہ رگڑ صہ کے مساوی ہو - چونکہ بموجب فرض وزن بغیر پھسلے ساکن رہتا ہے جبکہ کوئی قوت لگائی نہیں جاتی اِس لیے زاویہ صہ کو عہ سے بڑا ہونا چاہئے - اِس لیے قوت ق کی سمت ہمیشہ اوپر وار سمت میں مائل ہونی چاہئے - قوت ق کا عمل دوگونہ ہے، وہ جسم کے وزن کا کچھ حصہ سہارتی ہے (اپنے اُس جزو ترکیبی کے ذریعہ جو مستوی پر عمود ہے) اور اِس لیے رگڑ کی مقدار کو گھٹاتی ہے، نیز وہ رگڑ کی مزاحمت پر غالب آنے کے لیے محرک طاقت (اپنے اُس جزو ترکیبی کے ذریعہ جو مستوی میں ہے) بھی مہیا کرتی ہے - جب اِس قوت کے یہ دو حصے مفید ترین طریقہ پر لگے ہوئے ہوں تو ق کی قیمت اقل ہوتی ہے اور یہ جیسا کہ ہم ثابت کر چکے ہیں اُس وقت ہوتا ہے جبکہ طہ = صہ

اِس مسئلہ کا ایک دلچسپ اور سبق آموز حل ہندسی طور پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے - توازن کے لیے متذکرہ بالا تین قوتوں کو قوتوں کا ایک مثلث بنانے کی شرط کو پورا کرنا چاہئے -

شکل (۲۵)

فرض کرو کہ ا ب ' وزن کو تعبیر کرتا ہے اور ب ج ' کمیت اور مستوی کے درمیان تعامل کو - اس لیے ج ا ' قوت عاملہ ق کو تعبیر کرنا چاہئے - اگر جسم حرکت کے نقطہ پر ہے تو تعامل کو مستوی کے عماد کے ساتھ زاویہ صہ بنانا چاہئے، اِس لیے زاویہ ا ب ج ' صہ - عہ ہونا چاہئے - اس لیے خط ب ج سمت میں ثابت ہے -

اور مسئلہ یہ ہے کہ ا ج کی مقدار اور سمت معلوم کی جائے جبکہ طول ا ج اقل ہو۔ صریحاً
اس کی اقل قیمت واقع ہوتی ہے جبکہ ا ج، ب ج پر عمود ہوتا ہے، اس لئے
ا ج ایسی سمت میں ہونا چاہیئے جو افق کے ساتھ زاویہ صہ ـ عہ بنائے جیسا کہ
قبل ازیں معلوم کیا جا چکا ہے، نیز چونکہ ا ج = ا ب جب ا ب ج
= ا ب جب (صہ ـ عہ)، اس لیے مطلوبہ قوت کی مقدار و جب (صہ ـ عہ)
ہوگی۔

(۵۲) ۳۔ ایک ذرہ ایک لچکدار ڈوری سے بندھا ہے اور ڈوری کا
دوسرا سرا ایک کھردرے مائل مستوی میں ایک نقطے پر ثابت ہے۔
مستوی کا وہ حصہ معلوم کرو جس کے اندر ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔

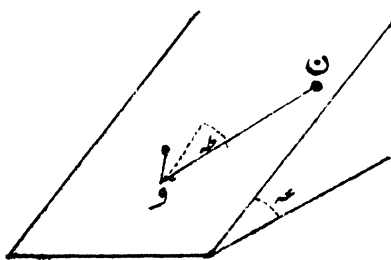
ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اس کا وزن و انتصاباً نیچے،

(ب) ڈوری کا تناؤ،

(ج) کھردرے مستوی کے ساتھ تعامل۔

فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل ہے اور لچک کا مقیاس لہ تو جب
ڈوری کا واقعی طول ر ہوتا ہے جہاں ر > ل تو تناؤ $\frac{(ر - ل)لہ}{ل}$ ہے۔

فرض کرو کہ مستوی کا میلان عہ ہے اور مستوی اور ذرہ کے درمیان رگڑ کی
قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ مستوی کے
تعامل کو عمادی جزوی ترکیبی ر اور
مستوی میں کے جزو ترکیبی ف میں
تحلیل کیا گیا ہے۔ وہ شرط کہ ذرہ ساکن
رہے یہ ہے کہ ف < مہ ر ہے۔
قوتوں کو مستوی کے علی القوائم تحلیل
کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ اس سمت میں

ن
ط
و
عہ

شکل (۲۶)

عمل کرنے والی قوتیں صرف ذرہ کا وزن اور مستوی کے ساتھ اس کا تعامل ہیں۔ اِس لیے

کا - و جم عہ = ۰

اب ذرہ کے توازن پر غور کرو جبکہ وہ کسی نقطہ ن پر ہو جس کا فاصلہ و سے ر (> ل) ہے۔ اِس پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی مائل مستوی میں حسب ذیل ہیں:

(ا) و جب عہ، ن میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم کی سمت میں نیچے کی جانب،

$$\text{(ب) تناؤ } \frac{(ر - ل)\, لہ}{ل} \text{، سمت ن و میں،}$$

(ج) تعامل کا وہ جزو ترکیبی جس کو ہم نے ف سے تعبیر کیا ہے۔

فرض کرو کہ و ن، مستوی کے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ چونکہ پہلی دو قوتوں کا حاصل متعدار ف کا ہونا چاہئے اسلیے

$$ف^۲ = و^۲ جب^۲ عہ + \frac{(ر-ل)^۲ لہ^۲}{ل^۲} + \frac{۲ (ر-ل) لہ}{ل} و جب عہ جم طہ$$

جس سے فرکی قوت کی وہ مقدار معلوم ہوگی جو توازن قائم رکھنے کے لیے ضروری ہے۔ اگر ذرہ حرکت کرنے کو ہو تو ف = مہ کا = مہ و جم عہ اور اس لیے

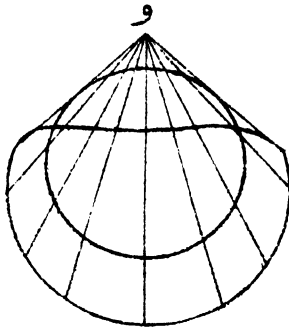
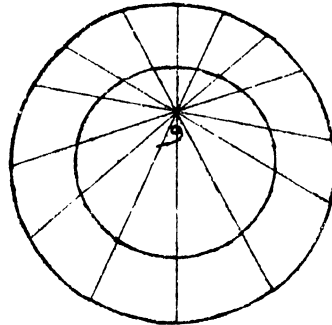
$$و^۲ (جب^۲ عہ - مہ^۲ جم^۲ عہ) + \frac{(ر-ل)^۲ لہ^۲}{ل^۲} + \frac{۲ (ر-ل) لہ}{ل} و جب عہ جم طہ = ۰ \quad ......(ا)$$

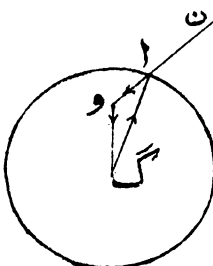
چونکہ نقطہ ن کے قطبی محددر، طہ ہیں اس لیے مساوات (ا) مستوی کے اُس حصہ کے حدود کی قطبی مساوات ہے جس کے اندر ذرہ ساکن رہ سکتا ہے۔

(۵۴) اِس مساوات کی توجیہ آسان ترین طریقہ پر ہوگی اگر ہم یہ دیکھیں کہ ر-ل کی بجائے ر رکھنے سے مساوات (ا) ہو جاتی ہے

$$و^۲ (جب^۲ عہ - مہ^۲ جم^۲ عہ) + \frac{لہ^۲}{ل^۲} ر^۲ + ۲ \frac{لہ}{ل} و جب عہ \times ر جم طہ = ۰ \quad .....(ب)$$

جو ایک دائرہ کی قطبی مساوات ہے۔ پس ابتدائی طریق جو مساوات (ا) سے تعبیر ہوتا ہے اِس طور پر کھینچا جا سکتا ہے کہ اول وہ دائرہ کھینچ لیا جائے جو مساوات (ب) سے تعبیر ہوتا ہے اور پھر مبداء میں سے گذرنے والے ہر سمتی نیم قطر کو اس دائرہ کے محیط سے آگے فاصلہ ل تک بڑھایا جائے۔

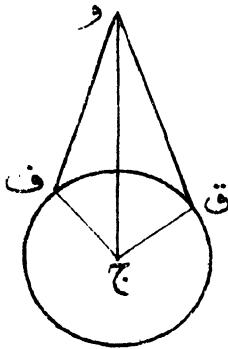
شکل (۲۷)

شکل (۲۸)

یہی نتیجہ ہندسی طور پر مسئلہ کو حل کرنے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ذرہ جس مستوی پر ساکن ہے اِس میں صرف تین قوتیں اُس پر عمل کرتی ہیں، اسلئے اِن قوتوں کے متوازی اور متناسب خطوں کو ایک مثلث بنانا چاہیئے۔

شکل (۲۹) میں فرض کرو کہ و ن ڈوری ہے اور فرض کرو کہ ن سے خط ن ا، طول ل کا پیمایش کیا گیا ہے اور اس لیے ا و، ڈوری کی توسیع ر ۔ ل ہے۔ تناؤ ہمیشہ ا و کے متناسب ہوگا اور ا و کی سمت میں عمل کرے گا۔ فرض کرو کہ ہم یہ طے کر لیتے ہیں کہ قوتوں کے مثلث میں تناؤ کو حقیقی خط ا و سے تعبیر کر لیا گیا ہے۔ اِسی پیمانہ پر فرض کرو کہ وزن کا جزو ترکیبی و جب عہ خط و گ سے تعبیر ہوتا ہے جس کی سمت بلا شبہ نیچے وار و میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم کی سمت ہے۔ پس ا و گ کو قوتوں کا مثلث ہونا چاہیئے اور اسلیے گ ا سے

شکل (۲۹)

وہ فرکی تعامل تعبیر ہونا چاہئے جو ذرہ اور مستوی کے درمیان ہے۔ اِس کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت مہ وجم عہ ہے اور اس لیے اگر پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہو تو گ ا قوت مہ وجم عہ کو تعبیر کرے گا۔ پس ن کے ایک محل کے متناظر جس میں پھسلن عین واقع ہونے کو ہو (ا کا محل ایسا ہے کہ گ ا مستقل قوت مہ وجم عہ کو تعبیر کرتا ہے یعنی دوسرے الفاظ میں (ا کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز گ ہے۔ اِس سے وہ عمل ملتا ہے جو قبل ازیں حاصل کیا جا چکا ہے۔

(۵۴) مستوی کا وہ حصہ جس میں توازن ممکن ہے دو مختلف شکلیں اختیار کرتا ہے بموجب اِس کے کہ مائل مستوی کا زاویہ عہ' رگڑ کے زاویہ صہ سے چھوٹا یا بڑا ہو۔ پہلی صورت میں توازن کا قطعہ اُس قسم کا ہے جس کو شکل (۲۷) میں بتلایا جا چکا ہے۔ قیمت عہ = صہ میں سے گذرنے پر وہ دائرہ جو عمل میں استعمال کیا گیا ہے نقطہ و میں سے گذرتا ہے اور صہ سے بڑی عہ کی قیمتوں کے لیے توازن کا قطعہ اُس قسم کا رقبہ ہو جاتا ہے جس کو شکل (۲۸) میں کھینچا گیا ہے۔ کیونکہ عہ کی اُن قیمتوں کے لیے جو صہ سے بڑی ہوں (خواہ کتنے ہی خفیف طور پر) نصف قطر ل کا دائرہ جس کا مرکز و ہے قائمیت کے قطعہ سے بالکل باہر واقع ہوتا ہے' اِس کے برخلاف عہ کی اُن قیمتوں کے لیئے جو صہ سے چھوٹی ہوں (خواہ کتنے ہی خفیف طور پر) یہ دائرہ توازن کے قطعہ میں کلاً واقع ہوتا ہے۔ صریحاً یہ دائرہ اُس قطعہ کو نشان زد کرتا ہے جس کے اندر وزن ڈوری کے ساتھ ساکن رہ سکتا ہے لیکن وہ توازن کا قطعہ ہوگا اگر عہ < صہ اور توازن کا قطعہ نہیں ہوگا اگر عہ > صہ۔

اِس طرح یہ دائرہ اُس طریقہ پر توازن کے قطعہ کے اندر یا باہر واقع ہوگا جس کا علم علم تحلیل سے حاصل کر لیا گیا ہو۔ اِس کے ساتھ ہی بغیر جداگانہ تحقیق کے ہمیں اِس کا یقین نہیں ہو سکتا تھا کہ وہ نتیجہ جو علم تحلیل سے حاصل ہوا ہے اُس قطعہ کے متعلق صحیح ہے جو و سے فاصلہ ل کے اندر واقع ہے۔ کیونکہ تحلیل تو یہ فرض کر کے شروع ہوئی تھی کہ ڈوری تنی ہوئی ہے اور اِس لیئے اِس کا اطلاق صرف اُس قطعہ پر ہو سکتا ہے جو و سے ل سے بڑے فاصلہ پر واقع ہے۔

۴ - دو وزن و، وَ ایک چکنے کرہ پر ایک ڈوری کے ذریعہ جو ہ پر کے ایک چھوٹے حلقہ میں سے گذرتی ہے لٹکائے گئے ہیں جہاں ہ کرہ کے مرکز کے انتصاباً اوپر واقع ہے۔ توازن کی تشکیل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں ان دو اوزان کے محل ف، ق شکل (۳۰) ہیں۔ ف پر کے وزن و پر حسب ذیل قوتیں عمل کرتی ہیں:

(ا) اس کا وزن و انتصاباً نیچے وار،

(ب) ڈوری کا تناؤ سمت ف ہ میں۔

شکل (۳۰)

(ج) وہ تعامل جو کرہ اور وزن کے درمیان ہے چونکہ کرہ کو چکنا فرض کیا گیا ہے اسلیے اس تعامل کی سمت، ذرہ اور کرہ کے تماس کے مستوی سے علی القوائم ہے یعنی اس کی سمت ج ف ہے۔

یہ تین قوتیں جو ذرہ ف پر عمل کرتی ہیں مثلث ہ ف ج کے تین ضلعوں کے متوازی ہیں۔ اس لیے مثلث ہ ف ج کو ان تین قوتوں کا مثلث تصور کیا جا سکتا ہے، ان قوتوں کی مقداریں اس مثلث کے اضلاع کے متناسب ہونی چاہئیں۔ تناؤ اور تعامل کو ت اور ر سے تعبیر کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{و}{ہ ج} = \frac{ت}{ہ ف} = \frac{ر}{ج ف}، \quad \ldots\ldots\ldots (ا)$$

اسی طرح مثلث ہ ج ق کو ذرہ ق کے لیے قوتوں کا مثلث سمجھا جا سکتا ہے۔ (مخفی مبادکہ یہ مثلث اسی پیمانہ پر قوتوں کو تعبیر نہیں کرتا جس پیمانہ پر مثلث ہ ف ج تعبیر کرتا تھا کیونکہ اس صورت میں ہ ف سے وزن و کو تعبیر کیا گیا تھا اور اب ہ ق سے وزن وَ تعبیر ہوتا ہے)۔

قوتوں کے اس دوسرے مثلث سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{وَ}}{\text{وج}} = \frac{\text{تَ}}{\text{وق}} = \frac{\text{رَ}}{\text{جق}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(ب)}$$

جہاں تَ اور رَ سے وہ تناؤ اور تعامل تعبیر ہوتے ہیں جو ق پر عمل کرتے ہیں۔

چونکہ و پر کے حلقہ کو چکنا فرض کیا گیا ہے اِس لیے ڈوری ف و ق کا تناؤ ہر نقطہ پر وہی ہے۔اِس لیے تَ = ت۔ پس مساواتوں (ا) اور (ب) سے

$$\text{و} \times \text{وف} = \text{وَ} \times \text{وق} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(ج)}$$

کیونکہ ہر حاصل ضرب، ت × وج کے مساوی ہے۔ اگر ڈوری کا پورا طول ل ہو تو

$$\frac{\text{و}}{\text{وق}} = \frac{\text{وَ}}{\text{وف}} = \frac{\text{و} + \text{وَ}}{\text{ل}} \quad \text{(د)}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری خود کو اِس طور پر ترتیب دے لیتی ہے کہ وہ نقطہ و پر اِن دو وزنوں کی نسبت معکوس میں تقسیم ہوتی ہے۔ نیز ہم مساواتوں (ا) اور (ب) سے دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{\text{رَ}}{\text{وَ}} = \frac{\text{ر}}{\text{و}}$$

کیونکہ ہر ایک نسبت وہ نسبت ہے جو کرہ کے نصف قطر کو وج کے ساتھ ہے۔

اگر ڈوری ناامتداد پذیر ہے تو طول ل معلومہ ہے اور اِس لیے مساواتوں (د) سے طول وف، وق پوری طرح معلوم ہوتے ہیں۔ لیکن فرض کرو کہ ڈوری امتداد پذیر ہے اور فرض کرو کہ اس کا فطری طول ا اور مقیاس لہ ہے۔ اب ل ایک نامعلوم مقدار ہے اور اِس کے لیے ہمیں ایک زائد مساوات نامعلوم مقداروں کے درمیان حاصل ہوتی ہے جو حسب ذیل ہے:

$$\text{ت} = \text{لہ}\,\frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ا}}$$

اب چونکہ مساوات (ج) سے مقدار ت × وج کے لیے دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

اِس لیے

$$\text{ت} \times \text{وج} = \frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ا}}\,\text{ل} \times \text{وج} = \text{و} \times \text{وف} = \text{وَ} \times \text{وق}$$

$$= \frac{\text{وف}}{\frac{1}{\text{و}}} = \frac{\text{وق}}{\frac{1}{\text{و}_2}} = \frac{\text{ل}}{\frac{1}{\text{و}} + \frac{1}{\text{و}_2}}$$

اِس لیے
$$\frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ا}}\,\text{ل} \times \text{وج} = \frac{\text{ل}}{\frac{1}{\text{و}} + \frac{1}{\text{و}_2}}$$

اِس مساوات سے ل کی قیمت معلوم ہو گی اور اس کو معلوم کر لینے کے بعد ہم حسب سابق عمل جاری کریں گے ۔

۵ ۔ ایک وزن و کو ڈوریوں سے جنکے تناؤ ت_1، ت_2، ت_3 ... $\text{ت}_{\text{ن}}$ ہیں سہارا گیا ہے ۔ ڈوریاں انتصاباً نہیں لٹکتیں لیکن اِن کے مختلف زوجوں کے درمیان زاوئے صہ_{12}، صہ_{13} وغیرہ معلوم ہیں ۔ وزن و کو تناؤں اور اِن زاویوں کی رقوم میں معلوم کرو ۔

صریحاً وزن، تناؤں ت_1، ت_2، ت_3 ... $\text{ت}_{\text{ن}}$ کے حاصل کے مساوی ہے ۔ (۵۶)

فرض کرو کہ ہم فضاء میں کوئی تین قائم محاور لیتے ہیں ۔ فرض کرو کہ پہلی ڈوری کی سمتی جیوب التمام ل_1، م_1، ن_1 ہیں، دوسری کی ل_2، م_2، ن_2 اور علیٰ ہذا ۔ تب تناؤں کو محاور کے متوازی تحلیل کرنے سے پہلے تناؤ کے اجزائے ترکیبی ہونگے

$$\text{ل}_1\text{ت}_1،\ \text{م}_1\text{ت}_1،\ \text{ن}_1\text{ت}_1$$

اسی طرح دوسرے تناؤں کے اجزائے ترکیبی کے لئے اِن کے مشابہ جملے ہیں اور اس لیے اگر حاصل کے تین اجزائے ترکیبی لا، ما، ے سے تعبیر ہوں تو

$$\text{لا} = \text{ل}_1\text{ت}_1 + \text{ل}_2\text{ت}_2 + \cdots + \text{ل}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ن}}،$$

$$\text{ما} = \text{م}_1\text{ت}_1 + \text{م}_2\text{ت}_2 + \cdots + \text{م}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ن}}،$$

$$\text{ے} = \text{ن}_1\text{ت}_1 + \text{ن}_2\text{ت}_2 + \cdots + \text{ن}_{\text{ن}}\text{ت}_{\text{ن}}،$$

اب چونکہ حاصل کی مقدار و کے مساوی ہے، اس لیے

$$\text{و}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ے}^2$$

$$= (\text{ل}_1 \text{ت}_1 + \text{ل}_2 \text{ت}_2 + \dots + \text{ل}_\text{ن} \text{ت}_\text{ن})^2 + (\text{م}_1 \text{ت}_1 + \text{م}_2 \text{ت}_2$$

$$+ \dots + \text{م}_\text{ن} \text{ت}_\text{ن})^2 + (\text{ن}_1 \text{ت}_1 + \text{ن}_2 \text{ت}_2 + \dots + \text{ن}_\text{ن} \text{ت}_\text{ن})^2$$

$$= \text{ت}_1^2 (\text{ل}_1^2 + \text{م}_1^2 + \text{ن}_1^2) + \dots + ۲\, \text{ت}_1 \text{ت}_2 (\text{ل}_1 \text{ل}_2 + \text{م}_1 \text{م}_2 + \text{ن}_1 \text{ن}_2)$$

$$+ \dots\dots\dots$$

$$= \text{ت}_1^2 + \text{ت}_2^2 + \dots + ۲\, \text{ت}_1 \text{ت}_2\, \text{جم}\, \text{ص}_{12} + \dots\dots$$

جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

عام مثالیں

۱۔ ا ب ج ایک مثلث ہے جس کا زاویہ ا قائمہ ہے۔ ا د، ب ج پر عمود ہے۔ ثابت کرو کہ قوتوں $\frac{1}{\text{اب}}$ (جو ا ب پر عمل کرتی ہے) اور $\frac{1}{\text{اج}}$ (جو ا ج پر عمل کرتی ہے) کا حاصل $\frac{1}{\text{اد}}$ ہے جو ا د پر عمل کرتا ہے۔

۲۔ ایک نقطہ و پر قوت ف عمل کرتی ہے جس کا خط عمل اُس مستوی میں ہے جو و پر ملنے والے دو عمود وار خطوط و ا، و ب سے متعین ہوتا ہے۔ ف کا جزو ترکیبی سمت و ا میں مقدار اور سمت کے لحاظ سے و لا سے تعبیر ہوتا ہے اور سمت و ب کا جزو ترکیبی و ما سے۔ ثابت کرو کہ قوت ف مقدار میں دائرہ و لا ما کے قطر سے تعبیر ہوتی ہے، اِس کی سمت معلوم کرو۔

۳۔ قوتیں ف_1، ف_2، ...، $\text{ف}_\text{ن}$ جو ایک مستوی میں نقطہ و پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہیں۔ کوئی قاطع اِن کے خطوط عمل کو نقطوں ل_1، ل_2 ... $\text{ل}_\text{ن}$ پر قطع کرتا ہے اور طول $\text{ول}_\text{خ}$ کو مثبت خیال کیا جاتا ہے جبکہ و سے $\text{ل}_\text{خ}$ کی سمت

وہی ہو جو ف اخ کی ہے ۔ ثابت کرو کہ ∠ ف اخ ا ول خ = ۰

۴ ۔ ایک جسم ایک چکنے مائل مستوی پر دو قوتوں کے ذریعہ سہارا گیا ہے، ہر قوت جسم کے نصف وزن کے مساوی ہے اور ان میں سے ایک افقی طور پر عمل کرتی ہے اور دوسری مستوی کے متوازی ۔ مستوی کا میلان معلوم کرو ۔

۵ ۔ ایک چکنے مائل مستوی کا میلان °۳۰ ہے اور اس پر ایک جسم افقی طور پر عمل کرنے والی قوت ف سے سہارا گیا ہے ۔ دوسری کونسی سمت میں قوت ف عمل کر سکتی ہے اور جسم کو سہار سکتی ہے ۔ ان دو صورتوں میں مستوی پر کے دباؤ کا مقابلہ کرو۔

(۵۷) ۶ ۔ دو چکنے مستوی جن کے میلان عہ اور جہ ہیں ایک افقی خط ا ب پر ملتے ہیں ۔ ا ب کے ایک نقطہ پر ایک چھوٹا چکنا حلقہ ہے جس میں سے ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے دونوں سروں پر وزن بند ہے ہیں، ان میں سے ایک وزن ایک مستوی پر اور دوسرا دوسرے مستوی پر ہے اور یہ اوزان اور حلقہ ایک ہی انتصابی مستوی میں ہیں ۔ اگر اوزان توازن میں ہوں تو ڈوری کا تناؤ اور روزنون کی نسبت معلوم کرو ۔

۷ ۔ وزن و₁ اور و₂ کے دو چکنے حلقے ایک ڈوری سے مربوط ہیں اور ایک دائری تار کی محدب جانب انتصابی مستوی میں متوازن ہیں ۔ ثابت کرو کہ اگر دائرہ کے مرکز پر ڈوری کے محاذی زاویہ عہ بنے تو انتصابی کے ساتھ ڈوری کا زاویہ میلان طہ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے :

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{و}_1 + \text{و}_2}{\text{و}_1 - \text{و}_2}\ \text{مم}\ \frac{\text{عہ}}{2}$$

۸ ۔ دو اوزان ایک کھردرے مستوی پر ساکن ہیں، یہ اوزان ایک ڈوری سے مربوط ہیں جو مستوی کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے ۔ اگر زاویہ میلان عہ، زاویہ رگڑ صہ سے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ کمتر وزن کو بڑے وزن کے ساتھ کم سے کم نسبت $\frac{\text{جب}\,(\text{عہ} - \text{صہ})}{\text{جب}\,(\text{عہ} + \text{صہ})}$ ہے ۔

۹۔ دو وزن ایک کھُردرے دوہرے مائل مُستوی پر ایک دوسرے کو ایک مہین ڈوری کے ذریعہ جو راس پر سے گذرتی ہے سہارے ہوئے ہیں اور دونوں اوزان عین حرکت کرنے کو ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مُستوی کو جھکایا جائے یہانتک کہ دونوں اوزان پھر حرکت کرنے کو ہوں تو وہ زاویہ جس میں سے مُستوی کو جھکانا ہوگا رگڑ کے زاویہ کا دُگنا ہوگا۔

۱۰۔ دو اوزان ف اور ق ایک ہی مادی شئے سے بنائے گئے ہیں، یہ اوزان ایک دوہرے مائل مُستوی پر ساکن ہیں اور ایک مہین ڈوری کے ذریعہ جو مشترک راس پر سے گذرتی ہے مربوط ہیں۔ اِن میں سے وزن ق مُستوی کے نیچے حرکت کرنے کو ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو توازن کے خلل کے بغیر ف میں جمع کیا جا سکتا ہے حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{ف جب ۲ صہ جب (عہ + بہ)}}{\text{جب (عہ − صہ) جب (بہ − صہ)}}$$

جہاں مُستویوں کے زوایائے میلان عہ اور بہ ہیں اور زاویہ رگڑ صہ ہے۔

۱۱۔ ایک جسم ایک کھُردرے مائل مستوی پر ایک قوت کے ذریعہ جو مستوی میں عمل کرتی ہے سہارا گیا ہے۔ اگر قوت کی کم سے کم مقدار جبکہ مُستوی افق سے زاویہ عہ پر مائل ہو اُس قوت کی بڑی سے بڑی مقدار کے مساوی ہو جبکہ مُستوی افق سے زاویہ بہ پر مائل ہو تو ثابت کرو کہ رگڑ کا زاویہ $\frac{1}{2}$ (عہ − بہ) ہے۔

۱۲۔ وزن و کے دو مساوی چھلّے ایک پَردے کی ڈنڈی پر حرکت کر سکتے ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ چھلّے طول ل کی ایک ڈھیلی ڈوری سے مربوط ہیں جو ایک چکنے چھلے کے ذریعہ وزن وَ کو سہارتی ہے۔ چھلّے ایک دوسرے سے کتنے فاصلہ پر ہونے چاہئیں کہ وہ ایک دوسرے سے قریب آکر نہ ملیں۔

۱۳۔ مختلف مادی اشیاء سے بنے ہوئے دو اوزان ف اور ق ایک کھُردرے مُستوی پر رکھے گئے ہیں۔ مُستوی کا میلان طہ ہے اور اوزان ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط ہیں جو مُستوی اور افق کے خط تقاطع سے ۴۵° پر مائل ہے۔ دونوں وزن حرکت کے نقطہ پر ہیں۔ ف اور ق کی رگڑ کی قدریں

معلوم کرو اگر یہ معلوم ہو کہ اوپر کے وزن کی قدر نیچے کے وزن کی قدر سے دگنی ہے

۱۴ــ ایک وزنی حلقہ خروج المرکز ز کے ایک چکنے ناقصی تار پر جو انتصابی مستوی میں ہے آزادانہ پھسل سکتا ہے۔ ناقص کا محور اعظم افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے اور ایک ڈوری جو حلقے سے بندھی ہے ناقص کے مرکز پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے اور مساوی وزن کے ایک جسم کو سہارتی ہے۔ ثابت کرو کہ حلقے اور تار کے نقطہ تماس پر تار کا مماس محور اعظم کے ساتھ جو زاویہ فہ بناتا ہے حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{س}\;(\text{فہ}+\text{عہ})\;(\text{قط}^{2}\,\text{فہ}-\text{ز}^{2}) = \text{ز}^{2}\,\text{س}\;\text{فہ}$$

۱۵ــ دو چھوٹے چکنے حلقے جنکے وزن و، وَ ہیں ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط کئے گئے ہیں اور وہ دو ثابت تاروں پر پھسلتے ہیں، ان میں سے پہلا انتصابی ہے اور دوسرا افق سے زاویہ عہ پر مائل ہے۔ ایک وزن ف ڈوری سے باندھ دیا گیا ہے اور اس ڈوری کے دو حصے انتصابی کے ساتھ زاویے طہ، فہ بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مم طہ} : \text{مم فہ} : \text{مم عہ} = \text{وَ} : \text{ف} + \text{و} : \text{ف} + \text{و} + \text{وَ}$$

۱۶ــ نامساوی کمیت کے دو ذرّے ایک تیسرے ذرہ کے ساتھ مہین ناامتداد پذیر ڈوریوں کے ذریعہ باندھ دئے گئے ہیں۔ وہ ایک کھردرے مائل مستوی پر پڑے ہیں اور ڈوریاں تنی ہوئی ہیں اور مستوی میں افقی خط کے ساتھ زاویے عہ، بہ بناتی ہیں۔ کم سے کم افقی قوت کی مقدار اور سمت معلوم کرو جس کو تیسرے ذرہ پر لگانے سے تینوں ذرّے حرکت کرنے لگیں۔

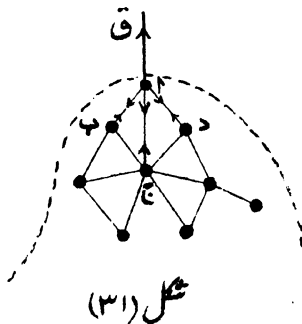
۱۷ــ ایک وزنی ذرہ ایک کھردرے مائل مستوی پر جس کا میلان عہ رگڑ کے زاویہ کے مساوی ہے رکھا گیا ہے۔ ایک ڈوری ذرہ سے باندھ دی گئی ہے جو ایک سوراخ میں سے جو مستوی میں ذرہ سے نیچے پڑا ہے گذرتی ہے لیکن وہ اس نقطہ میں سے گذرنیوالے خط میلان اعظم میں نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سوراخ میں سے ڈوری کو بتدریج کھینچا جائے تو ذرہ ایک خط مستقیم اور ایک نیم دائرہ علی التواتر مرتسم کرے گا۔

(۵۹)

چوتھا باب

ذروں کے نظاموں کا علم سکون

۴۴ — ہم نے ابتک ایک واحد ذرہ پر قوتوں کے عمل سے بحث کی ہے لیکن مسئلوں کی ایک مختلف جماعت پیدا ہوتی ہے جب ہم ایک جسم پر جو ذروں کی ایک بہت بڑی تعداد سے ترکیب یافتہ ہوتا ہے قوتوں کے عمل کا مطالعہ کرتے ہیں جبکہ قوتیں اس طریقہ سے لگائی جائیں کہ وہ جسم کے مختلف ذروں پر عمل کریں۔

فرض کرو کہ قوت ق، ایک جسم کے ذرہ ا پر لگائی گئی ہے جبکہ جسم ذروں ا، ب، ج، د..... کی ایک بڑی تعداد سے ترکیب یافتہ ہے۔ اگر ذرہ ا پر دوسرے ذروں ب، ج، د،..... کا کوئی اثر نہ ہوتا تو ذرہ ا قوت عاملہ کے زیر عمل حرکت کرنے لگتا اور جلد دوسرے ذروں ب، ج، د،... سے جدا ہو جاتا۔ لیکن اگر ذروں ا، ب، ج، د.... سے ایک واحد مسلسل جسم کی ترکیب ہوئی ہے تو ایسا وقوع پذیر نہیں ہوتا۔ فی الحقیقت جوں ہی ذرہ ا، دوسرے ذروں کے لحاظ سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے ذرہ ا اور متصلہ ذروں ب، ج، د،.... کے درمیان اعمال اور تعاملات کے نظامات ظہور پذیر ہو جاتے ہیں۔

شکل (۳۱)

چنانچہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ا پر عمل کرنے والی قوتیں ا کی حرکت کو روکنے کا میلان رکھتی ہیں اور متناظر تعاملات ذروں ب، ج، د، ... میں حرکت پیدا کرنے کا میلان رکھتے ہیں۔ جب ب، ج، د، ... حرکت کی ابتدا کرتے ہیں تو قوتوں کے دیگر نظامات ب، ج، د، ... کے متصلہ ذروں پر عمل کرنے لگتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طرح تمام ذرے حرکت میں آتے ہیں اور صرف ذرہ ا کے ہی حرکت کرنے کی بجائے پورا جسم حرکت کرتا ہے۔

(۶۰) اب ہم غور کریں گے کہ آیا ایسا جسم یا اجسام کا نظام حرکت کرے گا یا ساکن رہے گا جبکہ قوتوں کے نظامات بیرونی جانب سے اس کے مختلف ذروں پر عمل کریں۔ لیکن ہمیں ہمیشہ یہ یاد رکھنا چاہئے کہ وہ قوتیں جو بیرونی جانب سے عمل کرتی ہیں صرف وہی جسم پر عمل کرنے والی نہیں ہیں بلکہ ان کے ساتھ وہ اعمال اور تعاملات بھی ہوتے ہیں جو مختلف ذروں کے درمیان ظہور پذیر ہوتے ہیں۔

۴۵۔ اس آخری واقعہ کا ایک نتیجہ فوراً ظاہر ہے۔ کسی جسم کے ایک ذرہ ا پر ایک قوت لگانا اور اس کے دوسرے ذرہ ب پر ٹھیک اتنی ہی متشابہ قوت لگانا یہ دونوں امور ایک ہی نہیں ہیں۔ کیونکہ اندرونی اعمال اور تعاملات کے نظامات دونوں صورتوں میں مختلف ہوں گے۔ کسی سادہ مثال سے معلوم ہو جائے گا کہ حاصل حرکت بھی بالعموم مختلف ہو گی، مثلاً کرسی کے پشت کے وسطی نقطہ پر کوئی افقی قوت لگائی جائے تو وہ ممکن ہے کرسی کو الٹ دے لیکن اگر اتنی ہی متشابہ قوت کرسی کے پایہ پر لگائی جائے تو وہ کرسی کو زمین پر گھسیٹیگی اور نیز اس کو ایک انتصابی محور کے گرد گھمائے گی۔

وہ محل جہاں ذرہ ہے جبکہ اس پر قوت لگائی جاتی ہے قوت کا نقطہ عمل کہلاتا ہے۔ وہ خط جو اس نقطہ میں سے قوت کی سمت میں کھینچا جائے قوت کا خط عمل کہلاتا ہے۔

کسی قوت کے عمل سے متعلق جتنی چیزیں معلوم ہونی چاہئیں وہ

صریحاً حسب ذیل ہیں :

(ا) اس کی مقدار،

(ب) اس کا نقطہ عمل،

(ج) اس کا خط عمل

معیار

۴۶ ۔ **تعریف** ۔ کسی قوت کا معیار ایک خط کے گرد جو قوت کے خط عمل پر علی القوائم ہو قوت اور اس اقل فاصلہ کا حاصل ضرب ہوتا ہے جو ان دو خطوں کے درمیان ہے ۔

یہ معیار جیسا کہ ہمیں جلد معلوم ہوگا اس خط کے گرد گھمانے کے میلان کی پیمائش کرتا ہے جس کے گرد معیار کی پیمائش کیجاتی ہے، مثلاً اگر ایک ترازو کے بازو کا طول ل ہو تو اس کے سرے پر وزن د کا معیار ترازو کے نصاب کے گرد ل و ہوگا اور ہمیں معلوم ہوگا کہ یہ معیار بازو کو گھمانے کے میلان کی پیمائش کرتا ہے ۔

تعریف ۔ کسی قوت کا معیار ایک خط ل کے گرد جو قوت کے خط عمل پر علی القوائم نہ ہو وہی ہوتا ہے جو ل کے عمود وار مستوی میں قوت کے جزو ترکیبی کا معیار ل کے گرد ہے ۔

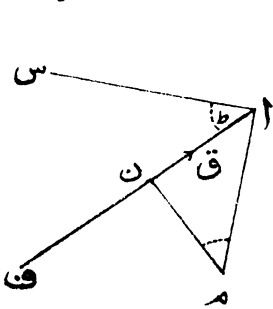
(۶۱) قوت کو دو اجزائے ترکیبی میں یعنے ل کے متوازی اور اس کے عمود وار تحلیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ اول الذکر سے ل کے گرد گھمانے کا کوئی میلان حاصل نہیں ہوگا اور اس لیے صرف دوسرے جزو ترکیبی سے ہی گھمانے کا پورا میلان حاصل ہوتا ہے ۔

مذکرۂ صدر دو تعریفیں کسی خط ل کے گرد کسی قوت ق کے معیار کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں ۔ صریحاً معیار معدوم ہوگا اگر

(ا) ق کا خط عمل، ل کے متوازی ہو،

(ب) ق کا خط عمل، ل کو قطع کرے ۔

کیونکہ ظاہر ہے کہ اِن میں سے کسی صورت میں ل کے گِرد گھمانے کا میلان صفر ہوتا ہے۔

۴۷ ۔ فرض کرو کہ خط ل کاغذ کے مستوی پر عمود ہے اور اِس کو نقطہ م پر قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کاغذ کے مستوی میں ایک قوت ق کا خطِ عمل ف ا ہے اور قوت نقطہ ا کے ذرہ پر عمل کرتی ہے۔ فرض کرو کہ م سے ن ا پر عمود م ن کھینچا گیا ہے۔ تب بموجب تعریف قوت ق کا معیار خط ل کے گِرد ق × م ن ہے۔

فرض کرو کہ زاویہ ف ا س، زاویہ ن م ا کے مساوی کھینچا گیا ہے اور یہ زاویہ ط کے مساوی ہے، اِس لیے ا س، م ا پر عمود ہے۔
اب قوت ق کا معیار خط ل کے گِرد

= ق × م ن
= ق × ا م جم ط
= ا م × ق جم ط
= ا م × ق کا جزوِ تحلیلی خط س ا کی سمت میں۔

شکل (۳۲)

ہم نے فرض کیا تھا کہ ا پر عمل کرنے والی قوت ق ہے، اِس کی بجائے فرض کرو کہ ق، کسی دوسری قوت ر کا جزوِ تحلیلی اُس مستوی میں ہے جو خط ل کے عمود وار ہے۔ اب ل کے گِرد ر کا معیار بموجب تعریف وہی ہے جو ق کا معیار ہے، اور ر کا جزوِ تحلیلی خط ا س کی سمت میں = ق جم ط۔ اِس لیے جو کچھ ثابت ہوا ہے اِس کو شکل ذیل میں رکھا جا سکتا ہے:

ل کے گِرد کسی قوت ر کا معیار جو ا پر عمل کرتی ہے
= ا م × ر کا جزوِ تحلیلی خط س ا کی سمت میں۔

اب س ا سمت میں متعین ہو جاتا ہے کیونکہ وہ ل پر اور نیز ا م پر عمود ہے

جہاں ا م، ا سے ل پر عمود ہے۔ اس لیے معیار کی ایک نئی تعریف ہمیں ملتی ہے جو قبل الذکر تعریف کے بالکل مماثل ہے یعنی:

(۶۲)

کسی خط ل کے گرد ا پر عمل کرنے والی قوت کا معیار دو مقداروں کا حاصل ضرب ہوتا ہے جن میں سے ایک مقدار ا م ہے جو ا سے ل پر عمود ہے اور دوسری مقدار ر کا جزو ترکیبی اُس سمت میں ہے جو ا م اور ل دونوں پر عمود ہے۔

۴۸ ۔ معیار کے اس تخیل سے ہمیں فوراً حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

کسی خط ل کے گرد ا پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ ل کے گرد ان قوتوں کے حاصل کے معیار کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ یہ قوتیں ر۱، ر۲، ر۳ .... ہیں اور ان کا حاصل ر ہے۔ فرض کرو کہ ا م حسب دفعہ (۴۷) ا سے ل پر عمود ہے اور فرض کرو کہ ا س وہ سمت ہے جو ا م اور ل دونوں پر عمود ہے۔ مسئلہ ثابت شدنی یہ ہے کہ

ا م × ر۱ کا جزو ترکیبی ا س کی سمت میں

+ ا م × ر۲ کا " " " "

+ ا م × ر۳ کا " " " "

. . . .

= ا م × ر کا جزو ترکیبی ا س کی سمت میں

اس مساوات کی طرفین کو ا م سے تقسیم کرنے سے مسئلہ صرف یہ رہ جاتا ہے کہ ر کا جزو ترکیبی سمت ا س میں = سمت ا س میں ر۱، ر۲، ر۳ .... کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ، اور یہ بالکل درست ہے۔

اب ہم زیادہ واضح طور پر معلوم کر سکتے ہیں کہ کس طرح ایک قوت کے معیار سے گھمانے کے میلان کا ناپ حاصل ہوتا ہے۔ شکل (۳۲) میں ہم نے ایک خط ل کے گرد جو کاغذ کے مستوی پر عمود ہے اور اس سے نقطہ م پر

ملتا ہے معیار لیا ہے۔ وہ قوت جس کا معیار زیر بحث ہے ایک قوت ر ہے جو ا پر عمل کرتی ہے۔ ا پر تین سمتیں باہم علی القوائم ہوں گی یعنی اس، ام، اور اس خط کی سمت جو ا میں سے ل کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

ر کا معیار ل کے گرد حسب تعریف

ام × ر کا جزو ترکیبی سمت اس میں

ہے۔

اب ر کا جزو ترکیبی سمت ام میں ایک ایسی قوت ہے جس کا خط عمل ل کو قطع کرتا ہے اور اس لیے ل کے گرد جسم کو گھمانے کا میلان پیدا نہیں کر سکتا۔ اسی طرح ر کا جزو ترکیبی اس خط کے گرد جو ا میں سے ل کے متوازی کھینچا گیا ہے ل کے گرد گھمانے کا میلان پیدا نہیں کر سکتا۔ اس طرح ر کو تین اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جن میں سے صرف پہلا جزو ترکیبی یعنے جو اس کی سمت میں ہے ل کے گرد گردش پیدا کرنے کا میلان رکھتا ہے۔ ہم نے پوری قوت ر کے معیار کی تعریف اس طریقہ پر کی ہے کہ وہ قوت کے اجزائے ترکیبی میں سے اس جزو ترکیبی کے معیار کے مماثل ہو جاتا ہے جو گردش پیدا کرنے کا میلان رکھتا ہے۔

یہ یاد رہے کہ معیار کی علامت بھی ہوتی ہے اور مقدار بھی۔ کسی قوت ر کے خط عمل پر حرکت کرنے میں ہم خط ل کے گرد ایک سمت میں گھوم سکتے ہیں یا دوسری سمت میں۔ ہم اس امر پر اتفاق کرتے ہیں کہ جب گھماؤ ایک سمت میں ہو تو ر کا معیار ل کے گرد مثبت سمجھا جائے گا اور دوسری سمت میں ہو تو منفی۔

۴۹ — اگر ایک ذرہ متعدد قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہو تو ان تمام قوتوں کا حاصل صفر ہونا چاہیئے۔ ان مختلف قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ خواہ یہ معیار کسی خط کے گرد لیے جائیں حاصل کے معیار کے مساوی ہوگا اور اس لیے وہ بھی صفر ہونا چاہیئے۔

پس ہم حسب ذیل نتیجہ پر پہنچتے ہیں:

جب ایک ذرہ کسی قوتوں کے زیرِ عمل توازن میں ہو تو کسی خط کے گرد اِن قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔

ذروں کے نظامات توازن میں

۵۰ — فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام متعدد قوتوں کے زیرِ عمل توازن میں ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں دو قسم کی ہوتی ہیں:

(ا) بیرونی قوتیں، یہ وہ قوتیں ہیں جو بیرونی جانب سے ذرہ پر عمل کرتی ہیں مثلاً ذرہ کا وزن۔

(ب) اندرونی قوتیں، یہ وہ قوتیں ہیں جو اِس ذرہ اور نظام کے باقی دیگر ذروں کے درمیان اندرونی طور پر عمل کرتی ہیں۔

اب اگر ذروں کا پورا نظام توازن میں ہے تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر ذرہ جداگانہ طور پر توازن میں ہونا چاہئے۔ پس دفعہ ۳۳ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۶۴)

(ا) کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کسی سمت میں لیے جائیں تو اِن کا مجموعہ معدوم ہونا ہئے۔

اور دفعہ ۴۸ میں ثابت شدہ مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

(ب) کسی واحد ذرہ پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے معیار کسی خط کے گرد لیے جائیں تو اِن کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔

لیکن اگر ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو تو عمل جمع سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام ذروں پر عمل کرنے والی تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ اندرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ بہرحال خود معدوم ہوگا کیونکہ اندرونی قوتیں اعمال اور تعاملات کے ازواج پر مشتمل ہوتی ہیں اور قوتوں کے

کسی ایسے زوج کے اجزائے ترکیبی کسی سمت میں مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ چونکہ کل مجموعہ معدوم ہوتا ہے اور اندرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اس لیے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔

اسی طرح وہ مسئلہ بھی جو بیرونی قوتوں کے معیاروں کے لیے مسئلہ بالا کے جواب میں ہے درست ہے۔ کسی خط ل کے گرد تمام اندرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ ایک عمل اور تعامل کے معیار مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ اندرونی اور بیرونی تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے کیونکہ ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے معیاروں کا ہر مجموعہ جداگانہ صفر ہے۔ پس بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہے۔

اس طرح ہم نے حسب ذیل مسئلے ثابت کر دئے:

جب ذروں کا ایک نظام بیرونی قوتوں کے کسی نظام کے زیر عمل توازن میں ہو تو

(ا) کسی سمت میں اِن تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہوتا ہے،

(ب) کسی خط کے گرد اِن تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

عام زبان میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ مسئلے اس امر کو بیان کرتے ہیں کہ کسی سمت میں بڑھنے کا یا کسی خط کے گرد گھومنے کا کوئی میلان نہیں ہے۔

توضیحی مثال

(۶۵) چرخ اور محور۔ اس آلہ میں جو "چرخ اور محور" کے طور پر مشہور ہے ایک دائری محور ہوتا ہے جو اپنے مرکزی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے اور اس کے ساتھ ایک دائری پہیہ استوار طور پر لگا ہوتا ہے، پہیہ کا مرکز اور محور کا مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ ایک رسی یا ڈوری محور کے گرد لپٹی جاتی ہے اور اس کے سرے پر

ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ایک دوسری رسی یا ڈوری پہیہ کے محیط کے گرد مخالف سمت میں لپٹی جاتی ہے اور اس کے سرے پر بھی ایک وزن لٹکایا جاتا ہے۔ان دو اوزان کی نسبت کو مناسب طور پر منتخب کرکے اس آلہ کو متوازن کیا جاسکتا ہے اس طور پر کہ وہ اپنے محور کے گرد گھومنے کا کوئی میلان نہ رکھے۔

اب ہم اس نظام کے توازن پر غور کرتے ہیں جس میں چرخ اور محور اور رسیوں یا ڈوریوں کے وہ حصے شامل ہیں جو ان کے گرد لپیٹے گئے ہیں۔مسئلہ کو سادہ بنانے کے لیے ہم اس نظام کے وزن کو بالکل نظر انداز کریں گے۔اب بیرونی قوائے عاملہ حسب ذیل ہیں:

(ا) چرخ کے گرد لپٹی ہوئی رسی کا تناؤ،

(ب) محور کے گرد لپٹی ہوئی رسی کا تناؤ،

(ج) ان سہاروں کا عمل جو چرخ اور محور کو گرنے سے بچاتے ہیں۔

فرض کرو کہ اوزان ف اور ق سے تعبیر ہوتے ہیں اس لیے وہ رسیوں کے تناؤ بھی ہیں۔فرض کرو کہ چرخ اور محور کے نصف قطر علی الترتیب ا، ب ہیں۔

اب ہم ریاضیاتی زبان میں اس امر کو بیان کریں گے کہ بیرونی قوائے عاملہ کے معیاروں کا مجموعہ جبکہ انہیں محور کے گرد لیا جائے صفر ہے۔

چرخ پر کی رسی کے تناؤ کا معیار ف ا ہے کیونکہ تناؤ کی مقدار ف ہے جو محور کے علی القوائم عمل کرتا ہے اور ا وہ چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے جو محور اور اس تناؤ کے خط عمل کے درمیان ہے

شکل (۳۲)

اسی طرح قوت (ب) کا معیار — ق ب ہے، منفی علامت اس وجہ سے لی گئی ہے کہ یہ قوت نظام کو اس سمت میں گھمانے کا میلان رکھتی ہے جو اس سمت کے

مخالف ہے جس میں پہلا تناؤ گھمانے کا میلان رکھتا ہے۔

اگر ہم یہ خیال کریں کہ یہ نظام خود محور پر عمل کرنے والی قوتوں سے سہارا ہوا ہے تو قوتوں (ج) کا معیار معدوم ہوگا کیونکہ ان قوتوں کے خطوط عمل اس خط کو قطع کرینگے جس کے گرد معیار لیے جا رہے ہیں۔ اس لیے مطلوبہ مساوات ہے

ف ا - ق ب = ۰

یہ مساوات صرف یہ ظاہر کرتی ہے کہ

[نظام کو گھمانے میں ف کا میلان] - [نظام کو گھمانے میں ق کا میلان] = ۰

اس لیے جب نظام متوازن ہو اس طور پر کہ وہ ساکن رہ سکے تو ہمیں حاصل ہونا چاہئیے

ف : ق = ب : ا

یعنے اوزان نصف قطروں کے بالعکس متناسب ہونے چاہئیں۔ چرخ اور محور کے اصول کی عملی مثالیں ڈنڈا چرخ اور لنگر چرخ ہیں۔

(۶۶)

مثالیں

۱۔ آٹھ ملاح جن میں سے ہر ایک ۰۰ا پونڈ کی افقی قوت سے ایک لنگر چرخ کے بازو پر مرکز سے ۸ فٹ کے فاصلہ پر زور لگا رہا ہے لنگر کو عین اٹھا سکتے ہیں لنگر چرخ کے محور کا نصف قطر ۱۲ انچ ہے۔ اس زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جو لنگر اٹھاتی ہے۔

۲۔ شکل ۳۳ کے آلہ میں وزن ف کو جدا کر لیا گیا ہے اور رسی کے آزاد سرے کو ق پر اسی نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے جس پر دوسری رسی کا سرا بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں یہ نقطہ انتصاباً محور کے نیچے ہوگا۔

۳۔ ایک پہیہ ایک افقی محور کے گرد گھومنے میں آزاد ہے اور اس پر دو رسیاں بندھی ہیں جو اس کے محیط کے گرد مخالف سمتوں میں لپٹی ہوئی ہیں دوسرے دونوں سرے ایک چھوٹے حلقہ سے بندھے ہیں جس سے ایک وزن لٹکا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ جب یہ نظام ساکن ہو تو یہ دو رسیاں انتصابی کے ساتھ مساوی زاوئے بنائینگی۔

۴۔ ایک شخص ایک قفلی گیٹ کو اس کی چول سے ۸ فٹ کے فاصلہ سے ۱۵۰ پونڈ کی افقی قوت لگا کر پانی کے دباؤ کے خلاف عین حرکت دے سکتا ہے۔

اُسے کتنی قوت لگانی ہوگی اگر وہ چول سے ۹ فٹ کے فاصلہ سے دبائے۔

۵۔ ایک پہیہ ایک افقی محور کے گرد آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ اس کے ایک آرے (Spoke) کے سرے پر ۲ پونڈ کا ایک وزن باندہ دیا گیا ہے اور یہ آرا اُفقی کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتا ہے۔ پہیہ کے ایک افقی آرے کے سرے پر کتنا وزن باندہنا چاہئے کہ وہ حرکت کو وقوع پذیر ہونے سے روک سکے۔

۶۔ ایک قنطرہ[1] کو ایک زنجیر کے ذریعہ جو قبضوں سے بعید ترین سرے پر بندھی ہوئی ہے اٹھایا جاتا ہے۔ جب پُل افقی محل میں ساکن ہوتا ہے تو زنجیر پُل کے ساتھ ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے اور زنجیر کا تناؤ جو پل کو حرکت دینے کے لیے ضروری ہے تین ٹن کے وزن کے مساوی ہے۔ بتاؤ کہ زنجیر میں اور کتنا زائد تناؤ مطلوب ہوگا جبکہ ایک ٹن کا وزن پُل کے وسطی نقطہ پر رکھدیا جائے۔

قوتیں ایک مُستوی میں

۵۱ ۔ سکونیات میں سادہ ترین مسئلے ہمیشہ وہ ہوتے ہیں جن میں تمام قوتوں کے خطوط عمل ایک ہی مُستوی میں ہوں۔ کسی ایسے مسئلہ میں صریحاً سب سے زیادہ سہولت اِس میں ہوگی کہ معیاروں کو ایک ایسے خط کے گرد لیا جائے جو اُس مُستوی پر عمود ہو جس میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ کوئی ایسا خط مُستوی کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے تو ہر قوت اُس خط کے کاملاً عمود وار ہوگی جس کے گرد معیار لیے جا رہے ہیں اور اِس لیے معیار قوت اور اُس چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ کا حاصل ضرب ہوگا جو قوت کے خط کے عمل کا نقطہ ن سے ہے۔

جب معیار ایک ایسے محور کے گرد لیے جاتے ہیں جو قوتوں کے مُستوی کو علی القوائم نقطہ ن پر قطع کرتا ہے تو اکثر یہ کہا جاتا ہے کہ معیار نقطہ ن کے گرد لئے گئے ہیں اور اِس صورت میں اُس عمود کو جو نقطہ ن سے قوت کے خط عمل پر کھینچا جاتا ہے قوت کے معیار کا بازو کہتے ہیں۔ (۶۷)

۵۲ ۔ مسئلہ ۔ جب تین قوتیں ایک جسم پر یا اجسام کے ایک نظام پر

[1] Drawbridge

ایک مستوی میں عمل کرکے اس کو توازن میں رکھیں تو یہ تین قوتیں ایک نقطہ پر ملنی چاہئیں۔

فرض کرو کہ قوتیں ف، ق، ر ہیں اور فرض کرو کہ ف اور ق نقطہ ا پر متقاطع ہوتی ہیں۔ اب ا کے گرد قوتوں ف، ق، اور ر کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہئے۔ ہم جانتے ہیں کہ ف اور ق کے معیار معدوم ہوتے ہیں۔ اس لیے ا کے گرد ر کا معیار معدوم ہونا چاہئے یعنی ر کو نقطہ ا میں سے گذرنا چاہئے یا بالفاظ دیگر یہ تین قوتیں ایک واحد نقطہ پر متقاطع ہونی چاہئیں۔

اس اصول کا اطلاق سکونیاتی مسئلوں کو حل کرنے کے لیے اکثر خود کافی ہوتا ہے کیونکہ قوائے عاملہ تین قوتوں میں تحویل کی جا سکتی ہیں۔

توضیحی مثالیں

۱۔ Seesaw ۔ وزن و۱، و۲ کے دو آدمی ایک تختہ پر کھڑے ہیں جو ایک کھردرے سہارے پر جس کے گرد وہ آزادانہ گھوم سکتا ہے ٹکا ہوا ہے۔ تختہ کا وزن نظرانداز کرکے معلوم کرو کہ آدمیوں کو کہاں کھڑے ہونا چاہئے کہ تختہ متوازن ہو۔

قوتوں کو ایک مستوی سطح میں جو تختہ کے مرکزی خط میں سے انتصاباً گذرتی ہے عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔ یہ قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن و۱ جو ایک شخص کا ہے جو ایک سرے پر ہے۔

(ب) وزن و۲ جو دوسرے شخص کا ہے جو دوسرے سرے پر ہے،

(ج) تختہ اور اس کے سہارے کے درمیان تعامل۔

شکل (۴۴)

فرض کرو کہ سہارے سے آدمیوں کے فاصلے ا، ب ہیں۔ اب سہارے کے نقطہ کے گرد معیار لینے سے

و ا − و ۲ ب = ۰

اِس لئے اِن دو آدمیوں کو سہارے سے ایسے فاصلوں پر کھڑے ہونا چاہئے جو اِن کے اوزان کے بالعکس متناسب ہوں۔

یاد رہے کہ اِس مسئلہ میں نظام پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں جو ایک نقطہ پر ملتی ہیں، یہ نقطہ لاتناہی پر ہے۔

(۶۸) ۳ ۔ سروتہ ۔ یہ معلوم کیا گیا کہ چھالیہ کی ایک ڈلی پر ۱۰۰ پونڈ کا وزن رکھنے سے وہ عین پھوٹتی ہے۔ معلوم کرو کہ ایک سروتہ کے بازوؤں کے سِروں پر کتنی قوت لگائی جائے کہ چھالیہ پھوٹ جائے جبکہ وہ قبضہ سے $\frac{1}{2}$ انچ کے فاصلہ پر رکھی ہوئی ہو اور بازو ۶ انچ لمبے ہوں۔

فرض کرو کہ ہر بازو کے انتہائی سِرے پر قوت ق لگانے سے وہ چھالیہ کو پھوڑنے کے لیے عین کافی ہوتی ہے۔ اِس لیے جب بازو کے سِرے پر قوت ق لگائی جاتی ہے تو چھالیہ اور بازو کے درمیان دباؤ ۱۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہونا چاہئے۔ اِس طرح سروتہ کے کسی ایک بازو پر بیرونی جانب سے عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہوں گی:

(ا) قوت ق جو بازو کے سِرے پر لگائی گئی ہے،

(ب) ۱۰۰ پونڈ وزن کا دباؤ جو چھالیہ بازو پر قبضہ سے $\frac{1}{2}$ انچ فاصلہ پر لگاتی ہے،

(ج) تعامل قبضہ پر۔

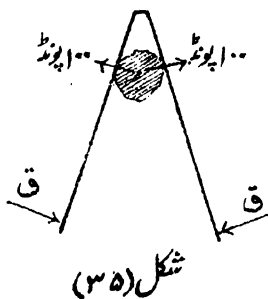
سروتہ کا وزن یہاں نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

شکل (۳۵)

قبضہ کے گرد معیار لینے سے

$$۶ \times ق = \frac{1}{2} \times ۱۰۰ \text{ پونڈ وزن}$$

اِس لیے ق = $\frac{1}{3}$ ۸ پونڈ وزن

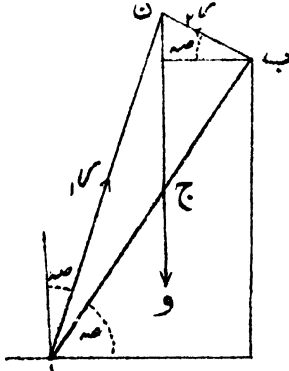
نوٹ ۔ جب کوئی نامعلوم قوت مفروضات میں داخل ہو نہ جواب میں

مطلوب ہو مثلاً قوت (ج) تو ہم ہمیشہ ایسی مساواتیں حاصل کرسکتے ہیں جن میں یہ قوت واقع نہ ہو اور یہ اس طرح کہ ہم اُس نقطہ کے گِرد معیار لیتے ہیں جو اِس قوت کے خطِ عمل میں واقع ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر ایسی دو قوتیں واقع ہوں تو ہم اِن کے خطوط عمل کے نقطہ تقاطع کے گِرد معیار لیکر وہ مساوات حاصل کرتے ہیں جن میں یہ قوتیں شامل نہیں ہوتیں۔

۳۔ ایک سیڑھی ایک کھردرے افقی مستوی پر ایک کھردری انتصابی دیوار کے سہارے جھکی کھڑی ہے اور اِس کے سِروں کے نقاط تماس بھی اُتنے ہی کھردرے ہیں یہ معلوم کرو کہ ایک شخص سیڑھی پر کتنی دور بغیر پھسلے چڑھ سکتا ہے، یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ سیڑھی کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

اِس نظام پر جس میں شخص اور سیڑھی شامل ہیں عمل کرنے والی قوتیں تین ہیں:

(ا) تعامل افقی مستوی کے ساتھ،

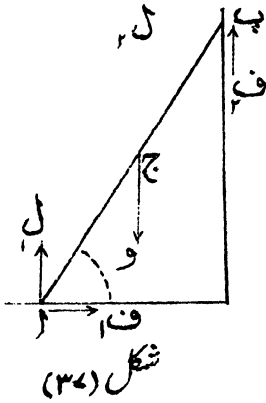
(ب) تعامل انتصابی دیوار کے ساتھ،

(ج) شخص کا وزن۔

یہ تمام قوتیں ایک مستوی میں ہیں۔ اس لیے دفعہ ۵۲ کے مسئلہ کی رُو سے اِن کے خطوط عمل ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں۔

شکل میں فرض کرو کہ سیڑھی ا ب ہے، شخص کا محل ج، اور ن وہ نقطہ جس پر تین قوتیں ملتی ہیں۔

شکل (۳۶)

اِس لیے ن ج انتصابی ہے، اور ا، ب پر کے تعاملات کے خطوط عمل ا ن، ب ن ہیں۔ جب پھسلن عین شروع ہونے کو ہو تو ان میں سے ہر تعامل کو عمود کے ساتھ رگڑ کے زاویہ کے مساوی زاویہ بنانا چاہئیے۔ فرض کرو کہ رگڑ کا یہ زاویہ صہ ہے اور فرض کرو کہ سیڑھی کا میلان افق کے ساتھ عہ ہے۔ اب مثلث ا ج ن کے علم ہندسہ کی رو سے

$$\frac{\text{ا ج}}{\text{جب صہ}} = \frac{\text{ا ن}}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{2} + \text{عہ}\right)}$$

اور چونکہ ان ب ایک قائمہ زاویہ ہے اسلیے

ان = اب جم (π/۲ - صہ - عہ)

اس طرح اج = ان جب صہ قط عہ

= اب جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ

اسلئے پھسلن شروع ہوگی جوں ہی شخص اتنی بلندی پر چڑھ جائیگا جو پوری بلندی کا جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ گنا ہے۔

وہ شرط کہ شخص سیڑھی کے سرے پر بغیر پھسلے پہنچ جائے یہ ہے کہ جب صہ جب (صہ + عہ) قط عہ اکائی سے بڑا ہو یعنی

جب صہ جب (صہ + عہ) > جم [(صہ + عہ) - صہ]

> جب صہ جب (صہ + عہ) + جم صہ جم (صہ + عہ)

اس لئے شرط کے پورا ہونے کے لیے جم صہ جم (صہ + عہ) کو منفی ہونا چاہیے یعنی صہ + عہ، ۹۰° سے بڑا ہونا چاہئے۔ اس طرح سیڑھی اور انتصابی کا درمیانی زاویہ رگڑ کے زاوئے سے چھوٹا ہونا چاہئے۔ یہ شکل سے بھی ظاہر ہے کیونکہ جب شخص ب پر پہنچ جاتا ہے تو دو قوتیں یعنے ب پر کا تعامل اور شخص کا وزن دونوں ب میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے تیسری قوت بھی ب میں سے گذرنی چاہئے یعنی ا پر کے تعامل کا خط عمل اب ہونا چاہئے اور اگر سیڑھی عین یہاں پھسلتی ہے تو اب اور انتصابی کے درمیان زاویہ صہ ہونا چاہئے۔

شکل (۳۷)

۴۔ اگر مثال ماسبق میں سیڑھی کے پھسلے بغیر شخص کسی نقطہ ج تک چڑھ جائے تو ا اور ب پر کے تعاملات کیا ہوں گے؟

یہاں یہ معلوم نہیں ہے کہ تعاملات عمادوں کے ساتھ کیا زاوئے بناتے ہیں صرف یہ معلوم ہے کہ یہ زاوئے رگڑ کے زاوئے سے چھوٹے ہیں۔

فرض کرو کہ ہم ا پر کے تعامل کو دو اجزائے ترکیبی ل۱، ف۱ میں اور ب پر کے تعامل کو دو اجزائے ترکیبی ل۲، ف۲ میں تحلیل کرتے ہیں، یہ اجزائے ترکیبی افقی اور انتصابی ہیں حسب شکل۔ اب اس نظام پر جو شخص اور سیڑھی سے ترکیب یافتہ ہے عمل کرنے والی قوتیں پانچ ہیں:

ل، ف، ل، ف، اور و

انتصاباً تحلیل کرنے سے

و ـ ل ـ ف = ۰ ، .... (ا)

افقاً تحلیل کرنے سے

ف ـ ل = ۰ ، .... (ب)

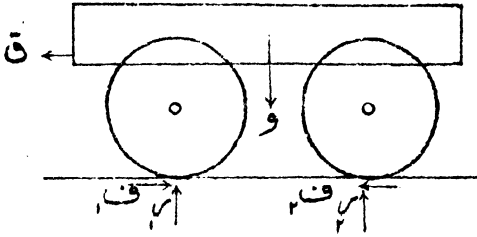
ا کے گرد معیار لینے سے

و = اج جم عہ ـ ف × اب جم عہ ـ ل × اب جب عہ = ۰ ، .... (ج)

چار مقداریں معلوم کرنی ہیں اور ابتک صرف تین مساواتیں حاصل ہوئی ہیں (۷۰)
بلاشبہ قوتوں کو دوسری سمتوں میں تحلیل کرکے اور دوسرے نقطوں کے گرد معیار لیکر ہم دوسری مساواتیں حاصل کرسکتے ہیں لیکن یہ معلوم ہوگا کہ اس طور پر حاصل کردہ مساواتیں نئی نہیں ہیں بلکہ صرف وہی مساواتیں ہیں جن کا درست ہونا اُن مساواتوں میں مضمر ہے جو اوپر حاصل کی جاچکی ہیں ۔ اِس طرح قوتوں کو تحلیل کرنے اور معیاروں کو لینے سے ہم تین سے زیادہ غیر تابع مساواتیں حاصل نہیں کرسکتے اور یہ مساواتیں چار نامعلوم مقداروں کو متعین کرنے کے لیے کافی نہیں ہیں ۔

ہم نے یہاں ایک ایسا مسئلہ پیش کیا ہے جو اُن طریقوں سے جو اس باب میں سمجھائے گئے ہیں حل نہیں ہوسکتا اور اس کے حل کے لیے قوتوں کے اُن نظاموں پر غور کرنے کی ضرورت ہے جو اجسام کے مختلف ذرات کے درمیان پیدا ہوتے ہیں ۔ طالب علم کو اِس حقیقت کا جان لینا ضروری ہے کہ ایسے مسئلے موجود ہوتے ہیں اگرچہ وہ اِن کو فی الحال حل کرسکنے کے قابل نہ ہو ۔

۵ ـ قوت جو گاڑی کو کھینچنے میں مطلوب ہوتی ہے ۔ اِس مسئلہ کو سادہ سے سادہ بنانے کے لیے فرض کرو کہ گاڑی چار مساوی پہیوں پر بنائی گئی ہے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ا ہے اور ہر ایک نصف قطر ب کے محور کے گرد گردش کرتا ہے اور فرض کرو کہ پہیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر ہر پہیہ کے لیے

وہی ہے ۔ فرض کرو کہ قوت ق کو اتفاقاً لگانے سے وہ گاڑی کو حرکت میں لانے کے لیے عین کافی ہوتی ہے ۔

شکل (۳۸)

اول پوری گاڑی کے توازن پر غور کرو ۔ کسی نظام پر عمل کرنے والی قوتوں کو شمار کرنے کا سب سے زیادہ سہولت بخش طریقہ یہ ہے کہ پہلے ہم اپنے تصور میں ایک ایسا قالب لیں جو نظام پر عین ٹھیک بیٹھتا ہو اور پھر اس کی پوری سطح پر چلکر وہ قوتیں دیکھتے جائیں جو اس کے مختلف نقطوں پر عمل کرتی ہیں ۔ یہ قوتیں اور پورے نظام کا وزن ملکر قوتوں کا کل نظام حاصل ہوگا ۔ اس طریقہ سے گاڑی پر عمل کرنے والی قوتوں کو معلوم کیا جائے تو وہ حسب ذیل حاصل ہوتی ہیں :

(ا) اس کا وزن و ،

(ب) افقی قوت عاملہ ق ،

(ج) پہیوں اور زمین کے درمیان تعاملات ۔ فرض کرو کہ ہر تعامل کو ایک انتصابی جزو ترکیبی م اور ایک افقی جزو ترکیبی ف میں تحلیل کیا گیا ہے ۔ فرض کرو کہ پہلے پہیہ اور زمین کے درمیان جو تعامل ہے اس کے اجزائے ترکیبی کو ف۱ م۱ سے تعبیر کیا گیا ہے، دوسرے پہیہ کے لیے متناظر مقداروں کو ف۲، م۲ سے اور علیٰ ہذا القیاس ۔

(۷۱) (پہیہ اور زمین کے درمیان عمل کرنے والی رگڑ کی قوت کے متعلق ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ حرکت وقوع پذیر ہونے کو ہے لیکن یہ حرکت زمین اور پہیہ کے درمیان

پھسلن کی قسم کی نہیں ہے اور اس لیے کسی پہیہ کے لیے ف کو جو نسبت ں کے ساتھ ہے وہ پہیہ اور زمین کے درمیان رگڑ کی قدر نہیں ہے۔)

وہ قوتیں جو اوپر شمار کی گئی ہیں گاڑی کو توازن میں رکھتی ہیں۔ اس لیے کسی سمت میں ان کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے اور اسی طرح کسی خط کے گرد ان کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔ افقاً اور انتصاباً تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ق = ف_۱ + ف_۲ + ف_۳ + ف'_۴ \ldots\ldots (ا)$$

$$و = ں_۱ + ں_۲ + ں_۳ + ں'_۴ \ldots\ldots (ب)$$

کسی خط کے گرد معیار لینے سے کچھ بھی فائدہ نہ ہوگا، چونکہ ق کا خط عمل معلوم نہیں ہے اس لیے ہم اس کا معیار معلوم نہیں کر سکتے۔

ثانیاً ایک واحد پہیہ کے توازن پر غور کرو۔ پہیہ زمین کو مس کرتا ہے اور محور کو بھی کسی نقطہ ج پر مس کرتا ہے۔ (ہم محور کو ایک ایسے نصف قطر کا دائرہ خیال کر سکتے ہیں جو پہیہ کے ناف کے اندرونی دائرہ کے نصف قطر سے بہت ہی خفیف فرق رکھتا ہے)۔ چنانچہ پہیہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

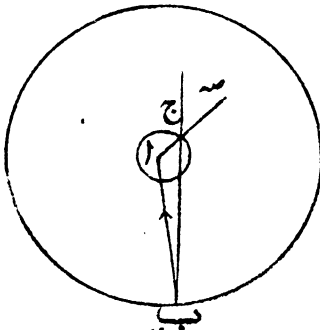
(ا) اس کا تعامل زمین کے ساتھ،

(ب) اس کا تعامل محور کے ساتھ،

(ج) اس کا وزن، جس کو ہم نظر انداز کریں گے کیونکہ وہ گاڑی کے وزن کے مقابلہ میں ناقابل قدر ہے۔

اس تیسری قوت کو نظر انداز کرتے سے دو قوتیں رہ جاتی ہیں جو مساوی اور مخالف ہونی چاہئیں۔ چنانچہ ہر ایک کا خط عمل

شکل (۳۹)

وہ خط ہے جو ب اور ج کو ملاتا ہے جو علی الترتیب زمین اور محور کے ساتھ پہیہ کے نقاط تماس ہیں۔ چونکہ ج پر پھسلن عین وقوع پذیر ہونے کو ہے اس لیے ج پر کا تعامل، ج پر کے عماد ا ج کے ساتھ زاویہ صہ بنائیگا یعنی رگڑ کے زاویہ کے مساوی

اِس طرح زاویہ ب ج ا ، صہ کے مساوی ہے۔

مثلث ا ج ب میں ا ج = ب ، ا ب = ﻟ اور زاویہ ا ج ب

= صہ۔ اِس لیے

$$\frac{ﻟ}{\text{جب صہ}} = \frac{ب}{\text{جب ا ب ج}}$$

لیکن چونکہ ب ج پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی ، ا ب کے

متوازی اور اِس کے عمود وار ، $گ_۱$ اور $ف_۱$ ہیں اِس لیے

$$\text{مس ا ب ج} = \frac{ف_۱}{گ_۱}$$

اِس طرح $$\frac{ف_۱}{گ_۱} = \text{مس ا ب ج}$$

$$= \frac{\text{جب ا ب ج}}{\sqrt{۱ - \text{جب}^۲ \text{ ا ب ج}}}$$

$$= \frac{\text{ب جب صہ}}{\sqrt{ﻟ^۲ - ب^۲ \text{ جب}^۲ \text{صہ}}}$$

اب چونکہ صہ ، ﻟ ، اور ب ہر پہیہ کے لیے وہی فرض کئے گئے ہیں اِس لیے

(۷۲)

$$\frac{\text{ب جب صہ}}{\sqrt{ﻟ^۲ - ب^۲ \text{جب}^۲ \text{صہ}}} = \frac{ف_۱}{گ_۱} = \frac{ف_۲}{گ_۲} = \frac{ف_۳}{گ_۳} = \frac{ف_۴}{گ_۴}$$

$$= \frac{ف_۱ + ف_۲ + ف_۳ + ف_۴}{گ_۱ + گ_۲ + گ_۳ + گ_۴}$$

$$= \frac{ق}{و}$$ ، مساواتوں (ﻟ) اور (ب) کی رُو سے

اس لیے $$ق = \frac{\text{و ب جب صہ}}{\sqrt{ﻟ^۲ - ب^۲ \text{ جب}^۲ \text{ صہ}}}$$ ، .... (ج)

اِس مساوات سے مطلوبہ افقی قوت حاصل ہوگی۔

ب کی قیمت جو محور کا نصف قطر ہے بالعموم ا کے مقابلہ میں جو پہیہ کا نصف قطر ہے چھوٹی ہوگی ۔ اس لیے بغیر کسی قابل قدر خطا کے ہم اُ کے مقابلہ میں ب۲ جب۲ صہ کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور مساوات (ج) کے نسب نما میں صرف ا رکھ سکتے ہیں ۔ چنانچہ یہ مساوات اب ہوجاتی ہے

$$ق = \frac{و ب جب صہ}{ا}$$

$\frac{ب}{ا}$ کو بہت چھوٹا کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ گاڑی کو بہت ہی آسانی سے چلایا جا سکتا ہے ۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ اگر پہیہ اور محور کے درمیان اتنی بڑی رگڑ بھی ہو کہ رگڑ کی قدر کو لامتناہی سمجھا جا سکے تو بھی جب صہ = ۱ اور اس لیے

$$ق = \frac{و ب}{ا}$$

اور اس لئے گاڑی کھینچنے کے لیے جو قوت درکار ہوگی وہ پھر بھی اُس قوت کے مقابلہ میں چھوٹی ہوگی جو اتنے ہی وزن کو کافی چکنی سطح پر کھینچنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے ۔

اِس تحلیل میں ہم نے مان لیا ہے کہ پہیئے زمین کو صرف اپنے زیر زمین نقطوں پر مس کرتے ہیں ۔ یہ بڑی حد تک اُس صورت میں صحیح ہے جبکہ فولادی پہیئے فولادی پٹریوں پر لڑھک رہے ہوں لیکن اس کا اطلاق اُس مسئلہ پر نہیں ہوتا جبکہ معمولی بنڈی نرم سڑک پر حرکت کر رہی ہو کیونکہ پہیے کچھ حد تک سڑک میں دھنسے رہتے ہیں ۔ فی الحقیقت اگر مندرجۂ بالا تحلیل میں وہ سب واقعات شامل کر لئے جائیں جو ایسی صورت میں پیش آتے ہیں تو یہ ظاہر ہے کہ گاڑی کو کھینچنے میں جو قوت مطلوب ہوگی وہ سڑک کی حالت پر منحصر ہوگی ۔

مثالیں

۱ ۔ ۲۵۰ پونڈ کا ایک وزن ایک ہلکے ڈنڈے سے جو دو آدمیوں کے

کندھوں پر ہے لٹکا ہوا ہے اور یہ آدمی اسے افقی محل میں لیجا رہے ہیں۔ اگر آدمی ایک دوسرے سے ۱۰ فٹ کے فاصلہ سے چلیں اور وزن قریب تر آدمی سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو معلوم کرو کہ ہر شخص کتنا وزن لیے جا رہا ہے۔

۲ — ایک وزن ایک ہلکے ڈنڈے سے جو دو ثابت سہاروں پر رکھا ہوا ہے لٹکایا گیا ہے۔ سہاروں کے درمیان فاصلہ ۶ فٹ ہے۔ وزن کو ایک سہارے سے ۶ انچ قریب تر حرکت دینے پر اِس سہارے پر کا دباؤ بقدر ۱۰ پونڈ کے بڑھ جاتا ہے۔ وزن کی مقدار کیا ہے؟

۳ — ایک ترازو کے دو پلڑوں میں سے ہر ایک کا وزن ۸ اونس ہے اور ہر ایک نصاب سے ۷ انچ کے فاصلہ پر ڈنڈی سے لٹکا ہوا ہے۔ ایک بے ایمان تاجر ایک پلڑے کو نصاب سے نصف انچ قریب تر کرتا ہے اور اِس میں کچھ وزن کا اضافہ کر دیتا ہے تاکہ دونوں پلڑے متوازن ہو جائیں۔ یہ اضافہ شدہ وزن معلوم کرو اور بتاؤ کہ اُس کی اِس بے ایمانی سے اُس کو کتنا زیادہ فائدہ ہوگا۔ (۷۴)

۴ — ایک ترازو کی ڈنڈی کے ایک سرے سے ۲۰ اونس کا ایک وزن لٹکایا گیا ہے۔ ڈنڈی کے دوسرے سرے پر نصاب سے مساوی فاصلہ پر ایک ڈوری باندھ دی گئی ہے جو افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے۔ اِس ڈوری کو کس قوت سے کھینچنا چاہیئے کہ ترازو کی ڈنڈی افقی محل میں رہے۔

۵ — ۸ فٹ لمبے ڈنڈے کو ایک جسم کے ہٹانے میں استعمال کرنا ہے، یہ معلوم ہے کہ اِس جسم پر ۵۰۰ پونڈ وزن کی ایک قوت انتصاباً اوپر وار لگانے سے اسکو ہٹایا جا سکتا ہے۔ ڈنڈے کے سرے سے کس قدر قریب نصاب کو رکھنا چاہیئے کہ ۱۴۰ پونڈ وزن کا ایک شخص اِس کے دوسرے سرے پر کھڑے رہ کر مطلوبہ قوت لگا سکے۔

۶ — ناقابل قدر وزن کا ایک میز متعدد پایوں پر قائم ہے۔ ایک وزنی ذرہ میز پر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ میز الٹ جائیگا اگر ذرہ میں سے گذرنے والا انتصابی میز کے نیچے کے فرش سے اُس کثیر الاضلاع کی بیرونی جانب جو فرش پر پایوں کے نقاط تماس کو ملانے سے بنتا ہے ایک نقطہ پر ملے۔

۷۔ ناقابل قدر وزن کا ایک میز تین پایوں پر قائم ہے جو ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔ ایک وزنی ذرہ کو میز پر ایسے محل میں رکھا گیا ہے کہ میز الٹنے نہیں پاتا۔ وزن کا تناسب معلوم کرو جو ہر پایہ پر ہے۔

۸۔ ایک کارڈ افقی محل میں تین مساوی ناامتداد پذیر ڈوریوں کے ذریعہ جو کارڈ کے تین نقطوں ا، ب، ج سے بندھی ہیں اور نیز کارڈ کے اوپر ایک نقطہ ن سے بندھی ہیں لٹکا ہوا ہے اور ا، ب، ج ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔ کارڈ کے کسی نقطہ ق پر جو مثلث کے اندر ہے ایک وزن رکھا گیا ہے۔ ڈوریوں کے تناؤ معلوم کرو۔

۹۔ ایک کارڈ چار مساوی ناامتداد پذیر ڈوریوں سے لٹکا ہوا ہے جو کارڈ کے اندر ایک مربع کے چار نقطوں ا، ب، ج، د میں سے گذرتی ہیں اور چار نقطوں اَ، بَ، جَ، دَ سے بندھی ہیں جو نقطوں ا، ب، ج، د کے انتصاباً اوپر مساوی بلندیوں ف پر ہیں۔ کارڈ پر مربع ا ب ج د کے اندر کسی نقطہ ن پر ایک وزن رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ، ڈوریوں کے اندرونی زوروں (Stresses) پر غور کئے بغیر متعین نہیں ہو سکتے۔

۱۰۔ اگر پچھلی مثال میں ڈوریوں کے اندرونی زور ڈوریوں کو بہت خفیف طور پر وسیع کریں تاکہ کلیہ ہک کی پابندی ہو تو ثابت کرو کہ تناؤ معلوم کئے جا سکتے ہیں اور انہیں معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک مستطیلی تختہ، نصف قطر ا کے ایک کھردرے دائری کندے پر جو افقاً ثابت ہے لڑھکتا ہے۔ دو شخص تختہ کے وسطی نقطہ سے فاصلوں ب، ج پر کھڑے ہیں، ان کے وزن ایسے ہیں کہ تختہ عین افقاً متوازن ہے اور اس کا وسطی نقطہ کندے پر ٹکا ہوا ہے۔ پہلا شخص کندے کے مرکز کی جانب فاصلہ د تک حرکت کرتا ہے کس زاوئے میں سے تختہ گردش کرے گا؟ شخص کتنے آگے بڑھ سکتا ہے قبل اس کے کہ تختہ کندے سے بالکل پھسل پڑے۔

۱۲۔ نصف قطر ا کے دو پہیئے، نصف قطر ب کے ایک محور سے مربوط کئے گئے ہیں اور وہ افقی پٹڑیوں پر جا رہے ہیں۔ محور کے گرد ایک ڈوری لپیٹی گئی ہے

اور اس کا سرا محور سے نکل کر افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر اس ڈوری کو ایک شخص کھینچے تو ثابت کرو کہ پہیے شخص کی جانب حرکت کریں گے یا اس سے پرے ہٹیں گے ہو جب اس کے کہ جم طہ، $\frac{ب}{ا}$ سے بڑا یا چھوٹا ہو۔ کیا ہوگا جبکہ جم طہ $= \frac{ب}{ا}$ ؟

۱۳۔ اگر ایک گاڑی کے پہیوں اور محوروں کا وزن و ہو اور اگر ایسے وَ کے مقابلہ میں جو گاڑی کا کل وزن ہے نظر انداز نہ کیا جا سکے تو ثابت کرو کہ مثال ۵ صفحہ ۱۰۶ کی مساوات (ج) حسب ذیل ہونی چاہیے (۴۷)

$$ق = \frac{(وَ - و) ب جب صہ}{\sqrt{ا^2 - ب^2 جب^2 صہ}}$$

۱۴۔ ایک انجن جس کا وزن ۱۳۴ پونڈ ہے ایک بوگی پر جس کے پہیے اور محور ۴ ٹن وزن کے ہیں اور چلاؤ پہیوں کے دو جوڑوں پر جن کے پہیے اور محور ۱۰ ٹن وزن کے ہیں ساکن ہے۔ بوگی کے محوروں پر ۴۰ ٹن کا وزن اور چلاؤ پہیوں کے محوروں پر ۸۰ ٹن کا وزن بار کیا گیا ہے۔ پہیوں کے نصف قطر علی الترتیب ۲ اَ اور ۷ اَ ہیں۔ ہر محور جہاں وہ محور کے صندوق میں سے گذرتا ہے $\frac{1}{2}$ ۲ انصف قطر کا ہے اور رگڑ کی قدر $\frac{1}{5}$ ہے۔ وہ افقی قوت معلوم کرو جو انجن کو حرکت دینے کے لیے ضروری ہے۔

۱۵۔ مثال ۱۴ میں پٹڑیوں پر چکنائی لگائی گئی ہے تاکہ ان میں اور پہیوں کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{100}$ سے بھی کم ہو۔ ثابت کرو کہ انجن کو، چکنے پٹڑیوں پر پہیوں کو گھسیٹے بغیر چلایا نہیں جا سکتا اور ان حرکی اعمال کی تشریح کرو جن سے اس صورت میں انجن کو حرکت میں لایا جا سکتا ہے۔

ڈوریاں

۵۳ — ڈوریاں، رسیاں اور زنجیریں اکثر اجسام کے ان نظامات کا جزو ہوتی ہیں جو سکونیاتی مسائل سے تعلق رکھتے ہیں اور اس لیے ڈوری (یا رسی یا زنجیر) کے توازن پر غور کرنا ضروری ہے۔ پہلا مسئلہ جس پر ہم غور کریں گے

ایک ایسی ڈوری کا ہے جو ایک سطح پر مثلاً چرخی کے پہیہ پر تنی ہوئی ہو، یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ ڈوری کا وزن نظر انداز کیا جا سکتا ہے اور یہ کہ ڈوری اور سطح کے درمیان تماس تمام نقطوں پر برابر کھردرا ہے۔ نیز یہ بھی فرض کیا جائے گا کہ ڈوری پوری کی پوری ایک مستوی میں ہے۔

فرض کرو کہ ڈوری کے دو متصلہ نقطے ف، ق باہم اس قدر قریب ہیں کہ ڈوری کے حصہ ف ق کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔ اس ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہوں گی:

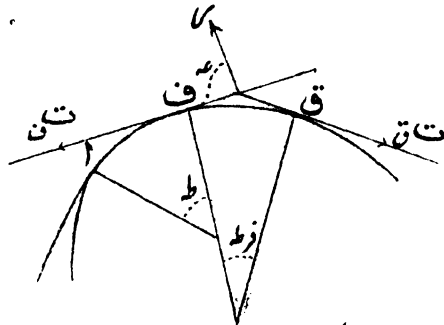
(ا) $ت_ف$، نقطہ ف پر کا تناؤ جو ڈوری کے نقطہ ف پر کے مماس کی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ب) $ت_ق$، نقطہ ق پر کا تناؤ جو ڈوری کے نقطہ ق پر کے مماس کی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ج) تعامل سطح کے ساتھ۔

لامی کے مسئلہ کی رو سے ہر قوت اُس زاویہ کی جیب کے متناسب ہونی چاہئے جو باقی دو قوتوں کے درمیان ہے۔

فرض کرو کہ ا، سطح کا وہ نقطہ ہے جس پر ڈوری سطح کو چھوڑتی ہے۔ (۵۰)

فرض کرو کہ سطح کے عماد نقاط ا، ف، ق پر کھینچے گئے ہیں اور فرض کرو کہ ف پر کا عماد، ا پر کے عماد سے زاویہ ط بناتا ہے۔ اگر نقاط ا، ف، ق اسی ترتیب میں ہوں (دیکھو شکل ۴۰) تو ق پر کا عماد، ف پر کے عماد سے

شکل (۴۰)

ایک ایسا زاویہ بنائے گا جو طہ سے خفیف طور پر بڑا ہوگا، فرض کرو کہ یہ زاویہ طہ + فرطہ ہے تو فرطہ وہ چھوٹا زاویہ ہے جو ف اور ق پر کے عمادوں کے درمیان ہے۔

اس ترقیم کی رو سے تناؤں ت ن اور ت ق کے درمیان زاویہ π - فرطہ ہے۔ فرض کرو کہ تعامل ر اور تناؤ ت ن کے درمیان زاویہ عہ ہے تو تناؤ ت ق اور ر کے درمیان زاویہ π - عہ + فرطہ ہوگا۔ اس لیے

$$\frac{ر}{\text{جب}(\pi - \text{فرطہ})} = \frac{ت_ن}{\text{جب}(\pi - \text{عہ} + \text{فرطہ})} = \frac{ت_ق}{\text{جب عہ}}$$

چونکہ جب (π - عہ + فرطہ) = جب (عہ - فرطہ) اس لیے

$$\frac{ت_ق}{\text{جب عہ}} = \frac{ت_ن}{\text{جب}(\text{عہ} - \text{فرطہ})}$$

اور جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلے سے ہر کسر

$$= \frac{ت_ق - ت_ن}{\text{جب عہ} - \text{جب}(\text{عہ} - \text{فرطہ})}$$

اب ت ق - ت ن، ت کا اضافہ ہے جبکہ طہ، طہ سے طہ + فرطہ تک تبدیل ہوتا ہے اور یہ تفرقی احصاء کی ترقیم میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}} \text{ فرطہ}$$

(۷۶) نیز نسب نما جب عہ - جب (عہ - فرطہ)، جب عہ کا اضافہ ہے جبکہ عہ، عہ - فرطہ سے عہ تک بدلتا ہے اور یہ بھی اسی طریقہ سے لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{\text{فر}(\text{جب عہ})}{\text{فرعہ}} \text{ فرطہ یا جم عہ فرطہ}$$

اس لئے ابتدائی کسر

$$= \frac{\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}} \text{ فرطہ}}{\text{جم عہ فرطہ}} = \text{قط عہ} \frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}}$$

اس لیے $\frac{ت_ق}{جب\ عه} = قطعه \frac{فرت}{فرطه}$

یا $ت_ق = مس\ عه \frac{فرت}{فرطه}$ ، .... (۱۲)

جب انتہا میں ذرہ ف ق کو لاانتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو $ت_ق$ اور $ت_ف$ ناقابل امتیاز ہو جاتے ہیں۔ فرض کرو ان میں سے کسی ایک کو ت سے تعبیر کیا گیا ہے اور اس لیے ت صرف ایک نقطہ پر کا تناؤ ہے جس کا عماد، ا پر کے عماد کے ساتھ زاویہ طه بناتا ہے۔ اگر ڈوری سمت ا ف ق میں عین پھسلنے کو ہو تو نقطہ ق یا ف کسی ایک پر کے عماد اور تعامل ر کے درمیان زاویہ صه بنے گا جو رگڑ کا زاویہ ہے۔ اس لیے حاصل ہونا چاہیے

$$عه = \frac{\pi}{2} - صه$$

اس لیے مس عه = مم صه اور مساوات (۱۲) ہو جاتی ہے

$ت = مم\ صه \frac{فرت}{فرطه}$ ، .... (۱۳)

۵۴ — اگر سطح اور ڈوری کے درمیان تماس کامل چکنا ہو تو صه = ۰ اور اس لیے $\frac{فرت}{فرطه} = ۰$ ۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ت مستقل ہے یعنی ڈوری کے تمام نقطوں پر تناؤ ایک ہی ہے۔ اس لیے کسی ڈوری کا تناؤ نہیں بدلتا جبکہ اُسے ایک چکنی سطح پر سے گذارا جاتا ہے، یہ وہی نتیجہ ہے جو دفعہ ۳۶ میں حاصل ہو چکا ہے۔

۵۵ — بالعموم تماس عملاً کامل چکنا نہیں ہوتا، فرض کرو کہ رگڑ کی قدر مه ہے، اس لیے

مه = مس صه اور مساوات (۱۳) لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرطہ}} = \text{مہ ت}$$

اور تکمل کرنے سے $\frac{\text{فرت}}{\text{ت}} = \text{فر(مہ طہ)}$

$$\text{فر(لوک ت) = فر(مہ طہ)}$$

یا $\text{لوک ت = مہ طہ + مستقل}$

فرض کرو کہ ا پر کا تناؤ ت. ہے تو طہ = ۰ رکھنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ یہ مستقل لوک ت. کے مساوی ہونا چاہئے، اس لیے

$$\text{لوک ت - لوک ت. = مہ طہ}$$

یا $\text{ت = ت.}\ و^{\text{مہ طہ}}$

اگر ڈوری سطح کو مکرر کسی نقطہ ب پر چھوڑے اور اس نقطہ پر کا عماد ا پر کے عماد کے ساتھ زاویہ سہ بنائے تو ب پر کے تناؤ کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت = ت.}\ و^{\text{مہ سہ}}$$

اس لیے تناؤ، ا سے ب تک سطح پر گذرنے میں $و^{\text{مہ سہ}}$ سے ضرب کھا جاتا ہے۔

اگر ڈوری (یا رسی) ایک ستون یا مستول کے گرداگرد لپیٹی جائے تو ہر مکمل پھیر کے لیے تناؤ نسبت $و^{\text{۲ مہ}\pi}$ میں بڑھ جاتا ہے۔ بلوط پر سن کی رسی کے لیے رگڑ کی قدر مورِن (Morin) کی تحقیق کی بموجب مہ = ۰٫۵۳ ہے۔ اس لیے ۲ مہ π = ۳٫۳۴ اور $و^{\text{۲ مہ}\pi}$ = ۲۸٫۱

اِس لیے سن کی رسی کا تناؤ جو بلوط کے ستون کے گرد لپیٹی گئی ہو۔ ہر مکمل پھیر کے لئے تقریباً اٹھائیس گنا بڑھ جاتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک وزن کو ایک رسی سے لٹکایا گیا ہے جو ایک افقی شہتیر کے گرد لپٹی ہوئی ہے اور جو شہتیر سے افقاً نکلتی ہے۔ اِس کا سرا ایک مزدور کے قابو میں ہے

اگر رسی شہتیر کے گرد $\frac{1}{4}$ ۱ مکمل پھیروں میں لپٹی گئی ہو تو مزدور کو کتنی قوت لگانی چاہئے کہ
(ا) وزن پھسلنے نہ پائے،
(ب) وزن اُٹھے، (مہ = $\frac{1}{4}$ فرض کرو)۔

(۷۸) ۲ ــــ $\frac{1}{2}$ ۲ پونڈ کا ایک وزن ایک کھردرے میز پر قائم ہے۔ وزن کے قاعدہ سے ایک رسی باندھ دی گئی ہے جو میز کے کنارے پر سے لٹکتی ہے اور اس کے دوسرے سرے سے ایک دوسرا وزن باندھا گیا ہے جو آزادانہ لٹکتا ہے۔ اگر میز اور وزن کے درمیان اور میز اور ڈوری کے درمیان رگڑ کی قدر علی الترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{4}$ ہو تو معلوم کرو کہ لٹکتا وزن کتنا بھاری ہونا چاہئے کہ دوسرا وزن عین حرکت کر سکے۔

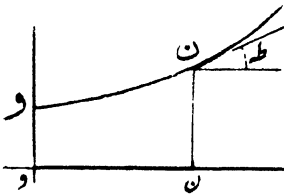
۳ ــــ ۲۵۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک جہاز کے پیٹے سے اُٹھانا ہے۔ ایک رسی جو وزن سے بندھی ہے ایک بھاپ ڈنڈا چرخ کے گرد $\frac{1}{4}$۳ پھیروں میں لپٹی ہوتی ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک ملاح پکڑے ہوئے ہے۔ اس کو رسی کا سرا کتنی قوت سے کھینچنا چاہئے کہ وزن اٹھ سکے جبکہ ڈنڈا چرخ حرکت میں ہو (مہ = $\frac{1}{8}$)۔

۴ ــــ مثال ماسبق میں رسی پر کتنی قوت لگانی چاہئے اگر ڈنڈا چرخ ساکن ہو۔

۵ ــــ یہ معلوم ہوا کہ دو آدمی ایک وزن کو جو ایک رسی سے بندھا ہے سہار سکتے ہیں جبکہ رسی ایک ستون کے گرد تین پھیروں میں لپٹی ہوئی ہو۔ اور صرف ایک آدمی سہار سکتا ہے جبکہ رسی صرف ساڑھے تین پھیروں میں لپٹی ہوئی ہو۔ اگر ہر آدمی ۲۰۰ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچ سکتا ہے، تو سہارے ہوئے وزن کی مقدار معلوم کرو۔

۶ ــــ رسا کھینچنے کے ایک مقابلہ میں (Tug of war) یہ دیکھا گیا کہ رسی عین نازک موقع پر ایک ستون سے رگڑ کھاتی ہے اور اسلئے رسی کے دو حصے ایک دوسرے سے π کا زاویہ بناتے ہیں۔ اگر رسی اور ستون کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{6}$ ہو تو ثابت کرو کہ اس واقعہ سے جیتنے والے گروہ پر اپنی کل کھینچ کا ۰.۲۹ ۰ گنا زائد بار پڑتا ہے۔

جھولا پل

۵۶ - جھولا پل سے ایک دلچسپ سوال ہمارے سامنے پیش ہوتا ہے۔ اس میں پل (جسے افقی فرض کیا گیا ہے) کے وزن کو ایک موٹا تار انتصابی زنجیروں کے ذریعہ جو پل کو تار سے مربوط کرتی ہیں سہارتا ہے۔

فرض کرو کہ زنجیروں اور تار کے اوزان نظر انداز کئے گئے ہیں اور پل کا وزن اس کے طول پر یکساں طور پر منقسم ہے۔

فرض کرو کہ تار کا زیر ترین نقطہ و ہے اور کوئی اور نقطہ ن ہے۔ فرض کرو کہ و، ن کے انتصاباً نیچے پل کے نقطے و، ن ہیں۔ فرض کرو کہ و ن = لا۔ فرض کرو کہ ن پر کا تناؤ ت ہے اور و پر کا ھ۔ فرض کرو کہ ن پر تار کی سمت، افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔

شکل (۴۱)

تار کے ٹکڑے و ن پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں: (۹۷)

(ا) و پر کا تناؤ ھ جو افقاً عمل کرتا ہے،

(ب) ن پر کا تناؤ ت جو افق کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ج) انتصابی زنجیروں کے تناؤ جو سب کے سب انتصاباً عمل کرتے ہیں۔

قوتوں کو افقاً تحلیل کرنے سے

ھ - ت جم طہ = ۰، .... (۱۵)

انتصاباً تحلیل کرنے سے

ت جب طہ - س = ۰

جہاں س اُن تمام زنجیروں کے تناؤں کا مجموعہ ہے جو و اور ن کے درمیان

تار سے لٹک رہی ہیں۔ یہ تناؤ پُل کے حصہ و ن کو سہارتے ہیں اور اگر پُل کا وزن فی اکائی طول و ہو تو و ن کا وزن ولا ہوگا۔ اس لیے س = ولا اور اِس لیے

ت جب طہ = ولا، .... (۱۶)

اِس مساوات اور مساوات (۱۵)

ت جم طہ = ھ، .... (۱۷)

سے مطلوبہ معلومات حاصل ہوں گی۔

وہ شکل معلوم کرنے کے لیے جو تار کی ہونی چاہیئے تاکہ پُل اُفقاً لٹک سکے ہمیں طہ اور لا کے درمیان ایک رشتہ حاصل کرنا ہوگا۔ چنانچہ مساواتوں (۱۶) اور (۱۵) سے ہم ت کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$مس\ طہ = \frac{و}{ھ} لا$$

اگر پُل کے اوپر تار کا ارتفاع ما ہو تو تار کے کسی نقطہ ن کے کارٹیزی محدد لا، ما سمجھے جا سکتے ہیں اور ہم حاصل کرتے ہیں

$$مس\ طہ = \frac{فرما}{فرلا}$$

پس ن کے محدد لا، ما رشتہ

$$\frac{فرما}{فرلا} = \frac{و}{ھ} لا$$

کے ذریعہ مربوط ہیں۔ تکمل کرنے سے

$$ما = \frac{1}{2} \frac{و}{ھ} لا^{2} + ج$$

جہاں ج تکمل کا مستقل ہے۔

مساوات بالا تار کی کارٹیزی مساوات ہے اور یہ آسانی سے معلوم ہوگا (۸۰) کہ وہ وترِ خاص $\frac{2ھ}{و}$ کے ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لیے تار کو

مکافی کی شکل میں لٹکنا چاہیئے۔ افقی تناؤ بڑا ہو تو مکافی کا وتر خاص بھی بڑا ہوگا اور اس لیے تار کا منحنی زیادہ چوڑا ہوگا۔ کامل طور پر مستقیم تار بلا شبہ ناممکنات سے ہے کہ اس صورت میں لامتناہی تناؤ کی ضرورت ہے۔

۵۷ — تار کے کسی نقطہ پر تناؤ معلوم کرنے کے لیے ہم مساواتوں (۱۶) اور (۱۷) کا مربع لیتے ہیں اور متناظر طرفین کو جمع کرتے ہیں۔ اس طرح

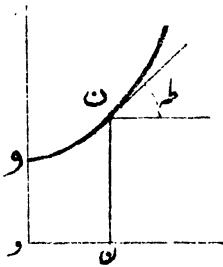
$$ت^۲ = ھ^۲ + و^۲ لا^۲$$

اس مساوات سے اُس نقطہ پر کا تناؤ حاصل ہوگا جس کا فاصلہ مرکز سے لا ہے۔ اگر پُل کا طول ۲ ل ہے تو اس کے کسی ایک سرے پر تناؤ

$$\sqrt{ھ^۲ + و^۲ ل^۲}$$

ہونا چاہیئے۔

زنجیرہ

۵۸ — جھولا پُل کے مسئلہ میں ہم نے تار کے وزن کو نظر انداز کیا ہے۔ ایک دوسرا مسئلہ پیدا ہوتا ہے جبکہ تار پر سوائے اس کے ذاتی وزن کے کوئی اور بیرونی قوتیں عمل نہ کریں۔ یہ مسئلہ صرف اُس ڈوری کا مسئلہ ہے جسکے دو سرے دو ثابت نقطوں سے بند ہے ہوں اور وہ ان نقطوں کے درمیان آزادانہ لٹک رہی ہو۔

شکل (۴۲)

حسب سابق فرض کرو کہ زیریں ترین نقطہ و ہے اور کوئی دوسرا نقطہ ن ہے۔ ڈوری کے حصہ و ن پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) و پر کا تناؤ ھ جو افقاً عمل کرتا ہے،

(ب) ن پر کا تناؤ ت جو افق کے ساتھ زاویہ طہ بنانے والی سمت میں عمل کرتا ہے،

(ج) و ن کا وزن ــ اگر ہم فرض کریں کہ ڈوری کا وزن فی اکائی طول و ہے اور فاصلہ ٹ ن کو س سے تعبیر کریں تو یہ وزن و س ہے جو انتصاباً عمل کرتا ہے۔

(۸۱) افقاً تحلیل کرنے سے

ھ ـ ت جم طہ = ۰، ....(۱۸)

انتصاباً تحلیل کرنے سے

ت جب طہ ـ و س = ۰، ....(۱۹)

منحنی کی وہ شکل معلوم کرنے کے لیے جس میں ڈوری لٹکتی ہے ہمیں طہ اور س میں ربط معلوم کرنا چاہئے۔ ت کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ھ مس طہ = و س

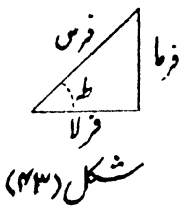
یا اگر ہم ھ/و کی بجائے ایک واحد مستقل م رکھیں تو

س = م مس طہ، ....(۲۰)

یہ منحنی کی مساوات کی ایک شکل ہے جس میں س اور طہ محددوں کے طور پر لئے گئے ہیں۔ اس شکل میں مساوات کو منحنی کی **ذاتی مساوات** کہتے ہیں۔ لیکن اس مساوات کو کارٹیزی شکل میں اخذ کرنے کی ضرورت ہے۔

۵۹ ــ اگر شکل (۴۲) میں نقطہ د کو مبدا، اور محوروں کو افقی اور انتصابی لیا جائے تو حسب ذیل ربط فوراً حاصل ہوتا ہے

فرلا : فرما : فرس = جم طہ : جب طہ : ۱، ....(۲۱)

کیونکہ فرلا اور فرما، ڈوری کے طول کے چھوٹے عنصر فرس کے افقی اور انتصابی ظِل ہیں۔ اب ہم رشتوں (۲۱) کا استعمال مساوات (۲۰) کے متغیروں کو س اور طہ سے س اور ما میں بدلنے کے لیے کریں گے۔

فرس
فرما
طہ
فرلا

شکل (۴۳)

چنانچہ

$$م^۲ س^۲ مم^۲ طہ = س^۲ تم^۲ طہ - س^۲ = س^۲ \left(\frac{فرس}{فرما}\right)^۲ - س^۲$$

اس لیے $س \frac{فرس}{فرما} = \sqrt{س^۲ + م^۲}$

پس $فرما = \frac{س فرس}{\sqrt{س^۲ + م^۲}}$

اور اس کو تکمل کرنے سے

$$ما = \sqrt{س^۲ + م^۲} + مستقل \quad \text{.........} \quad (۲۲)$$

(۸۲) ہم تکمل کے مستقل کو متعین کر سکتے ہیں اگر اس کا فیصلہ ہو جائے کہ مبدا، کو کہاں لینا چاہئے۔ ہم نے ابتک نقطہ و کو مقرر نہیں کیا ہے۔ چونکہ س سے منحنی کی وہ قوس تعبیر ہوتی ہے جو و سے پیمائش کی گئی ہے اس لیے نقطہ و پر س = ۰ اور اس لیے و کا ما محدد (مساوات (۲۲) میں س = ۰ رکھنے سے) حاصل ہوتا ہے

$$ما = م + مستقل$$

فرض کرو کہ ہم و و کو م کے مساوی بناتے ہیں، اس لیے و پر ما = م ۔ اب تکمل کا نامعلوم مستقل صفر ہونا چاہئے۔ اس لیے مساوات (۲۲) ہوگی

$$ما^۲ = س^۲ + م^۲ \quad \text{...........} \quad (۲۳)$$

آخر میں ہمیں متغیروں کو ما اور س سے ما اور لا میں منتقل کرنا ہے۔ وہ رشتہ جس کی مدد سے ہم ایسا کر سکتے ہیں رشتوں (۲۱) سے طہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے اور حسب ذیل ہے

$$(فرس)^۲ = (فرما)^۲ + (فرلا)^۲ \quad \text{..........} \quad (۲۴)$$

چونکہ محصلہ مساوات

$$\text{س} = \sqrt{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}}$$

ہے اس لیے

$$\text{فرس} = \frac{\text{ما فرما}}{\sqrt{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}}}$$

اس مساوات اور مساوات (۲۴) سے فرس کو ساقط کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ما}^{2}(\text{فرما})^{2}}{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}} = (\text{فرما})^{2} + (\text{فرلا})^{2}$$

اس سے

$$(\text{فرلا})^{2} = (\text{فرما})^{2}\left[\frac{\text{ما}^{2}}{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{\text{م}^{2}}{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}}(\text{فرما})^{2}$$

اس لیے

$$\text{فرلا} = \frac{\text{م فرما}}{\sqrt{\text{ما}^{2} - \text{م}^{2}}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۵)$$

اس کو تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{ما}}{\text{م}} = \text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۶)$$

جہاں

$$\text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}} = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{م}}}\right)$$

طالب علم اگر زائدی جیب التمام (جمز) تفاعل سے واقف نہیں ہے تو وہ مساوات (۲۶) کی تصدیق اس طور پر کرسکتا ہے کہ اس کو تفرق کر کے دیکھے کہ آیا مساوات (۲۵) حاصل ہوتی ہے۔

(۸۳) مساوات (۲۶) اُس منحنی کی کارتیزی مساوات ہے جو ڈوری سے بنتا ہے۔ اِس منحنی کو زنجیرہ کہتے ہیں۔

مساوات (۲۳) سے س کی قیمت شکل

$$\text{س}^{۲} = \text{ما}^{۲} - \text{م}^{۲}$$

$$= \text{م}^{۲}\left(\text{جمز}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}} - ۱\right)$$

$$= \text{م}^{۲}\,\text{جبز}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}}$$

میں حاصل ہوتی ہے۔ اِس لیے

$$\frac{\text{س}}{\text{م}} = \text{جبز}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}}$$

$$\text{جہاں}\quad \text{جبز}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}} = \frac{۱}{۲}\left(\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}} - \text{قو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{م}}}\right)$$

۶۰ — قوت نماؤں $\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{\text{م}}}$، $\text{قو}^{-\frac{\text{لا}}{\text{م}}}$ کو پھیلانے سے $\text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}}$ شکل

$$\text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{م}} = ۱ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{۲} + \frac{۱}{۲۴}\left(\frac{\text{لا}}{\text{م}}\right)^{۴} + \cdots\cdots$$

میں حاصل ہوتا ہے۔

جب تک لا چھوٹا ہے ہم اِس سلسلہ کی تمام رقموں کو سوائے پہلی اور دوسری رقم کے نظر انداز کر سکتے ہیں۔ اس طریقہ سے حاصل شدہ قیمت کو استعمال کرنے سے مساوات (۲۶) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ما} = \text{م} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲\text{م}}$$

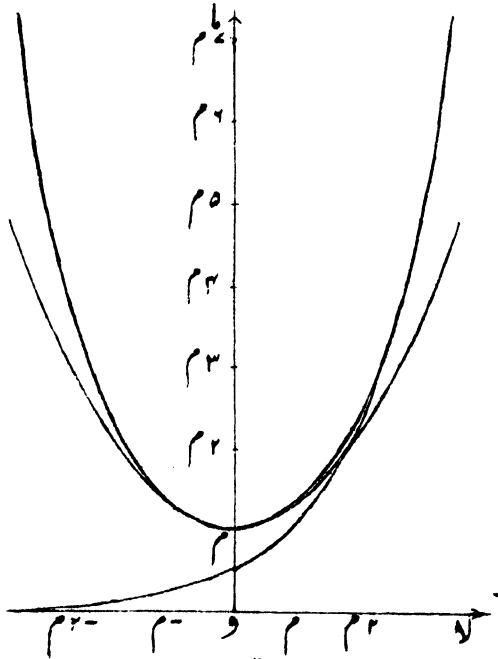
جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جب تک لا چھوٹا رہتا ہے منحنی قریب قریب ایک مکافی پر منطبق ہوتا ہے جس کا وتر خاص ۲ م یا ۲ ھ\ و ہے۔

یہ قطع مکافی وہ ہے جو جھولا پُل کے تار سے بنتا ہے جبکہ تار کا افقی تناؤ ھ ہو

اور خود پل کا وزن فی اکائی طول و ہو۔ بلاشک یہ ظاہر ہے کہ جب تار تقریباً افقی ہوتا ہے تو اس امر سے کوئی فرق نہیں پڑتا کہ تار کا وزن اس کی قوس کے فی اکائی طول و ہے یا فی اکائی طول پر ایک وزن و اس سے لٹکایا گیا ہے تاکہ وہ افقی طور پر رہے۔

جب لا بڑا ہو یعنی اُن نقطوں پر جو زیریں ترین نقطے سے دور واقع ہیں تو بھی ہم زنجیرہ کا ایک سادہ تقرب حاصل کر سکتے ہیں۔ جب لا بہت بڑا ہو تو $\frac{لا}{م}$ بہت بڑا ہوگا اور قو $\frac{لا}{م}$ کی قیمت بہت بڑی ہو جائے گی لیکن قو $-\frac{لا}{م}$ کی قیمت بہت چھوٹی ہو جائے گی۔ اسلئے جمز $\frac{لا}{م}$ کی قیمت تقریباً $\frac{1}{2}$ قو $\frac{لا}{م}$ ہو جائے گی اور زنجیرہ کی مساوات (۲۶)

شکل (۴۴)

$$\frac{ما}{م} = \frac{1}{2} و^{2} م^{ط}$$

ہو جائیگی۔ پس لا کی بڑی قیمتوں کے لئے زنجیرہ قوت نما منحنی پر منطبق ہوتا ہے۔

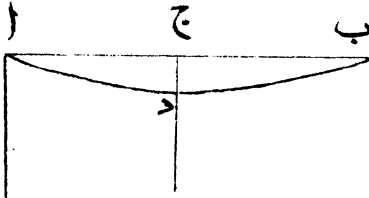
شکل (۴۴) میں زنجیرہ کی شکل دکھائی گئی ہے۔ باریک منحنی حسب ذیل ہیں:

(ا) قطع مکافی، جس پر زنجیرہ تقریباً منطبق ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمتیں چھوٹی ہوں،

(ب) قوت نما منحنی، جس پر زنجیرہ تقریباً منطبق ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمتیں بڑی ہوں۔

(۸۵) **۶۱ ۔ خوب تنی ہوئی ڈوری کا جھوک** ۔ جب کوئی ڈوری یا تار اپنے پورے طول پر تقریباً اُفقاً تنی ہوئی ہو ـــــ مثلاً تار برقی کا تار ـــــ تو جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ ڈوری کافی تقرب تک ایک قطع مکافی بناتی ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ ا، ب، مساوی ارتفاع کے دو ستون ہیں جن کے درمیان ایک تار تنا ہوا ہے۔ فرض کرو کہ ا ب کا وسطی نقطہ ج ہے اور فرض کرو کہ د تار کا وہ نقطہ ہے جو ج کے نیچے انتصاباً واقع ہے۔

ا ج ب

د

اب تشاکل سے تار کا زیر ترین نقطہ د ہوگا اور اس لیے وہ مکافی کا راس ہوگا۔

اس لیے مکافی کی مساوات سے

$$ج ب^{2} = \frac{2 ھ}{و} ج د$$

شکل (۴۵)

کیونکہ اس کا وتر خاص بموجب دفعہ (۶۰) $\frac{2 ھ}{و}$ ہے۔

اِس لیے اگر ف = ا ب تو جھوک ج د، مساوات

$$ج د = \frac{و}{2 ھ} ج ب^{2}$$

$$= \frac{1}{8} \frac{و ف^{2}}{ھ}، \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲۷)$$

سے حاصل ہوگا۔

تار کا طول معلوم کرنے کے لیے چھوٹی مقداروں کے اعلیٰ ترتیبے لینے ہوں گے اور اس لیے ہمیں زنجیرہ کی مساوات کی طرف رجوع ہونا چاہئے۔ چنانچہ

$$س = \frac{1}{2} م \left(و^{\frac{لا}{م}} - و^{-\frac{لا}{م}} \right)$$

$$= لا + \frac{1}{6} \frac{لا^{3}}{م^{2}} + \cdots\cdots\cdots$$

مطلوبہ مقدار س ـ لا ہے یعنی د ب ـ ج ب (شکل ۴۵)۔
جب تار خوب تنا ہوا ہو تو م بہت بڑا ہوتا ہے' اِس لیے ہم س کی وہ رقمیں نظرانداز کرسکتے ہیں جو اوپر لکھی ہوئی رقموں کے آگے ہیں۔ پس

$$س - لا = \frac{1}{6} \frac{لا^{2}}{م^{2}} \text{، تقریباً}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{و^{2} لا^{3}}{ھ^{2}}$$

لا = $\frac{1}{2}$ ف رکھ کر ہم معلوم کرتے ہیں کہ طول ف کے فصل میں کُل اضافہ بوجہ جھوک'

$$۲ س - ف = \frac{1}{24} \frac{و^{2} ف^{3}}{ھ^{2}} \quad \text{ہے۔} \qquad (۸۶)$$

مثالیں

۱۔ ایک جھولا پُل کا کُل بوجھ ۳۲۰ ٹن ہے، فصل ۶۴۰ فٹ' اور ارتفاع ۵۰ فٹ ہے۔ سہارے کے نقطوں پر تناؤ معلوم کرو اور نیز زیرترین نقطہ پر کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک آزادانہ لٹکے ہوئے تار کا وزن ۳۲۰ ٹن ہے۔ سہارے کے دو نقطوں کے درمیان فاصلہ ۶۴۰ فٹ ہے اور یہ نقطے ایک ہی افقی خط میں ہیں

اور ان کا ارتفاع تار کے زیر ترین نقطے کے اوپر ۵۰ فٹ ہے سہارے کے نقطوں کے تناؤ اور نیز زیر ترین نقطہ پر کا تناؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک تار برقی سلسلہ کا تار اپنے طول کے ایک میل سے زیادہ کا وزن بغیر ٹوٹے برداشت نہیں کرسکتا۔ اگر تار ۸۸ گز کے مساوی وقفوں سے ستونوں پر تنا ہوا ہو تو کم سے کم قابل اجازت جھوک کیا ہے؟

۴۔ مثال ماسبق میں ایک میل تار برقی سلسلہ کے لیے کتنے تار کی ضرورت ہوگی؟

۵۔ ایک تار برقی سلسلہ ایک خاص قسم کے تار سے جو یکساں فصل کے ستونوں پر تنایا گیا ہو قائم کرنا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ستونوں کی تعداد بہت زیادہ ہو تو تار اور ستونوں کی قیمت کا لحاظ کرتے یہ سلسلہ سب سے زیادہ کفایت کے ساتھ تیار کیا جاسکتا ہے اگر ستونوں کی قیمت تار کے اس زائد طول کی قیمت سے دگنی ہو جو جھوک کی وجہ سے مطلوب ہے۔

عام مثالیں

۱۔ پتھر کا ایک گنڈ جس کا وزن $\frac{1}{2}$ ٹن ہے ایک ایسی رسی کے ذریعہ اٹھایا جاتا ہے جو ایک چرخی پر سے جو پتھر کے اوپر انتصاباً واقع ہے گذرتی ہے اور ایک ڈنڈا چرخ پر جس کا قطر ایک فٹ ہے لپٹی ہوئی ہے۔ ڈنڈا چرخ پر دو آدمی کام کرتے ہیں جو ۳ فٹ طول کے گردانے گھماتے ہیں۔ ہر آدمی کو گردانوں کے عمود وار کتنی قوت لگانی چاہیئے۔

۲۔ ایک شخص ایک ترازو کے پلڑے میں بیٹھ کر ۶۰ پونڈ کی قوت سے ڈنڈی کو انتصابی سمت میں اس نقطہ پر دباتا ہے جو نصاب اور ڈنڈی کے اس سرے کے وسط میں ہے جس سے اس کا پلڑا لٹکا ہوا ہے۔ اگر ڈنڈی کا طول ۵ فٹ ہو تو وہ زائد وزن معلوم کرو جو دوسرے پلڑے میں توازن کے لیے رکھنا پڑیگا۔

۳۔ ایک نادرست ترازو کے پلڑے نصاب سے غیر مساوی فاصلوں ا، ب پر لٹکتے ہیں لیکن خالی ہونے پر متوازن رہتے ہیں۔ ایک وزن کو جب دونوں پلڑوں میں تولا جاتا ہے تو اس کے اوزان علی الترتیب ف، ق حاصل ہوتے ہیں۔

اس کا اصلی وزن معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$\frac{ب}{ر} = \sqrt{\frac{ق}{ف}}$$

(۸۷) ۴ ـــ ایک غیر وزنی ڈوری ۲۴" لمبی دو نقطوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں اور ایک دوسرے سے ۱۶" کے فاصلہ پر ہیں باندہ دی گئی ہے ۔ ڈوری کے سِروں سے ۹ اور ۷ انچ کے فاصلوں پر دو نقطوں سے اوزان باندھے گئے ہیں جو اِس طریقہ سے لٹکتے ہیں کہ اِن کے درمیان ڈوری کا حصہ افقی ہے ۔ اوزان کی نسبت معلوم کرو ـــ

۵ ـــ ایک ہلکے تار کے وسطی نقطہ سے ایک وزن لٹکایا گیا ہے اور خود تار کو ایک ڈوری سے سہارا گیا ہے جو اس کے دو سِروں پر بندھی ہے اور ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ تار صرف افقی یا انتصابی محل میں ساکن رہ سکتا ہے ـــ

۶ ـــ تین چکنی کھونٹیاں ا ، ب ، ج ایک دیوار میں گڑی ہیں اور وہ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے راس ہیں ـــ ا بلند ترین ہے اور ضلع ب ج افقی ہے ـــ ایک ہلکی ڈوری اِن کھونٹیوں پر سے صرف ایک مرتبہ گذرتی ہے اور اس کے سِرے ایک وزن و سے بندھے ہیں جو ب ج کے نیچے توازن میں لٹکتا ہے ـ ہر ایک کھونٹی پر دباؤ معلوم کرو ـــ

۷ ـــ وزن ف اور ق کے دو چھلّے ایک غیر وزنی ڈوری میں جس کے سِرے ایک سیدھے ڈنڈے کے سروں سے بندھے ہیں پھسلتے ہیں ۔ ڈنڈا افق سے زاویہ ط پر مائل ہے ـ اِس ڈنڈے میں ایک ہلکا چھلا جس میں سے ڈوری گذرتی ہے پھسلتا ہے اِس طور پر کہ وزنی چھلّے اِس کی مخالف سمتوں میں رہتے ہیں ـ تمام تماس چکنے ہیں اور توازن کی حالت میں فہ وہ زاویہ ہے جو ڈنڈے اور ڈوری کے اُن حصوں کے درمیان ہے جو ہلکے چھلے سے قریب ہیں ـ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{سں ط}}{\text{سں فہ}} = \frac{ف - ق}{ف + ق}$$

۸ — دو چھوٹے وزنی حلقے ایک چکنے تار میں پھسلتے ہیں تار کی شکل قطع مکافی ہے جس کا محور افقی ہے ۔ حلقوں کو ایک ہلکی ڈوری سے مربوط کیا گیا ہے جو ماسکہ پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ جب حلقے توازن میں ہوتے ہیں تو محور کے نیچے محور سے اِن کے انتصابی فاصلے اِن کے اوزان کے متناسب ہوں گے ۔

۹ — دو برابر وزنی حلقے ایک تار میں پھسلتے ہیں تار کی شکل ایک قطع ناقص ہے جس کا محور اعظم انتصابی ہے ۔ حلقوں کو ایک ڈوری سے جو اوپر کے ماسکہ پر کی ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے مربوط کیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن کے محل تعداد میں لامتناہی ہیں ۔

۱۰ — ا ب ج د ایک ذو اربعتہ الاضلاع ہے ضلعوں ا ب، ب ج، ج د، اور د ا پر قوتیں عمل کرتی ہیں جو علی الترتیب اضلاع کا عہ، بہ، جہ، ضہ گنی ہیں ۔

ثابت کرو کہ اگر یہ قوتیں ذروں کے کسی نظام کو توازن میں رکھیں تو

عہ جہ = بہ ضہ

۱۱ — ایک ہلکا ڈنڈا کُلّا ایک چکنے نیم کروی پیالہ میں جس کا نصف قطر رہے پڑا ہے اور اس سے ایک وزن و ایک ایسے نقطے پر باندھا گیا ہے جس کے فاصلے ڈنڈے کے سِروں سے ا اور ب ہیں ۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں ڈنڈے کا میلان افق کے ساتھ حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے

۲ √(رؔ - ا ب) جب طہ = ا - ب

۱۲ — ایک غیر وزنی ڈنڈا جس پر کمیت ک اور کَ کے کھُردرے منکے لگے ہوئے ہیں ایک مائل مستوی پر پڑا ہے اور وہ ایک محور کے گرد جو ڈنڈے میں سے گذرتا ہے اور مستوی پر عمود ہے آزادانہ گھوم سکتا ہے ۔ اگر ڈنڈا افقی محل میں ہو تو ثابت کرو کہ وہ اطراف پھسلنا شروع نہیں کرے گا اِلّا آنکہ

مہ > (ک ا ~ کَ ب)/(ک ا + کَ ب) مس عہ

(۴۸)

جہاں عہ مستوی کا زاویہ ہے اور ا اور ب محور سے علی الترتیب ک اور کَ کے فاصلے ہیں ۔

۱۳ ۔ وزن و کا ایک منکا جو ایک چکنی غیر وزنی ڈوری میں پرو دیا گیا ہے زاویہ عہ کے ایک مائل مستوی پر ساکن ہے ۔ منکے اور مستوی کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے ۔ ڈوری کے سرے مستوی کے دو نقطوں ا، ب سے جو ایک ہی ارتفاع پر ہیں باندھے گئے ہیں ۔ بتاؤ کے منکے کے انتہائی توازن کے محل کس طرح معلوم کئے جا سکتے ہیں اور ثابت کرو کہ ایسے محل ن میں ڈوری کا تناؤ حسب ذیل ہے:

$$\frac{1}{2}\,\text{و قط}\,\frac{1}{2}\,\text{ان ب}\times\text{جم عہ}\,(\text{مس}^2\,\text{عہ}-\text{مہ}^2)^{\frac{1}{2}}$$

۱۴ ۔ ایک یکساں ڈوری ایک کھردرے کرہ پر رکھی گئی ہے اس طور پر کہ وہ ایک افقی چھوٹے دائرہ پر جس کا ارتفاع عہ ہے پڑی ہوئی ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر ڈوری نصف النہاروں پر عین پھسلنے کو ہے تو تناؤ مستقل ہے اور و مم (عہ + صہ) کے مساوی ہے جہاں و ڈوری کے اس طول کا وزن ہے جو دائرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے اور صہ رگڑ کا زاویہ ہے ۔

۱۵ ۔ ایک غیر وزنی ڈوری دو ثابت نقطوں سے لٹکی ہوئی ہے اور اس کے معلومہ نقطوں پر مساوی اوزان بندھے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ڈوری کے مختلف حصوں کے افق کے ساتھ جو میلانات ہیں ان کے مماس ایک سلسلہ حسابیہ بناتے ہیں ۔

۱۶ ۔ ایک چکنی نیم دائری نلی کو ۲ ن مساوی چکنے منکوں سے جن میں سے ہر ایک کا وزن و ہے پر کیا گیا ہے، یہ منکے نلی میں عین ٹھیک بیٹھتے ہیں ۔ نلی ایک انتصابی مستوی میں قائم ہے اور اس کے سرے مساوی ارتفاع پر ہیں ۔ اگر سرے سے م ویں اور (م + ۱) ویں منکوں کے درمیان دباؤ کام ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{ک}_{\text{م}} = \text{و جب}\,\frac{\text{م}\,\pi}{2\,\text{ن}}\;\text{قم}\,\frac{\pi}{2\,\text{ن}}$$

۱۷ ۔ مثال ماسبق میں فرض کرو کہ منکوں کو لا انتہا چھوٹا کیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ کسی دو منکوں کے درمیان دباؤ نلی کے سرے کے نیچے گہرائی کے متناسب ہوگا

۱۸۔ ایک وزنی ڈوری دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی ہمواری پر اور ایک دوسرے سے فاصلہ ا پر ہیں لٹکی ہوئی ہے۔ ڈوری کے دونوں سرے آزادانہ لٹک رہے ہیں اور مرکزی حصہ ایک زنجیرہ کی شکل میں لٹک رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کے امکان کے لیے ڈوری کا کل طول ا ز سے کم نہ ہونا چاہیے۔

(۸۹) ۱۹۔ وزن و کی ایک ڈوری دو نقطوں سے جو ایک ہی ہمواری پر ہیں لٹکائی گئی ہے اور اس کے زیر ترین نقطے سے ایک وزن وَ باندھا گیا ہے۔ اگر بلند ترین اور زیر ترین نقطوں پر کے مماس انتصابی سے زاویوں عہ، بہ پر مائل ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس عہ}}{\text{مس بہ}} = 1 + \frac{\text{وَ}}{\text{و}}$$

۲۰۔ طول ل کی ایک وزنی ڈوری دو نقطوں پر سہاری گئی ہے اور ان نقطوں پر ڈوری انتصابی سے زاویے عہ، بہ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ کا ارتفاع دوسرے نقطہ کے اوپر

$$\text{ل جم } \frac{1}{2}(\text{عہ} + \text{بہ}) \text{ قط } \frac{1}{2}(\text{عہ} - \text{بہ})$$

ہے۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ کم سے کم قوت کی سمت جو ایک گاڑی کو کھینچنے میں مطلوب ہوتی ہے زمین سے زاویہ طہ پر مائل ہوتی ہے جہاں ا جیب طہ = ب جیب صہ، پہیوں اور دھوروں کے نصف قطر علی الترتیب ا اور ب ہیں اور صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۹۰)

پانچواں باب

اُستوار اجسام کا علم سکون

اُستواری

۶۲ — اگر ہم چکنی مٹی کے گیلے ڈھیلے یا نرم موم کو اُنگلی سے دبائیں تو مٹی یا موم میں نشان پڑ جائے گا ہم نے اُنگلی سے جو قوت لگائی ہے اُس نے جسم کی شکل میں تبدیلی پیدا کردی ۔ اگر ہم اُنگلی سے جیلی کی کیسٹ کو دبائیں تو جیلی میں کوئی نشان نہیں پڑے گا لیکن ہم دیکھیں گے کہ جب تک قوت عمل کرتی ہے جیلی کی شکل بدلی رہتی ہے اگرچہ کہ وہ اپنی اصلی شکل پر عود کرتی ہے جبکہ دباؤ ہٹ جاتا ہے ۔

برخلاف ازیں اگر ہم سیسے کی گولی یا ہاتھی دانت کے بلیرڈ گولے کو اُنگلی سے دبائیں تو شکل کی کوئی تبدیلی قوت لگانے کے اثناء میں یا اس کے بعد نظر نہیں آئے گی ۔ معمولی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ سیسہ اور ہاتھی دانت مٹی اور موم سے زیادہ سخت ہیں اور علمی زبان میں ہم کہتے ہیں کہ وہ زیادہ اُستوار ہیں ۔

۶۳ — کامل طور پر اُستوار جسم وہ ہوگا جو کسی قوت کے تحت خواہ یہ قوت کتنی ہی بڑی ہو اپنی شکل نہ بدلے ۔ گولی اور بلیرڈ گولہ کامل طور پر اُستوار نہیں ہیں کیونکہ بلیرڈ گولہ جب دوسرے گولے سے ٹکراتا ہے تو ٹکر کی اثناء میں دبکر اسکی شکل بگڑی ہوئی رہتی ہے لیکن فوراً بعد ہی وہ اپنی شکل پر آجاتا ہے ۔ گولی

نشانہ پر لگتے ہی دیتی ہے اور اس کی شکل مستقلاً تبدیل ہو جاتی ہے۔ کامل طور پر اُستوار جسم فطرت میں موجود نہیں ہے، بلیرڈ کے گولے یا سیسی کی گولی کامل طور پر اُستوار سمجھے جا سکتے ہیں صرف اس وقت تک کہ ان پر کوئی بہت بڑی قوت عمل نہ کرے۔

کامل طور پر اُستوار جسم کی تعریف ریاضی کی زبان میں حسب ذیل ہے:

ایک جسم کامل طور پر اُستوار ہوتا ہے اگر اس کے کسی دو ذرّوں کا درمیانی فاصلہ غیر متغیر رہے خواہ جسم پر کوئی قوتیں عمل کریں۔

(۹۱) **۶۴**۔ کوئی اُستوار جسم اپنے اندر کسی خط کی سمت کو بدلے بغیر فضاء میں حرکت کر سکتا ہے، ایسی حرکت کو **حرکت انتقال** کہتے ہیں۔ نیز وہ کسی نقطہ ن کے گرد ن کے محل کو بدلے بغیر گھوم سکتا ہے ایسی حرکت کو ن کے گرد **گردش کی حرکت** کہتے ہیں۔ نیز اس میں ایسی حرکت ہو سکتی ہے جو حرکتِ انتقال اور گردش کی حرکت سے مرکب ہو۔ اور ہم ثابت کریں گے کہ یہ وہ عام سے عام حرکت ہے جو جسم اختیار کر سکتا ہے۔

۶۵۔ سب سے اول ہمیں یہ معلوم ہونا چاہئے کہ کوئی اُستوار جسم ثابت ہوگا جبکہ اس کے کوئی تین نقطے ثابت ہوں بشرطیکہ یہ تین نقطے ایک خطِ مستقیم میں واقع نہ ہوں۔ کیونکہ فرض کرو کہ یہ نقطے ا، ب، ج ہیں۔ اگر ہم ا اور ب کو ثابت کریں تو چونکہ جسم بموجب فرض کامل طور پر اُستوار ہے اس لیے کوئی حرکت جو وقوع پذیر ہو سکتی ہے ایسی ہونی چاہئے جس میں ا اور ب سے کسی دوسرے نقطہ ن کے فاصلے غیر متغیر رہیں۔ اس لیے ن کو اب کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرنا چاہئے اور جسم کی حرکت خط اب کے گرد گردش کی حرکت ہونی چاہئے۔ پس اگر ا، ب، ج ایک خطِ مستقیم میں نہیں ہیں تو ج کو اب کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرنا چاہئے۔

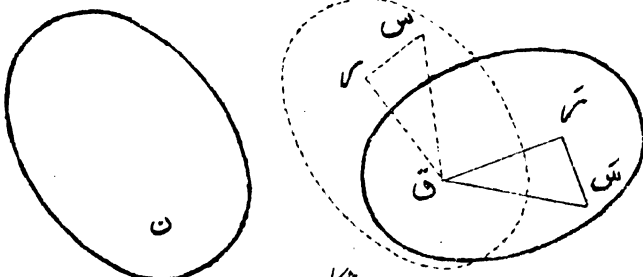
لیکن اگر ج بھی ثابت ہو تو ایسا ہو نہیں سکتا' بالفاظ دیگر کوئی حرکت وقوع پذیر نہیں ہو سکتی' اس لیے جسم اپنے محل میں ثابت ہے۔

اِس طرح کسی اُستوار جسم کا محل متعین ہو جاتا ہے جبکہ اس کے تین نقطوں کے محل معلوم ہوں بشرطیکہ یہ تین نقطے ایک ہی خط مستقیم میں نہ ہوں

٦٦ — اب ہم حسب ذیل مسئلہ ثابت کر سکتے ہیں۔

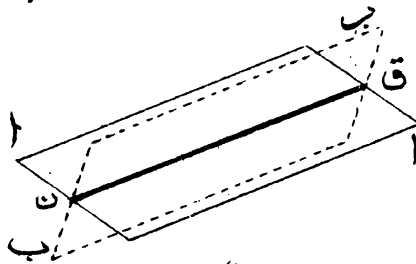
کسی اُستوار جسم کی عام سے عام حرکت حرکتِ انتقال اور گردش کی حرکت سے مُرکب ہوتی ہے

شکل (۴۶) میں فرض کرو کہ بائیں جانب کی شکل جسم کو اس کے ابتدائی محل میں تعبیر کرتی ہے اور فرض کرو کہ دائیں جانب کا جلی منحنی جسم کو تعبیر کرتا ہے جبکہ وہ کسی طرح حرکت کر چکا ہے۔ فرض کرو کہ جسم کے ابتدائی محل میں اس کے کسی ذرے کا مقام ن ہے اور فرض کرو کہ حرکت واقع ہونے کے بعد اسی ذرے کا مقام ق ہے۔

اولاً فرض کرو کہ جسم اپنے ابتدائی محل سے اس طریقہ پر حرکت کر چکا ہے کہ نقطہ ن نقطہ ق تک حرکت کرتا ہے لیکن جسم کے تمام خطوط اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتے ہیں یہ حرکت خالص حرکتِ انتقال ہے اس حرکت کے وقوع کے بعد ہم جسم کو نقطہ ق کے گرد اس طریقے سے گھما سکتے ہیں کہ وہ گھوم کر آخری محل میں آ جائے۔ کیونکہ فرض کرو کہ جسم کے کوئی دو دوسرے نقطے ر' س ہیں (جو ق کے ساتھ ایک ہی خط مستقیم میں نہیں ہیں) اور فرض کرو کہ ان کے آخری محل رَ' سَ ہیں۔ چونکہ جسم کو کامل طور پر اُستوار سمجھا گیا ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم کے ذروں کے درمیان تمام فاصلے (۹۲)

شکل (۴۶)

غیر متغیر رہتے ہیں۔ اس لیے فاصلے ق ر، ر س، س ق علی الترتیب ق رَ، رَ سَ، سَ قَ کے مساوی ہیں۔ اس لیے مثلثات ق ر س اور ق رَ سَ ہر طرح آپس میں برابر ہیں اور اس لیے ایک دوسرے پر منطبق کئے جا سکتے ہیں۔ پس ان مثلثوں کو ایک دوسرے پر منطبق کرنے کی حرکت مطلوبہ حرکت ہے اور یہ حرکت قَ کے گرد خالص گردش کی حرکت ہے کیونکہ ق حرکت نہیں کرتا۔

اب چونکہ اُستوار جسم کا محل ثابت ہوتا ہے جبکہ اس کے کوئی تین نقطے ثابت ہوں اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اُستوار جسم صرف ایک محل اختیار کر سکتا ہے جس میں تین نقطے ق، ر، س معلومہ مقامات پر ہوں۔ لیکن اُس حرکت کے بعد جس کو ہم نے بیان کیا ہے تین نقطے ق، ر، س اپنے آخری مقامات پر ہیں۔ اس لیے پورا جسم اپنے آخری محل میں ہونا چاہئے اور اس لئے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۶۷۔ گردش کا محور۔ گردش کی حرکت میں فرض کرو کہ ن وہ نقطہ ہے جو ثابت رہتا ہے۔ ن میں سے گذرنے والا کوئی مُستوی ا لو اور فرض کرو کہ گردش واقع ہونے کے بعد اس مُستوی کا محل ب ہے۔ یہ دو مُستوی ن میں سے گذرتے ہیں اور اس لیے ن میں سے گذرنیوالے ایک خط ن ق میں متقاطع ہونے چاہئیں۔ اس خط کو گردش کا محور کہتے ہیں۔ گردش کو ایک خیالی نقطے کے گرد جو گردش کے محور پر دوڑے گھماؤ کے طور پر خیال کیا جا سکتا ہے۔

ب ق ا ا ن ب

شکل (۴۷)

کسی اُستوار جسم کے توازن کی شرطیں

۶۸ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی اُستوار جسم ثابت ہوتا ہے جبکہ اس کے تین نقطے جو ہم خط نہوں ثابت ہوں اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ استوار جسم پر خواہ کتنی ہی قوتیں عمل کریں ہم ہمیشہ اس کو اس کے تین نقطوں پر جو ہم خط نہوں تین مناسب طور پر منتخبہ قوتیں لگا کر ساکن رکھ سکتے ہیں ۔

اِن قوتوں کو خاص طریقے سے منتخب کیا جا سکتا ہے ۔

فرض کرو کہ ا ' ب ' ج کوئی تین نقطے ہیں صرف اس شرط کے تحت کہ وہ ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں ۔ ا پر کے ذرے پر عمل کرنیوالی قوت کا مناسب اِنتخاب کرکے ہم ہمیشہ نقطہ ا کو ساکن بنا سکیں گے ۔

جب ا ثابت ہو جائے تو ب حرکت پر مائل ہوگا یا نہیں ہوگا۔ اگر ب حرکت پر مائل ہے تو ب کی حرکت کی سمت ' ب ا پر عمود ہونی چاہئے کیونکہ ا حرکت نہیں کر سکتا ۔ پس ا ثابت ہو جانے کے بعد ب پر ب ا کے عمود وار ایک قوت لگانے سے ب کو ثابت کرنا ممکن ہونا چاہئے ۔

جب ا اور ب دونوں ثابت ہو جائیں تو تیسرے نقطہ ج کے لئے جو حرکت ممکن ہے وہ صرف ا ج اور ب ج دونوں کے عمود وار ہے یعنے مُستوی ا ب ج کے عمود وار ۔ اِس طرح ج کو ایک قوت کے ذریعہ جو مُستوی ا ب ج پر عمود ہو ساکن رکھا جا سکتا ہے اور اس لئے پورا جسم اب ساکن ہے ۔ اِس لیے یہ ثابت ہو چکا کہ کسی اُستوار جسم کو قوتوں کے کسی نظام کے عمل کے خلاف ساکن رکھا جا سکتا ہے اگر حسب ذیل قوتیں تین اختیاری طور پر منتخبہ نقطوں ا ' ب ' ج پر جو ہم خط نہ ہوں لگائی جائیں :

(ا) ایک قوت نقطہ ا پر ' سمت نامعلوم

(ب) ایک قوت ب پر ' سمت خط ا ب کے عمود وار ۔

(ج) ایک قوت ج پر ' سمت مستوی ا ب ج کے عمود وار ۔

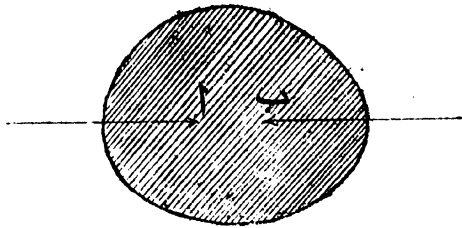
وہ شرط کہ قوتوں کا اصلی نظام جسم کو توازن میں رکھے یہ ہے کہ جسم کو ثابت

کرنے میں کوئی مزید قوتیں مطلوب نہوں اور اس لیے نقطوں ا، ب، ج پر جو قوتیں داخل کی گئی ہیں ان میں سے ہر ایک کو معدوم ہونا چاہئیے۔

(۹۴)

قوت کی انتقال پذیری

٦٩ – ایک اُستوار جسم پر غور کرو جس پر دو قوتیں $ق_ا$ اور $ق_ب$، دو نقطوں ا اور ب پر عمل کرتی ہیں، یہ قوتیں مقدار میں مساوی ہیں لیکن مخالف سمتوں اب اور ب ا میں عمل کرتی ہیں۔

اُستوار جسم ان دو قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہوگا یا اس کو تین قوتوں $ف_ا$، $ف_ب$، $ف_ج$ کے ذریعے جو نقطوں ا، ب، اور کسی تیسرے نقطہ ج (جو خط اب میں نہیں ہے) پر عمل کرتی ہیں ساکن رکھا جا سکتا ہے، یہ قوتیں ان سمتوں میں عمل کرتی ہیں جن کو قبل ازیں ظاہر کیا جا چکا ہے یعنے $ف_ج$ مستوی اب ج کے عمود وار اور $ف_ب$ خط اب کے عمود وار۔

شکل (۴۸)

فرض کرو کہ یہ قوتیں بشرطِ ضرورت عائد کی گئی ہیں اور اس لیے جسم قوتوں $ق_ا$، $ق_ب$، $ف_ا$، $ف_ب$، $ف_ج$ کے زیر عمل توازن میں ہے۔ جسم چونکہ توازن میں ہے اس لیے کسی خط کے گرد ان قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ یا کسی سمت میں ان کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ حسب دفعہ (۵۰)

معدوم ہونا چاہیئے۔
فرض کرو کہ ہم خط $اب$ کے گرد معیاروں کے مجموعے پر غور کرتے ہیں۔ قوتیں $و_ا$، $و_ب$، $ف_ا$، $ف_ب$ سب کی سب اس خط سے ملتی ہیں اور اس لیے ان میں سے ہر قوت کا معیار معدوم ہوتا ہے۔
اس طرح خط $اب$ کے گرد معیاروں کا مجموعہ واحد قوت $ف_ج$ کے معیار پر مشتمل ہے اور اس لیے ان معیاروں کے مجموعے کے معدوم ہونے کے لیے $ف_ج$ کے معیار کو معدوم ہونا چاہیئے۔ اب قوت $ف_ج$ کا معیار صرف اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جبکہ خود قوت $ف_ج$ صفر کے مساوی ہو۔ جس کے یہ معنے ہیں کہ کوئی قوت جسم کو $اب$ کے گرد گھومنے سے روکنے کے لیے مطلوب نہیں ہے۔

(۹۵) پس جسم دو قوتوں $ف_ا$ اور $ف_ب$ کے زیرِ عمل ساکن ہے اور اس لیے قوتوں $ف_ا$، $ف_ب$، $و_ا$، $و_ب$ کے زیرِ عمل توازن میں ہے۔

$ا$ میں سے گذرنے والے اور $اب$ پر عمود وار خط کے گرد معیار لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $ف_ا$، $و_ا$، $و_ب$ کے معیار معدوم ہوتے ہیں اور اسلیے اس خط کے گرد ان چار قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونے کے لیے $ف_ب$ کا معیار صفر کے مساوی ہونا چاہیئے اور اس لیے خود $ف_ب$ کو صفر کے مساوی ہونا چاہیئے اسی طرح جسم کو ساکن رکھنے کے لیے جو قوت مطلوب ہے وہ صرف $ا$ پر کی قوت $ف_ا$ ہے۔
لیکن اب توازن کے لیے یہ شرط ہے کہ $و_ا$، $و_ب$ اور $ف_ا$ کے

اجزائے ترکیبی کا مجموعہ کسی سمت میں معدوم ہو۔ $و_ا$ اور $و_ب$ کے اجزائے ترکیبی مساوی اور مختلف ہیں اس لیے $ف_ا$ کا جزو ترکیبی ہر سمت میں معدوم ہونا چاہئے یعنے $ف_ا$ صفر کے مساوی ہونا چاہئے۔

پس یہ ثابت ہو چکا کہ استوار جسم دو قوتوں $و_ا$ اور $و_ب$ کے زیر عمل توازن میں ہے۔

۷۰ ۔ دفعہ ماسبق سے فوراً ایک اصول جو قوت کے **انتقال پذیری** کے طور پر مشہور ہے حاصل ہوتا ہے ۔

کسی قوت کا اثر جو ایک استوار جسم پر عمل کرے اس کی مقدار اور اُس خط پر جس پر وہ عمل کرتی ہے منحصر ہوتا ہے ۔ لیکن اس خط میں **اُس مخصوص ذرّے پر منحصر نہیں ہوتا جس پر قوت لگائی گئی ہے۔**

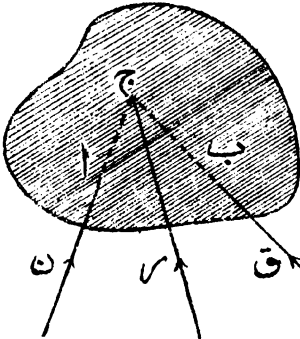
کیونکہ فرض کرو کہ قوت کے خط عمل کے کسی دو نقطوں ق اور ر پر وہی قوت لگائی گئی ہے ۔ ر پر ایک مساوی اور مخالف قوت اِن دو قوتوں میں سے کسی ایک کی تعدیل کر سکتی ہے اور اسلئے یہ قوتیں مماثل ہیں ۔

ق ر

شکل (۴۹)

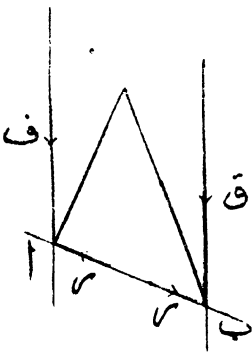
ایک مستوی میں عمل کرنیوالی قوتوں کی ترکیب

۷۱ ۔ فرض کرو کہ ایک استوار جسم کے دو نقطوں ا، ب پر دو قوتیں ف، ق عمل کرتی ہیں اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ان قوتوں کے خطوط عمل ایک ہی مستوی میں واقع ہیں ۔ اب یہ دو خطوط عمل نقطوں ا، ب سے آگے (بشرطِ ضرورت) خارج کرنے پر کسی نہ کسی نقطہ ج پر ملیں گے ۔

قوت کے انتقال پذیری کے اُصول سے یہ ظاہر ہے کہ قوت ف خواہ ا پر عمل کرے یا ج پر ایک ہی بات ہے۔ فرض کرو کہ وہ ج پر عمل کر رہی ہے۔ اسی طرح فرض کرو کہ قوت ق، ب کی بجائے ج پر عمل کر رہی ہے۔ اب جسم پر عمل کرنے والی (۹۶) دو قوتیں ف، ق ہیں جو ایک ہی ذرہ ج پر عمل کرتی ہیں۔ اِن قوتوں کو تیسرے باب میں سمجھائے ہوئے قاعدوں کی بموجب ایک واحد قوت ر میں جو ج پر عمل کرتی ہے مرکب کیا جا سکتا ہے۔ پس ہم قوتوں کو مرکب کر سکتے ہیں جبکہ خطوطِ عمل متقاطع ہوں اگرچہ وہ ایک ہی ذرہ پر عمل نہ کریں۔

شکل (۵۰)

دو قوتوں کو ایک واحد قوت میں مرکب کر لینے کے بعد ہم اس حاصل قوت کو کسی تیسری قوت کے ساتھ جو اُسی مستوی میں واقع ہو دو ابتدائی قوتوں کے طور پر مرکب کر سکتے ہیں اور اِس طرح تین قوتوں کا حاصل دریافت کر سکتے ہیں اور علیٰ ہٰذا القیاس۔

پس قوتوں کی کسی تعداد کو جو سب کی سب ایک مستوی میں واقع ہوں ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے۔ اِس قوت کو ابتدائی قوتوں کا **حاصل** کہتے ہیں۔

۲۷ — ایک مستثنےٰ صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ ہم دو متوازی قوتوں کو مرکب کرنے کی کوشش کرتے ہیں کیونکہ اِس صورت میں خطوطِ عمل متقاطع نہیں ہوتے۔ لیکن یہ مشکل آسانی سے حل ہو جاتی ہے۔ فرض کرو کہ دو قوتیں ف، ق ہیں جن کو مرکب کرنا ہے اور فرض کرو کہ ا ب کوئی خط ہے جو اِن کے خطوطِ عمل کو ا، ب پر

شکل (۵۱)

قطع کرتا ہے۔ فرض کرو کہ قوتوں کے اِس نظام میں ہم دو قوتیں
(ا) ایک قوت س جو ب ا پر عمل کرتی ہے،
(ب) ایک قوت س جو ا ب پر عمل کرتی ہے، داخل کرتے ہیں۔
یہ دو قوتیں چونکہ مساوی اور مخالف ہیں اس لئے انہیں بغیر کسی اثر کے داخل کیا جا سکتا ہے۔ پہلی قوت کو ف کے ساتھ مرکب کرنے سے حاصل فَ ملتا ہے جو ا پر عمل کرتا ہے، اسی طرح دوسری قوت کو ق کے ساتھ مرکب کرنے سے حاصل قَ ملتا ہے جو ب پر عمل کرتا ہے۔ اس طرح (۹۷)
ابتدائی قوتوں ف، ق کی بجائے دو نئی قوتیں فَ، قَ حاصل ہوئی ہیں
اِن قوتوں کے خطوط عمل بالعموم متوازی نہیں ہوں گے اور اس لیے اِن کو ایک واحد قوت میں جو اِن کے نقطۂ تقاطع میں سے گذرتی ہے مرکب کیا جا سکتا ہے۔

۳۷ ۔ فرض کرو کہ ابتدائی قوتیں جن کو مرکب کرنا ہے $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$... ہیں اور ان کو ایک واحد حاصل س میں مرکب کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اُس مستوی میں جس میں یہ قوتیں عمل کرتی ہیں محاور لا، ما لئے گئے ہیں اور فرض کرو کہ اِن محوروں کی سمتوں میں $س_۱$ کے اجزائے ترکیبی $لا_۱$، $ما_۱$ ہیں، $س_۲$ کے $لا_۲$، $ما_۲$ اور علیٰ ہذا القیاس۔ بالآخر فرض کرو کہ س کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔

قوتوں کا یہ نظام جس میں ابتدائی قوتیں $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$.... اور حاصل س (بہ سمت مخالف) شامل ہیں ایک ایسا نظام ہے جو توازن میں ہے۔ اِس لیے قوتوں کو محوروں کے متوازی تحلیل کرنے سے

$$لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + ... - لا = ۰ ،$$

$$ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ + ... - ما = ۰$$

اس لئے س کے اجزائے ترکیبی مساواتوں

$$\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{لا}_2 + \text{لا}_3 + \ldots\ldots ،$$

$$\text{ما} = \text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \text{ما}_3 + \ldots\ldots ،$$

سے حاصل ہوتے ہیں اور ر کی مقدار مساوات

$$\text{ر}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2$$

سے معلوم کیجا سکتی ہے۔ وہ زاویہ طہ جو ر کا خط عمل محور لا کے ساتھ بناتا ہے مساوات

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ر کے خط عمل کا محل معلوم کرنے کے لیے ہم اس واقعہ کا استعمال کرتے ہیں کہ اسی مستوی کے کسی نقطہ کے گرد قوتوں ر_1، ر_2، ر_3 .... اور $-\text{ر}$ کے معیاروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیے۔ اس سے کسی نقطہ کے گرد ر کا معیار معلوم ہوتا ہے اور اس لیے چونکہ ر کی مقدار اور سمت معلوم ہے ہم اس کے خط عمل کا محل معلوم کر سکتے ہیں۔

(۹۸)

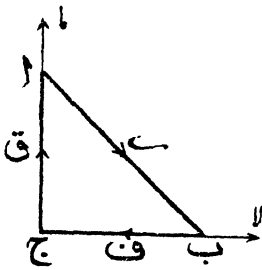
توضیحی مثال

قوتیں ف، ق، ر، ایک استوار جسم پر عمل کرتی ہیں، یہ تمام قوتیں ایک مستوی میں ہیں اور ان کے خطوط عمل ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں جس کے اضلاع ۱، ۱، $\sqrt{2}$ ہیں۔ ان کا حاصل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور قوتیں ف، ق، ر علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب پر عمل کرتی ہیں۔ ج کو مبداء فرض کرو اور ج ا، ج ب کو محاور ما، لا لو۔

فرض کرو کہ حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں۔ تب ج لا کی سمت میں

تحلیل کرنے سے

$$\text{لا} = -\text{ف} + \frac{\text{ر}}{\sqrt{۲}}$$

اور اسی طرح ج ما کی سمت میں تحلیل کرنے سے

$$\text{ما} = \text{ق} - \frac{\text{ر}}{\sqrt{۲}}$$

شکل (۵۲)

اس لیے حاصل کی مقدار ح، مساوات

$$\text{ح}^{۲} = \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \left(-\text{ف} + \frac{\text{ر}}{\sqrt{۲}}\right)^{۲} + \left(\text{ق} - \frac{\text{ر}}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}$$

$$= \text{ف}^{۲} + \text{ق}^{۲} + \text{ر}^{۲} - \sqrt{۲}\,\text{ر}\,(\text{ف} + \text{ق})$$

سے حاصل ہوگی ۔ زاویہ ط جو یہ حاصل، محور ج لا سے بناتا ہے مساوات

$$\text{مس ط} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = -\frac{\text{ر} - \sqrt{۲}\,\text{ق}}{\text{ر} - \sqrt{۲}\,\text{ف}}$$

سے حاصل ہوگا ۔

خط عمل معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ج کے گرد ح کا معیار، قوتوں ف، ق، اور ر کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہونا چاہئے۔ اگر حاصل ح کے خط عمل پر ج سے عمود ع ہو تو

$$\text{ح}\,\text{ع} = \text{ر}\,\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

اس لئے

$$\text{ع} = \frac{\text{ر}}{\text{ح}}\,\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

اور اس سے ح کا خط عمل معلوم ہوتا ہے ۔

مثالیں

(تمام قوتیں استوار اجسام پر عمل کرتی ہیں)

۱۔ ا ب ج د ایک مربع ہے اور ضلعوں اب، ب ج، ج د پر علی الترتیب ۱، ۲، ۳ پونڈ کی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ حاصل کی مقدار اور خط عمل معلوم کرو۔

۲۔ ا ب ج د ایک مربع ہے اور ضلعوں اب، ب ج، ج د، د ا پر قوتیں ف، ق، ر، س عمل کرتی ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ ان کا حاصل، مربع کے مرکز میں سے گذرے۔

۳۔ مثال (۲) میں وہ شرط کیا ہے کہ

(ا) حاصل نقطہ ا میں سے گذرے،

(ب) حاصل نقطہ ب میں سے گذرے،

(ج) چاروں قوتیں توازن میں ہوں۔

(۹۹) ۴۔ قوتیں ف، ق، ر ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور ان کا حاصل، مثلث کے اندرونی و بیرونی دائروں کے مرکزوں میں سے گذرتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ف}{جم ب - جم ج} = \frac{ق}{جم ج - جم ا} = \frac{ر}{جم ا - جم ب}$$

۵۔ اگر چار قوتیں جو ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع مستوی ہونا چاہیئے۔

۶۔ ا ب ج د ایک مستوی ذو اربعۃ الاضلاع ہے اور قوتیں جو ا ب، ج ب، ج د، ا د سے تعبیر ہوتی ہیں ان ضلعوں پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر توازن موجود ہو تو یہ ذو اربعۃ الاضلاع متوازی الاضلاع ہونا چاہیئے۔

۷۔ اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرے میں کھینچا جا سکے تو ثابت کرو کہ قوتیں جو اس کے چار ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور متقابلہ ضلعوں کے متناسب ہیں اس کو توازن میں رکھیں گی۔ نیز ثابت کرو کہ اس کا عکس بھی درست ہے یعنی یہ کہ توازن کے لیے قوتوں کو متقابلہ اضلاع کے متناسب ہونا چاہیئے۔

۸۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرے میں بنایا گیا ہے اور چار قوتیں

اِس کے ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور اِن ضلعوں کے طولوں کے بالعکس متناسب ہیں ثابت کرو کہ حاصل کا خطِ عمل وہ خط ہے جو متقابلہ اضلاع کے زوجوں کے نقاطِ تقاطع میں سے گذرتا ہے ۔

۹ ۔ چار قوتیں ایک ذواربعۃ الاضلاع کے چار ضلعوں پر عمل کرتی ہیں اور علی الترتیب اِن ضلعوں کے طولوں کے ا، ب، ج، د گنے کے مساوی ہیں ۔ اگر یہ قوتیں توازن میں ہوں تو ثابت کرو کہ

ا ج = ب د

اور یہ کہ مزید شرطیں جو توازن کے لیے ضروری ہیں یہ ہیں کہ نسبتیں ا : ب اور ب : ج وہ نسبتیں ہونی چاہئیں جن میں وتر اپنے نقاطِ تقاطع پر تقسیم ہوتے ہیں ۔

۱۰ ۔ مثال ماسبق میں ثابت کرو کہ پہلے ضلع کے عمودی فاصلے ذواربعۃ الاضلاع کے اُن دو نقطوں سے جو اس ضلع پر نہیں ہیں حسب ذیل نسبت میں ہیں

ا (ج ۔ ب) : د (ب ۔ ا)

متوازی قوتیں

۴۷ ۔ فرض کرو کہ دو متوازی قوتوں ف اور ق کا حاصل معلوم کرنے کے لئے ہم وہ طریقہ استعمال کرتے ہیں جو اوپر سمجھایا گیا ہے ۔

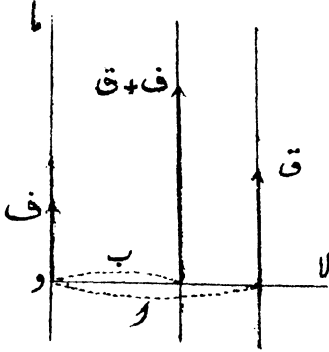
ف کے خطِ عمل پر کسی نقطہ و کو مبدا فرض کرو اور ف کے اِس خطِ عمل کو محور و ما لو، شکل (۵۳) ۔ فرض کرو کہ حاصل ما ہے اور اُس کے اجزائے ترکیبی لا، ما ہیں ۔ تب تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا = ۰،

ما = ف + ق

اس لیے حاصل قوت کی مقدار ف + ق ہے اور وہ و ما کے متوازی عمل کرتی ہے فرض کرو کہ اِس کا فاصلہ و ما سے ب ہے اور ق کا فاصلہ ا سے تعبیر ہوتا ہے ۔ اب و کے گرد معیار لینے سے حاصل ہوتا ہے (۱۰۰)

(ف + ق) ب = ق ا

اِس لئے

$$\frac{ب}{ق} = \frac{ا}{ف+ق} = \frac{ا-ب}{ف}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط عمل، ف اور ق کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے۔ اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ

دو متوازی قوتوں ف، ق کا حاصل، اِن قوتوں کے متوازی، مقدار ف + ق کی ایک قوت ہے جس کا خط عمل، قوتوں ف اور ق کے خطوط عمل کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے

ما، ف + ق، ق، ف، ب، و، ا، لا

شکل (۵۳)

۵۷۔ متوازی قوتوں کا دوسرا ثبوت۔ دفعہ (۶۸) سے ہم راست ثابت کر سکتے ہیں کہ متوازی قوتیں ف، ق اور قوت ۔ (ف + ق) جو قوتوں ف، ق کے متوازی ہے اور ایک ایسے خط پر عمل کرتی ہے جو اِن قوتوں کے درمیانی فاصلے کو نسبت ق : ف میں تقسیم کرتا ہے توازن میں ہیں۔

ف، ق کے خطوط عمل پر دو نقطے ا، ب لو اور کوئی تیسرا نقطہ ج لو جو خط اب پر نہ ہو۔ تب وہ جسم جس پر قوتیں ف، ق اور ۔ (ف + ق) عمل کرتی ہیں حسب ذیل مزید قوتوں کے عمل سے توازن میں رکھا جا سکتا ہے:

(ا) ایک قوت ک‍ج جو ج پر عمل کرے اور اب ج پر عمود ہو،

(ب) ایک قوت کب جو ب پر عمل کرے اور اب پر عمود ہو،

(ج) ایک قوت کا جو ا پر عمل کرے۔

اس طرح قوتوں

$$ف، ق، -(ف+ق)، م_ج، م_ب، م_ا$$

کا نظام توازن میں ہو گا۔

خط ا ب کے گرد معیار لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ $م_ج = ۰$ اور ا کے گرد معیار لینے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ $م_ب = ۰$ ۔ اور اگر ایسا نہیں ہے تو وہ خط ب ا پر عمل کرتی ہے اور ایسی صورت میں وہ $م_ا$ میں ضم کی جا سکتی ہے۔ قوتوں ف، ق کے مستوی کے عمود وار تحلیل کرنے سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ $م_ا$ کا کوئی جزو ترکیبی مستوی کے عمود وار نہیں ہو سکتا۔ اِس لئے چار باقی قوتیں

$$ف، ق، -(ف+ق)، م_ا$$

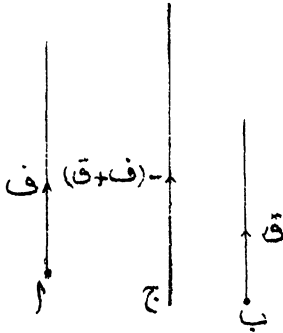
سب کی سب ایک مستوی میں ہیں۔

(۱۰۱) پھر ف کے خط عمل کے متوازی اور عمود وار تحلیل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $م_ا$ کے دونوں اجزائے ترکیبی معدوم ہوتے ہیں اور اس لئے $م_ا = ۰$ ۔ اِس لیے ابتدائی قوتیں توازن میں ہیں۔

ف -(ف+ق) ق
ا ج ب

شکل (۵۴)

۷۶ — قوتوں کو مرکب کرنے کے اِن طریقوں کی صریحاً توسیع ہو سکتی ہے اور اِس لیے متوازی قوتوں کی کسی تعداد کو ایک واحد حاصل قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے۔ ہم حاصل کو اُلٹانے اور تحلیل کرنے سے دیکھتے ہیں کہ حاصل، ابتدائی قوتوں کے خطوطِ عمل کے متوازی ہے اور اِس کی مقدار اِن قوتوں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے۔

یہ نتیجہ اجسام کے اوزان کے سلسلہ میں اہمیت رکھتا ہے۔ اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی اُستوار جسم پر جاذبہ الارض کے اثر کو یعنی اُس کے منفرد ذروں کے اوزان کے حاصل کو جسم کا وزن کہتے ہیں۔

ایک واحد قوت سمجھا جا سکتا ہے جو ایک واحد خط پر انتصاباً عمل کرتی ہے۔
آئندہ باب میں یہ ثابت کیا جائیگا کہ اُستوار جسم خواہ کسی محل میں ہو یہ خط ہمیشہ ایک معیّن نقطے میں سے گذرتا ہے جو جسم کے لحاظ سے ثابت ہوتا ہے، اِس نقطہ کو مرکز ثقل کہتے ہیں۔

۷۷ ۔ اِس کو تسلیم کئے بغیر متعدد سادہ صورتوں میں ہم خط عمل معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک ایکساں ڈنڈے پر بحث کر رہے ہیں۔ دو مساوی ذروں کے اوزان جو ڈنڈے کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر ہوں ایک واحد قوت میں مرکب کئے جا سکتے ہیں جو ڈنڈے کے مرکز میں سے عمل کرتی ہے۔ تمام ذروں کے وزنوں پر اسی طریقہ سے بحث کرنے پر ہم دیکھیں گے کہ ایک ایکساں ڈنڈے کا وزن اس کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔

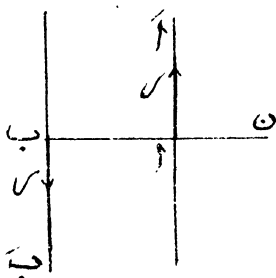
اس طرح ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ ایک دائری قرص، ایک دائری حلقہ یا کرہ کا وزن اِس کے مرکز پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے۔ ایک متوازی السطوح یا مکعب کا وزن اِس کے وتروں کے نقطہ تقاطع پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے اور علیٰ ہذا۔

جفت

۷۸ ۔ اگر ہم دو متوازی قوتوں کو جو مقدار میں مساوی مگر علامت میں مختلف ہوں مرکب کرنے کی کوشش کریں تو ہمیں حاصل کے طور پر ایک ایسی قوت ملے گی جو مقدار میں صفر ہوگی اور اس کا خط عمل لاتناہی پر ہوگا۔ اگرچہ ایسی کسی قوت کی مقدار صفر ہوتی ہے لیکن اِس کے اثر کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا کیونکہ اس کا معیار معدوم نہیں ہوتا، اِس وجہ سے کہ وہ ترکیبی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔ اگر شکل ۵۵ میں دو متوازی مخالف قوتوں کے خطوط عمل ا ا، ب ب ہوں اور ہر قوت ہ کے مساوی ہو اور اگر ان کی سمت کے علی القوائم ایک خط ن ا ب ہو تو (۱۰۲)

ن میں سے گذرنے والے اور قوتوں کے مُستوی کے علی القوائم خط کے گرد اِن کے معیاروں کا مجموعہ

= م × ن ب − م × ن ا

= م ف

جہاں قوتوں کے خطوط عمل کا درمیانی فاصلہ ف ہے۔ قوتوں کا ایسا زوج جو مقدار میں مساوی اور سمت میں مخالف ہو اور ایک ہی خط میں عمل نہ کرے **جفت** کہلاتا ہے اِن کا معیار کسی نقطہ ن کے گرد جو اِن کے خطوط عمل کے مُستوی میں ہو نقطہ ن کے محل پر منحصر نہیں ہوتا اور اِس کو جفت کا معیار کہا جاتا ہے۔

شکل (۵۵)

توازن کی شرط

۹۔ — چونکہ ہم مُستوی قوتوں کے کسی نظام کا حاصل یا تو ایک واحد قوت ہو سکتا ہے یا ایک جفت اس لئے وہ شرط کہ حاصل صفر کے مساوی ہو یہ ہو گی کہ حاصل واحد قوت صفر ہو اور کوئی جفت عمل نہ کرے۔ حاصل قوت کا جزو ترکیبی کسی سمت میں معدوم ہوتا ہے اگر اِس سمت میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ معدوم ہو۔ اس لئے حاصل قوت کے معدوم ہونیکے لیے یہ ضروری ہے کہ دو مختلف سمتوں میں اجزائے تحلیلی معدوم ہوں۔ اگر یہ شرط پوری ہوتی ہے تو کوئی حاصل نہیں ہو سکتا اِلا جفت کے اور چونکہ جفت کا معیار وہی ہوتا ہے خواہ اُسے کسی نقطہ کے گرد لیا جائے اس لئے کوئی جفت نہیں ہو سکتا اگر کسی ایک نقطے کے گرد معیار صفر ہو۔ پس ہم مُستوی قوتوں کے کسی نظام کے توازن کی ضروری اور کافی شرط حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

ہم مستوی قوتوں کا ایک نظام توازن میں ہوگا اگر دو سمتوں میں قوتوں کے اجزائے تحلیلی کا مجموعہ منفرداً معدوم ہو اور اگر کسی نقطے کے گرد معیاروں کا مجموعہ بھی معدوم ہو۔

(۱۰۳) ہم توازن کی اس شرط کو ایک مختلف شکل میں بیان کر سکتے ہیں:
ہم مستوی قوتوں کا ایک نظام توازن میں ہوگا اگر کسی تین نقطوں کے گرد جو ایک ہی خط میں نہ ہوں معیاروں کے مجموعے جدا جدا صفر ہوں۔

کیونکہ اگر کسی ایک نقطہ کے گرد معیار صفر ہو تو حاصل جفت نہیں ہو سکتا۔ اس لیے وہ ایک واحد قوت ہونا چاہیئے۔ اگر دو نقطوں ا ب میں سے ہر ایک کے گرد معیار معدوم ہوں تو اس قوت کا خط عمل بالعموم ا ب ہونا چاہیئے لیکن اگر کسی تیسرے نقطہ ج کے گرد بھی جو ا ب میں نہیں ہے معیار معدوم ہو تو خود قوت کو معدوم ہونا چاہیئے۔

مثالیں

۱۔ ۲ فٹ طویل خط کے دو سروں پر اور وسطی نقطہ پر علی الترتیب ۵، ۱۲، ۷ پونڈ کی متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کے حاصل کی مقدار اور خط عمل معلوم کرو۔

۲۔ مثال ماسبق کی قوتوں کا حاصل معلوم کرو جبکہ ان کی مقداریں ۵، ۱۲-، اور ۷ پونڈ ہوں۔

۳۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار تین قوتیں جن میں سے ہر ایک کی مقدار ف ہے عمل کرتی ہیں۔ حاصل معلوم کرو۔

۴۔ ثابت کرو کہ قوتوں کا ایک نظام جو ایک مستوی کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر ترتیب وار عمل کرتی ہیں اور ان ضلعوں سے تعبیر ہوتی ہیں ایک جفت کے مماثل ہے جس کا معیار کثیر الاضلاع کے رقبے کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے۔

۵۔ اگر تین نقطوں کے گرد جو ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں کوئی ہم مستوی قوتوں کے معیاروں کے مجموعے مساوی ہوں اور الگ الگ صفر نہ ہوں تو

ثابت کرو کہ یہ نظام ایک جفت سے کے مماثل ہے۔

۶۔ ایک ایکساں ڈنڈے کا طول ۳ فٹ اور وزن ۲۴ پونڈ ہے۔ ۱۶ اور ۱۸ پونڈ کے وزن اس کے دو سروں پر پیوست کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈنڈے کو کس نقطہ پر سہارنا چاہیئے کہ وہ عین متوازن ہو۔

۷۔ ۲۰ پونڈ وزن کا ایک ایکساں شہتیر اپنے دو سروں سے لٹکایا گیا ہے اور ۵۰ پونڈ کا ایک وزن اس کے ایک ایسے نقطہ سے لٹکتا ہے جس کے فاصلے سروں سے ۷ فٹ اور ۳ فٹ ہیں۔ ان نقطوں پر دباؤ معلوم کرو جن سے شہتیر لٹکا ہوا ہے۔

۸۔ ۵۰ پونڈ وزن اور ۱۸ فٹ طول کے ایک یکساں ڈنڈے کو دو آدمی اپنے شانوں پر لئے جا رہے ہیں وہ ڈنڈے کے سروں سے علی الترتیب ۲ فٹ اور ۳ فٹ کے فاصلوں پر چلتے ہیں۔ ۵۰ پونڈ کا ایک وزن شہتیر کے وسطی نقطے سے لٹکایا گیا ہے۔ وہ کل وزن معلوم کرو جو ہر شخص لیے جا رہا ہے۔

۹۔ ایک گھنٹی جس کا وزن ۳۲ پونڈ ہے دو مساوی کروں سے جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ۳ انچ ہے اور جو لوہے کی ایک سلاخ سے جڑے ہوئے ہیں بنائی گئی ہے کروں کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ۱۶ انچ ہے ایک کرہ کو اب جدا کر لیا جائے تو گھنٹی کے مابقی حصہ کا وزن ۲۰ پونڈ معلوم ہوتا ہے اس حصہ کو کہاں سہارنا چاہیئے کہ وہ عین متوازن ہو سکے۔

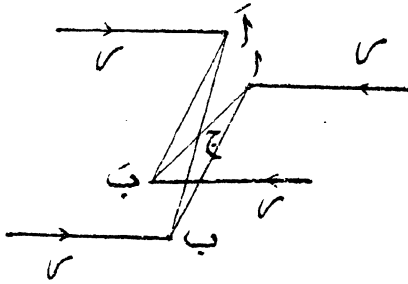
متوازی مستویوں میں جفت

۸۰۔ دفعہ (۷۹) کے نتیجہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ دو جفت جو ایک ہی مستوی میں عمل کریں ایک ہی اثر پیدا کرتے ہیں اگر ان کے معیار مساوی ہوں کیونکہ ان میں سے ایک کو الٹانے سے توازن کی تمام شرطیں پوری ہو سکتی ہیں۔

اس طرح ہم ایک جفت کا اثر صرف اس کا معیار معلوم کر کے متعین کر سکتے ہیں۔ اب ہم یہ ثابت کریں گے کہ وہ حقیقی مستوی جس میں

جفت عمل کرتا ہے کوئی اہمیت نہیں رکھتا، صرف اس کی سمت اہم ہے دوسرے الفاظ میں :

مساوی معیاروں کے جفت جو متوازی مستویوں میں عمل کریں وہی اثر پیدا کرتے ہیں ۔

اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم ایک جفت کو الٹاتے ہیں اور ثابت کرتے ہیں کہ اب یہ دو جفت توازن میں ہیں ۔ فرض کرو کہ پہلا جفت دو قوتوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک ک کے مساوی ہے اور فرض کرو کہ ان کے خطوط عمل کا ایک مشترک عمود ثانی الذکر سے نقطوں ا، ب پر ملتا ہے ۔ فرض کرو کہ دوسرے جفت کے مستوی میں اَبَ ایک خط ہے جو اب کے مساوی اور متوازی ہے اور فرض کرو کہ دوسرے جفت کو الٹانے کے بعد وہ دو قوتوں ک، ک سے تعبیر ہوتا ہے جو اَ، بَ پر عمل کرتی ہیں ۔ ہم اس جفت کو یہ سمجھ سکتے ہیں کہ وہ الٹائے ہوئے دوسرے جفت کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اس کا معیار دوسرے جفت کے معیار کے مساوی اور مخالف ہے اور وہ اسی مستوی میں ہے جس میں دوسرا جفت ہے ۔

شکل (۵۶)

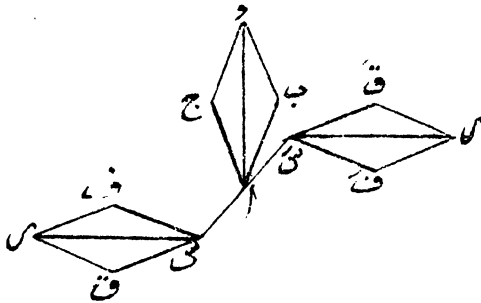
اب ہمیں یہ ثابت کرنا ہے کہ وہ چار قوتیں جن میں سے ہر ایک ک کے مساوی ہے اور جو علی الترتیب ا، ب، اَ، بَ پر عمل کرتی ہیں توازن میں ہیں ۔ بموجب عمل اب بَ اَ ایک متوازی الاضلاع ہے اس لیے ج جو اس کے وتروں کا نقطہ تقاطع ہے ہر ایک وتر کا

نقطہ وسطی بھی ہے ۔

دو متوازی قوتیں ر، ر جو علی الترتیب ا، ب پر عمل کرتی ہیں ایک واحد قوت ۲ ر میں جو اب کے وسطی نقطہ ج پر عمل کرتی ہے مرکب کیجا سکتی ہیں اور اسی طرح دو قوتیں ر، ر جو ب، ا پر عمل کرتی ہیں ایک قوت ۲ ر میں جو اب کے وسطی نقطہ ج پر عمل کرتی ہے مرکب کیجا سکتی ہیں ۔ یہ دو قوتیں ۲ ر، ۲ ر مساوی ہیں اور ایک ہی نقطہ ج پر مخالف سمتوں میں عمل کرتی ہیں ۔ اِس لیے توازن ہے اور یہ ثابت ہوتا ہے کہ دو جفت مماثل ہوتے ہیں اگر ان کے معیار مساوی ہوں اور اگر وہ مستوی جن میں وہ عمل کرتے ہیں متوازی ہوں ۔ (۱۰۵)

۸۱ ۔ وہ سمت جو اُس مستوی پر عمود ہو جس میں ایک جفت عمل کرتا ہے اُس جفت کا محور کہلاتی ہے چنانچہ دو جفت جن کا محور ایک ہی ہو اور جن کے معیار مساوی ہوں مماثل ہوتے ہیں ۔

جفتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کرنا

۸۲ ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ کوئی جفت ایک مقدار (اُس کا معیار) اور ایک سمت (اُس کا محور) سے متعین ہو جاتا ہے ۔ اس لیے اُس کو ایک

شکل (۵۷)

خطِ مستقیم سے پوری طرح تعبیر کیا جا سکتا ہے، اس خط کی سمت محور کی سمت ہو گی اور اس کا طول جفت کے معیار کی مقدار کو کسی پیمانے پر تعبیر کرے گا

اب ہم ثابت کریں گے کہ جفت قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کئے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ۔ اگر دو جفت مقدار اور سمت میں دو خطوں اب، اج سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل ایک جفت ہو گا جو مقدار اور سمت میں اد سے تعبیر ہو گا جہاں اد اس متوازی الاضلاع کا وتر ہے جس کے کنارے اب، اج ہیں۔

فرض کرو کہ اب، اج دو خط ہیں جو اپنی سمت اور مقدار سے دو جفتوں کے محوروں اور معیاروں کو علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ س اس َ ایک خط ہے جو مستوی اب ج پر عمود ہے جہاں ا اس خط کا وسطی نقطہ ہے۔ س اور س َ میں سے مستوی اب ج کے متوازی مستویاں کھینچو اور فرض کرو کہ جفت اب کی بجائے ان دو مستویوں میں قوتیں ف س، ف َ س َ ہیں جہاں خطوط ف س، ف َ س َ (۱۰۶) دونوں اب پر عمود ہیں۔ اسی طرح فرض کرو کہ جفت اج کی بجائے اُن ہی دو مستویوں میں قوتیں ق س اور ق َ س َ ہیں۔

اب ان دو جفتوں کی بجائے چار قوتیں ف س، ق س، ف َ س َ، ق َ س َ ہیں۔

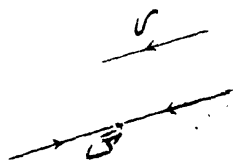
متوازی الاضلاعوں ف س ق ر، اب اج د، ف َ س َ ق َ ر َ کی تکمیل کرو۔ صریحاً یہ متوازی الاضلاع سب کے سب ایک دوسرے کے مشابہ ہیں اور پہلے اور دوسرے متوازی الاضلاعوں کے

نظیری خطوط ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں۔ اس طرح اُس جفت کی بجائے جو ا د سے تعبیر ہوتا ہے دو قوتیں ر اس، ر اسَ رکھی جاسکتی ہیں۔ لیکن یہ دو قوتیں ان چار قوتوں ف س، ق س، ف سَ، ق سَ کے ٹھیک مماثل ہیں جن میں جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جفت اب، اج تحویل ہو سکتے ہیں۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

قوتیں فضا میں

۸۳ — جب ایک جسم پر عمل کرنے والی قوتیں سب کی سب ایک مستوی میں نہ ہوں تو ان کا حاصل بالعموم ایک واحد قوت نہیں ہوگا۔

مسئلہ۔ ایک اُستوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کی بجائے ایک قوت اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں جہاں قوت ایک اختیاری طور پر منتخبہ نقطہ پہ عمل کرے۔

فرض کرو کہ گ منتخبہ نقطہ ہے اور ر کوئی قوت ہے جس کا خط عمل گ میں سے نہیں گذرتا۔ گ پر دو مساوی اور مخالف قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک ر کے مساوی اور اس کے خط عمل کے متوازی ہو۔ ان میں سے ایک قوت کو ابتدائی قوت ر کے ساتھ مرکب کرنے سے ایک جفت حاصل ہوتا ہے، اس لیے ابتدائی قوت ر کی بجائے ایک قوت (جو ابتدائی قوت کے مساوی اور متوازی ہے لیکن نقطہ گ پر عمل کرتی ہے) اور ایک

شکل (۵۸)

جفت رکھے جا سکتے ہیں۔

نظام کی تمام قوتوں کے ساتھ یہی عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ قوتوں کے ابتدائی نظام کی بجائے

(ا) قوتوں کی ایک تعداد جو منتخبہ نقطہ گ پر عمل کرتی ہیں،

اور (ب) جفتوں کی ایک تعداد

رکھی جا سکتی ہے۔

گ پر عمل کرنے والی قوتوں کو گ پر کی ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے اور جفتوں کو ایک واحد جفت میں مرکب کیا جا سکتا ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہو چکا۔

۸۴۔ مسئلہ۔ ایک استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کی بجائے ایک قوت اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں جہاں جفت کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہو۔ (۱۰۷)

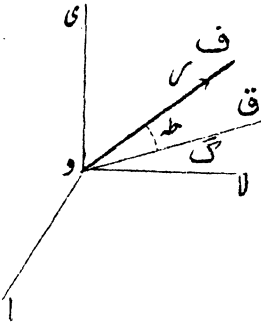
دفعہ ۸۳ کے مسئلہ سے اس نظام کی بجائے ایک قوت (جو کسی نقطہ و پر عمل کرے) اور ایک جفت رکھے جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ اس قوت کی مقدار ر ہے اور اس کا خط عمل و ف ہے۔ فرض کرو کہ جفت کا معیار گ ہے اور اس کا محور و ق ہے۔ اگر زاویہ ف و ق کو طه سے تعبیر کیا جائے تو ہم اس جفت کو دو جفتوں میں تحلیل کر سکتے ہیں،

(ا) معیار گ جم طه کا ایک جفت جس کا محور و ف ہے،

اور (ب) معیار گ جب طه کا ایک جفت جس کا محور و ف پر عمود ہے۔

ان میں سے دوسرے جفت کی بجائے کوئی دو قوتیں رکھی جا سکتی ہیں بشرطیکہ وہ ایسی منتخب کی جائیں کہ وہ اس جفت کے مماثل ہوں فرض کرو کہ ان میں سے ایک قوت ۔ر ہے جو و ف پر عمل کرتی ہے یعنے یہ وہ قوت ہے جو اُس قوت ر کی جو پہلے ہی سے و ف پر عمل کرتی ہے تعدیل کرتی ہے۔ جفت کی دوسری قوت وہ قوت ر ہونی چاہئے جو و ف کے

متوازی خط پر اس سے ایک ایسے فاصلہ پر عمل کرے جو $\frac{\text{گ جب طہ}}{ر}$ کے مساوی ہے

قوتوں کے ابتدائی نظام کی بجائے
اب حسب ذیل قوتیں اور جفت
ہیں:
(ا) قوتیں + ر اور - ر جو و ف پر عمل کرتی ہیں
(ب) قوت ر جو و ف کے متوازی ہے
(ج) جفت گ جم طہ جس کا محور و ف کے متوازی ہے۔

شکل (۵۹)

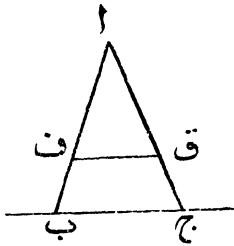
دو قوتیں (ا) ایک دوسرے کی تعدیل کرتی ہیں اور اس لیے صرف ایک قوت ر اور ایک جفت گ جم طہ رہ جاتا ہے جس کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہے۔ اس سے مسئلہ ثابت ہے۔

قوت کے اس خط عمل کو جو اب جفت کا محور بھی ہے قوتوں کے نظام کا مرکزی محور کہتے ہیں۔ قوتوں کا کوئی نظام سب سے زیادہ سادہ طریقہ پر مشخص ہو جاتا ہے اگر قوت اور جفت کی مقدار اور مرکزی محور کا محل اور سمت معلوم ہوں۔ ایسے کسی نظام کو ریچ (Wrench) کہتے ہیں۔

توضیحی مثالیں

(۱۰۸)

۱۔ دو مساوی یکساں تختے قبضے کے ذریعہ ایک سرے پر جوڑے گئے ہیں اور وہ اس طرح کھڑے ہیں کہ ان کے آزاد سرے ایک چکنے افقی مستوی پر ٹکے ہوئے ہیں اور انہیں پھسلنے سے ایک رسی کے ذریعہ روکا گیا ہے جو ہر تختے سے ایک ہی ارتفاع پر بندھی ہے۔ اس رسی کا تناؤ اور قبضے پر عمل معلوم کرو۔

شکل میں فرض کرو کہ ا ب، ا ج دو تختے ہیں جو ا پر قبضے سے جوڑے گئے ہیں اور فرض کرو کہ ف ق رسی ہے۔ تختہ ا ب پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) قبضہ ا پر کا عمل،

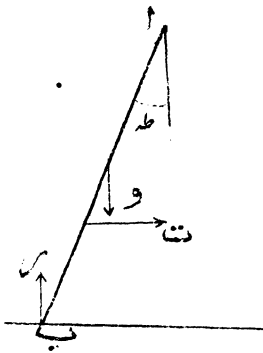
(ب) رسی کا تناؤ جو ف ق پر عمل کرتا ہے،

(ج) پائین ب پر کا تعامل،

(د) وزن۔

شکل (۶۰)

ان چار قوتوں میں سے (ا) اور (ب) وہ قوتیں ہیں جن کو معلوم کرنا مطلوب ہے۔ قوت (ج) بھی فی الحال نا معلوم ہے۔ قوت (د) کو جیسا کہ دفعہ ۷۷ میں سمجھایا جا چکا ہے ایک واحد قوت و سمجھا جا سکتا ہے جو تختے کا کل وزن ہے اور چونکہ تختہ یکساں ہے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ یہ قوت اس کے وسطی نقطے میں سے عمل کرتی ہے۔

قوت (ج) کو جو ب پر کا تعامل ہے معلوم کرنے کا ایک سادہ طریقہ ہے چونکہ ب پر تماس چکنا ہے اس تعامل کی سمت انتصاباً اوپر ہونی چاہیے۔ فرض کرو کہ اس کی مقدار ر ہے۔

تشاکل کی بنا پر دوسرے تختے کے پائین ج پر ٹھیک متشابہ تعامل ہونا چاہیے اب اس پورے نظام کے توازن پر غور کرو جو دو تختوں اور رسی پر مشتمل ہے۔ اس نظام پر جو بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں وہ صرف حسب ذیل ہیں:

(ا) وزن

(ب) ب اور ج پر کے تعامل۔

اگر ہم انتصاباً تحلیل کریں تو

شکل (۶۱)

چونکہ نظام توازن میں ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

۲ ک = ۲ و ۔

اس لیے ک = و، یہ تعامل ایک تختے کے وزن کے عین مساوی ہے جیسا کہ ہمیں توقع ہونی چاہیئے تھی۔

تختہ اب پر عمل کرنے والی چار قوتوں میں سے آخری دو قوتیں اب معلوم ہیں اور پہلی دو معلوم کرنی ہیں۔ اگر ہم ا کے گرد معیار لیں تو قوتوں (ب)، (ج) اور (د) کے درمیان ایک مساوات ملے گی جس سے نامعلوم قوت (ب) یعنی تناؤ معلوم ہوگا۔

اگر ہم تناؤ کو ت سے تعبیر کریں اور زاویہ ب ا ج کو ۲ ط سے تو ا کے گرد معیار لینے سے حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے:

ک × اب جب ط ـ و × ½ اب جب ط ـ ت × اف جم ط = ۰

اس لیے ت = اب / ۲ اف و س ط، کیونکہ ک = و

(۱۰۹) نیز افقاً اور انتصاباً تحلیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ ا پر کا عمل مقدار ت کی ایک افقی قوت پر مشتمل ہونا چاہیئے جس کی سمت ت کی سمت کے مخالف ہو۔

۲۔ ایک حلقہ ایک میز پر کھڑا ہے اور اس کے ایک نقطے پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ ڈالا گیا ہے۔ دونوں تماسوں پر رگڑ کی قدریں معلوم ہیں۔ امتحان کرو کہ توازن اولاً کس طرح ٹوٹ جائے گا۔

فرض کرو کہ حلقہ اور میز کا نقطہ تماس ا ہے اور حلقہ اور انگلی کا نقطہ تماس ب۔ فرض کرو کہ ا اور ب پر رگڑ کے زاویے صہ، صہَ ہیں۔ فرض کرو کہ ب ا انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے۔

حلقے پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) تعامل نقطہ ا پر،
(ب) تعامل نقطہ ب پر،
(ج) حلقہ کا وزن

شکل (۶۲)

آخری قوت کو ایک واحد قوت سمجھنے سے جو حلقہ کے انتصابی قطر ج ا پر عمل کرتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب تک حلقہ ساکن رہتا ہے وہ تین قوتوں کے زیر عمل توازن میں ہے۔

پس دفعہ ۵۲ کے مسئلہ کے رو سے ان تین قوتوں کے خطوط عمل ایک نقطہ پر ملنے چاہئیں۔

یہ معلوم ہے کہ وزن کا انتصابی خط ج ا ہے اور ا پر کے تعامل کا خطِ عمل ا میں سے گذرنا چاہئے۔ اِس لئے یا تو

(عہ) وہ نقطہ جس میں تین خطوط عمل ملتے ہیں ا ہونا چاہئے، یا

(بہ) ا پر کا تعامل ج ا پر عمل کرنا چاہئے، اِس لئے وہ نقطہ جس میں تین خطوط عمل ملتے ہیں ج ا میں ا کے سوا کوئی دوسرا نقطہ ہوگا۔

یہ دوسری صورت فوراً خارج کی جا سکتی ہے کیونکہ اگر ا پر کا تعامل ج ا پر عمل کرتا ہے تو اسکو اور وزن کو ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے اور ایسی

توازن اِس قوت اور ب پر کے تعامل کے تحت ہونا چاہیئے ۔ اِس کے لیے ضروری ہے کہ ہر قوت معدوم ہو یعنے ب پر کوئی دباؤ نہو اور ا پر کا تعامل حلقہ کے وزن کے عین برابر ہو ۔ اِس سے صریحًا توازن کی ایک حالت ملتی ہے یعنی حلقہ بیز پر کھڑا ہے اور اِس پر صرف اِس کا وزن عمل کرتا ہے ۔ لیکن توازن کی یہ حالت وہ نہیں ہے جس سے ہمیں اِس مثال میں واسطہ ہے۔

اب ہم صورت (عہ) پر غور کریں گے ۔ اگر تین خطوط عمل ا پر ملتے ہیں تو ب پر کے تعامل کو ب ا پر عمل کرنا چاہیئے اور یہ بات درست ہونی چاہیئے خواہ ب پر کا دباؤ کتنا ہی بڑا ہو ۔ پس ب پر کا تعامل عماد کے ساتھ ہمیشہ زاویہ عہ بنائیگا اگر عہ، ب پر کے رگڑ کے زاویہ صہ سے کم ہے تو تعامل کے لیے یہ ایک ممکن خط عمل ہوگا اور ب پر کوئی پھسلن واقع نہو سکے گی خواہ ب پر کتنا ہی بڑا دباؤ عمل کرے ۔

برخلاف ازین اگر عہ، صہ سے بڑا ہے تو توازن ناممکن ہے خواہ ب پر کا دباؤ کتنا ہی چھوٹا ہو ۔ اِس لیے اگر توازن ہے تو ب پر کا دباؤ معدوم ہونا چاہیئے اور اِس طرح ہم توازن کی اُسی حالت پر پہنچتے ہیں جو صورت (بہ) میں حاصل ہوئی تھی ۔ جوں ہی ب پر کا دباؤ قابل قدر ہو جاتا ہے توازن، ب پر پھسلن واقع ہونے کی وجہ سے ٹوٹ جاتا ہے کیونکہ ب پر توازن برقرار رکھنے کے لیے تعامل کو ایسے زاویہ پر عمل کرنا پڑیگا جو رگڑ کے اصلی زاویہ سے بڑا ہو ۔

شکل (۶۳)

اس طرح حل دو مختلف صورتوں میں پیش ہوتا ہے :۔

صورت (۱) اگر عہ، صہ سے بڑا ہے تو جوں ہی ب پر دباؤ ڈالا جاتا ہے حرکت واقع ہوتی ہے ۔ حلقہ، ب پر پھسلتا ہے اور اِس لیے ا پر لڑھکتا ہے ۔

صورت (۲) اگر عہ، صہ سے کم ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ ب پر خواہ کتنا ہی بڑا وباؤ ڈالا جائے ب پر پھسلن واقع نہیں ہو سکتی۔ اب یہ امتحان کرنا باقی ہے کہ آیا ا پر پھسلن واقع ہو گی۔

اِس سوال کا تصفیہ کرنے کے لیے ہمیں یہ معلوم کرنا چاہیے کہ آیا ا پر کا تعامل انتصابی کے ساتھ ایک ایسے زاویہ پر عمل کرتا ہوا معلوم کیا جا سکتا ہے جو اتنا بڑا ہو جتنا ا پر رگڑ کا زاویہ ہے یعنے صہ۔ اب حلقہ پر تین قوتیں عمل کرتی ہیں یعنے ا اور ب پر کے تعامل $ر_ا$، $ر_ب$ (فرض کرو) اور حلقہ کا وزن و۔ اِن قوتوں کے خطوط نقطہ ا پر ملتے ہیں اور لامی کے مسئلے سے ہم قوتوں کی مقداروں اور اِن کے درمیانی زاویوں کے درمیان رشتے معلوم کر سکتے ہیں۔

اِن تین قوتوں کے خطوط عمل شکل (۶۳) میں تعبیر کئے گئے ہیں۔ و اور $ر_ب$ کا درمیانی زاویہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں ہمیشہ عہ کے مساوی ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ $ر_ا$ اور انتصابی کے درمیان زاویہ طہ ہے، اب لامی کے مسئلے سے

$$\frac{ر_ا}{جب\ عہ} = \frac{ر_ب}{جب\ طہ} = \frac{و}{جب\ (عہ - طہ)}$$

$ر_ا$ کی قیمت معلوم نہیں ہے، لیکن آخری دو کسروں کو مساوی رکھنے سے

$$\frac{و}{ر_ب} = \frac{جب\ (عہ - طہ)}{جب\ طہ} = جب\ عہ\ مم\ طہ - جم\ عہ$$

اِس لیے　　$مم\ طہ = (جم\ عہ + \frac{و}{ر_ب})\ قم\ عہ$

اِس مساوات سے ہم زاویہ طہ کی قیمت میں تبدیلیاں معلوم کر سکتے ہیں (۱۱۱) جبکہ $ر_ب$ کو بتدریج بڑھایا جاتا ہے۔ چنانچہ جب $ر_ب$ = ۰ تو طہ کی قیمت = ۰۔ پھر جیسے $ر_ب$ صفر سے بڑھتا ہے طہ مسلسل بڑھتا ہے لیکن قیمت طہ = عہ سے متجاوز نہیں ہوتا اور اِس قیمت پر وہ اُس وقت پہنچتا ہے جبکہ $ر_ب = \infty$۔

اگر صہ، عہ سے کم ہے تو طہ کی قیمت، قیمت صہ میں سے گذرے گی جبکہ $ر_ب$ ایک خاص قیمت پر پہنچے ــ یعنے جبکہ

$$\text{کا}_1 = \frac{\text{و جب صہ}}{\text{جب (عہ ـ صہ)}}$$

اور اس نقطہ پر ا پر پھسلن واقع ہو گی۔
اگر صہ، عہ سے بڑا ہے تو کا کی قیمت، قیمت صہ پر کبھی بھی نہیں پہنچے گی اور اس لیے ا پر کبھی بھی پھسلن واقع نہیں ہو گی۔ اس لئے توازن ہرگز نہیں ٹوٹے گا اور جتنی قوت سے ب پر ہم دبائیں گے اتنی ہی زیادہ مضبوطی سے حلقہ انگلی اور میز کے درمیان گرفت میں رہے گا۔

اب ہم محصلہ نتیجوں کو خلاصہ کے طور پر ذیل میں درج کرتے ہیں:
اگر عہ > صہ تو حلقہ میز پر لڑھلتا ہے جوں ہی ہم ب پر دبانا شروع کرتے ہیں۔
اگر عہ < صہ تو دو صورتیں ہیں:
(ا) عہ > صہ تو حلقہ ا پر پھسلے گا جوں ہی کافی دباؤ لگایا جائے
(ب) عہ < صہ تو حلقہ کسی دباؤ کے تحت بھی متحرک نہیں کیا جا سکتا۔

حلقے کو انگلی کے نیچے سے ا پر پھسلا کر نکالنے کے لیے (اس صورت میں وہ اچھلکر ہاتھ میں آجائے گا جیسا کہ مشہور ہاتھ کی چالاکی کے کرتب میں کیا جاتا ہے) حلقے کو ایسے نقطہ پر دبانا ضروری ہے جس پر عہ، صہ سے بڑا ہو لیکن صہ سے کم ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ، صہ سے بڑا ہو تو حلقہ کو اس طریقے سے پھینکنا ناممکن ہے یہ صرف اس وقت کیا جا سکتا ہے جبکہ انگلی کے ساتھ حلقے کا تماس میز کے ساتھ حلقے کے تماس سے زیادہ کھردرا ہو۔

عام مثالیں

۱۔ دو یکساں سیڑھیوں کو جن میں سے ہر ایک ۱۲ فٹ لمبی اور ۲۰ پونڈ وزنی ہے سرے پر جوڑ کر ایک دوہری سیڑھی بنائی گئی ہے، سیڑھیوں کے ان نقطوں کو جو زمین سے ۵ فٹ بلند ہیں ۷ فٹ لمبی رسی سے ملحق کیا گیا ہے، یہ دوہری سیڑھی ایک چکنے افقی مستوی پر کھڑی ہے اور ایک شخص جس کا وزن

۱۶۰ پونڈ ہے ایک جانب ۹ فٹ بلندی تک چڑھتا ہے۔ رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

۲۔ ایک وزنی یکساں ڈنڈے کو دو ڈوریوں سے جن کے طول ا، ب ہیں سہارا گیا ہے، ڈوریوں کے اوپر کے سرے ایک ہی نقطے سے باندھے گئے ہیں اور نیچے کے سرے ڈنڈے کے سروں سے بندھے ہیں۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ علی الترتیب ا اور ب کے متناسب ہیں۔

۳۔ دو چھوٹی ثابت کھونٹیاں ایک ایسے خط میں ہیں جو افق سے زاویہ طہ پر مائل ہے۔ ایک کھردرا پتلا ڈنڈا نچلی کھونٹی کے نیچے سے گذرتا ہے اور اوپر کی کھونٹی پر ٹکا ہے، یہ اونچی کھونٹی ڈنڈے کے مرکز ثقل سے نیچے ہے۔ کھونٹیوں سے اس مرکز ثقل کے فاصلے علی الترتیب ا اور ب ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ڈنڈا عین حرکت کے نقطے پر ہو تو

$$\text{مہ} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ب} + \text{ا}} \text{ مس طہ}$$

۴۔ دو وزنی یکساں ڈنڈوں کے سرے دو ہلکی ڈوریوں سے مربوط (۱۱۲) ہیں اور یہ پورا نظام ایک ڈنڈے کے وسطی نقطے سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں یا تو ڈنڈے متوازی ہوتے ہیں یا ڈوریاں متوازی ہوتی ہیں۔

۵۔ دو ڈنڈے اب، ج د ایک چکنے میز پر پڑے ہیں اور دو تنی ہوئی ڈوریوں اج، ب د سے باہم ملحق ہیں۔ اگر یہ نظام اُن قوتوں سے جو ڈنڈوں کے وسطی نقطوں پر عمل کرتی ہیں توازن میں رکھا گیا ہو تو ثابت کرو کہ اگر ڈوریاں متوازی نہیں ہیں تو

(ا) ڈنڈے متوازی ہونے چاہئیں،

(ب) تناؤ ڈوریوں کے متناسب ہونے چاہئیں۔

۶۔ اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے اور ع، وتروں اج، ب د کا نقطہ تقاطع ہے۔ ثابت کرو کہ ا، ب، ج، د پر کی متوازی قوتیں ۷، ۵، ۱۶، ۴ حسب ذیل دوسری متوازی قوتوں کے مماثل ہیں ج د کے

وسطی نقطے پر ۸، ب ج کے وسطی نقطے پر ۱۰، اور ع پر ۱۴

۷ ـ ایک ٹھوس مکعب زاویہ عہ کے ایک کھردرے مائل مُستوی پر رکھا گیا ہے، اِس کے قاعدے کے دو کنارے خطوط میلان اعظم پر ہیں ـ رگڑ کا زاویہ صہ ہے ـ ثابت کرو کہ اگر عہ > ۴۵° تو مکعب فوراً اوندھا گِر ے گا لیکن اگر صہ < عہ < ۴۵° تو مُستوی پر نیچے پھسلے گا ـ اگر عہ، صہ یا ۴۵° میں سے کسی سے کم ہو تو وہ رگڑ معلوم کرو جو عمل میں آتی ہے ـ

۸ ـ طول ۲ ل اور وزن و کا ایک یکساں ڈنڈا ایک چکنی کھونٹی پر لٹکا ہوا ہے، کھونٹی پر اِس کا فاصلہ انتصابی دیوار سے ف (< ل) ہے اور اُس کی سمت افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے ـ اِس کا نچلا سِرا دیوار پر دباؤ ڈالے ہے اور اوپر کا سِرا ایک انتصابی ڈوری کے ذریعہ تھاما گیا ہے ـ ڈوری کا تناؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ وہ معدوم ہوگا اگر

$$طہ = جم^{-1} \sqrt{\frac{ف}{ل}}$$

۹ ـ دو مساوی ایکساں کرے جن میں سے ہر ایک کا وزن و اور نصف قطر ا ہے ایک چکنے نیم کروی پیالے ہیں جس کا نصف قطر ب ہے پڑے ہوئے ہیں ـ اِن دو کروں کے درمیان دباؤ معلوم کرو اور نیز ہر کرہ کا دباؤ پیالے پر دریافت کرو ـ

۱۰ ـ ایک یکساں ڈنڈے کے سِرے چکنے مائل مُستویوں پر ہیں جنکے میلان افق سے عہ اور بہ ہیں ـ افق کے ساتھ ڈنڈے کا میلان معلوم کرو ـ

۱۱ ـ مثال ۱۰ میں ڈنڈے کے وزن کے مساوی ایک وزن ڈنڈے سے پیوست کیا گیا ہے ـ اِس وزن کو کس نقطہ پر لگانا چاہیئے کہ ڈنڈا افقاً ساکن رہ سکے ـ

۱۲ ـ وزن و کا ایک ایکساں دائری حلقہ ہے جس پر وزن وَ کے ایک منکے کو پیوست کیا گیا ہے ـ حلقہ ایک کھردری کھونٹی پر لٹک رہا ہے ـ ثابت کرو کہ اگر جب صہ > $\frac{وَ}{و + وَ}$ تو حلقہ بغیر پھسلے ساکن رہ سکتا ہے خواہ اس کا کوئی نقطہ

کھونٹی پر ٹکے جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۳۔ ایک مخمس ا ب ج د ع، پانچ مساوی یکساں وزنی ڈنڈوں کو سروں پر چکنے قبضوں کے ذریعہ جوڑ کر بنایا گیا ہے۔ یہ مخمس ایک انتصابی مستوی میں تشاکلاً سہارا گیا ہے اس طور پر کہ ا سب سے اوپر ہے اور اب، اع دو چکنی کھونٹیوں کو مس کرتے ہیں جو ایک ہی افقی خط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر مخمس منتظم ہو تو کھونٹیاں، اب اور اع میں سے ہر ایک کو نسبت

$$1 + \text{جب} \frac{1}{10}\pi : ۳ \text{ جب} \frac{1}{10}\pi$$

میں تقسیم کرنی چاہئیں۔

(۱۱۳) ۱۴۔ طول ل کا ایک یکساں شہتیر نصف قطر ا کے ایک نیم کروی پیالے کی افقی کور کے سہارے پڑا ہے اور اس کا نچلا سرا پیالے کی چکنی مقعر سطح پر ٹکا ہوا ہے۔ انتصابی کے ساتھ اس کا میلان معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک پیالہ گردشی مکافی نما کی شکل کا ہے جس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے۔ ایک یکساں ڈنڈا ماسکے پر کی ایک میخ پر ٹکا ہوا ہے اور اس کا نچلا سرا اندرونی سطح پر ہے۔ دونوں تماس کامل چکنے ہیں۔ انتصابی کے ساتھ ڈنڈے کا میلان معلوم کرو۔

۱۶۔ وزن و کا ایک یکساں شہتیر ایک انتصابی دیوار پر اور ایک افقی مستوی پر جس کے ساتھ وہ زاویہ عہ بناتا ہے ٹکا ہوا ہے، دونوں تماس کامل چکنے ہیں۔ شہتیر کے نچلے سرے کو ایک ڈوری کے ذریعہ دیوار کے پائین سے باندھا گیا ہے۔ رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

۱۷۔ ایک سیدھے یکساں وزنی ڈنڈے کا ایک سرا ایک کھردرے افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہے اور دوسرے سرے کو ایک رسی کے ذریعہ ایک ثابت نقطے سے ملحق کیا گیا ہے۔ اگر ڈوری، ڈنڈے اور افقی مستوی کے کل تعامل کے میلان سمت انتصابی کے ساتھ علی الترتیب طہ، فہ، یہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم طہ} \pm ۲ \text{ مم فہ} - \text{مم یہ} = ۰$$

۱۸ ۔ ایک ہی مادی شئے کے لیکن مختلف طول کے دو یکساں ڈنڈے اب، ب ج آزادانہ طور پر ب پر جوڑے گئے ہیں اور ایک انتصابی دیوار پر نقطوں ا اور ج پر ثبت کئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب پر کے تعامل کی سمت زاویہ ا ب ج کی تنصیف کرتی ہے۔

۱۹ ۔ وزن و کے ایک یکساں منتظم مسدسی تختہ اب ج د ع ف کو تین کھونٹیوں پر جو کونوں ا، ب پر اور د ع کے وسطی نقطہ پر واقع ہیں افقی محل میں سہارا گیا ہے۔ کھونٹیوں پر دباؤ معلوم کرو۔

۲۰ ۔ دو کرے جن کے نصف قطر ا، ب اور وزن و، وَ ہیں علی الترتیب طول ل، لَ کی ڈوریوں کے ذریعہ چھت کی ایک ہی کنڈی سے آزادانہ لٹکائے گئے ہیں۔ اگر لَ > ل + ۲ ا تو ثابت کرو کہ وہ زاویہ جو پہلی ڈوری انتصابی کے ساتھ بناتی ہے حسب ذیل ہے ا

$$\text{جب}^{-1} \frac{\text{وَ ا}}{(\text{و} + \text{وَ})(\text{ا} + \text{ل})}$$

۲۱ ۔ ایک یکساں ڈنڈا طول ل، لَ کی دو ڈوریوں کے ذریعے جو اس کے سروں سے اور دو کنڈیوں سے بندھی ہیں لٹکتا ہے۔ کنڈیاں ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے فاصلہ ا پر ہیں۔ اگر ڈوریاں ایک دوسرے کو عبور کریں اور اُفق کے ساتھ علی الترتیب زاوئے عہ، عہَ بنائیں تو ثابت کرو کہ جب ڈنڈا توازن میں ہوتا ہے تو

$$\text{جب}(\text{عہ} + \text{عہَ})(\text{لَ جم عہَ} - \text{ل جم عہ}) = \text{ا جب}(\text{عہ} - \text{عہَ})$$

۲۲ ۔ طول ۲ ب کا ایک یکساں تختہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک کھُردرے افقی مستوی پر ہے اور تختہ نصف قطر ا کے ایک چکنے ثابت اسطوانہ کو جو مستوی پر پڑا ہے مس کرتا ہے اور مستوی کے ساتھ زاویہ ۲ عہ بناتا ہے۔ رگڑ کی قدر صہ ہے۔ ثابت کرو کہ توازن ممکن ہے اگر

$$\text{ا جب صہ} > \text{ب مس عہ جم ۲ عہ جب}(\text{۲ عہ} + \text{صہ})$$

۲۳ ۔ دو مساوی اور مشابہ متساوی الساقین قائمے جن میں سے ہر ایک کا

وزن و اور انتصابی زاویہ ۲ عہ ہے پہلو بہ پہلو رکھے گئے ہیں، اِن کے قاعدے ایک افقی میز پر ہیں اور وہ میز کو وہ ایک کنارے پر عین مس کرتے ہیں۔ وزن و اور نصف قطر ر کا ایک چکنا کرہ اُن کے درمیان سہارا گیا ہے اور وہ ہر ایک کے ایک رُخ کو مس کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن کے لیے یہ ضروری ہے کہ

$$\text{مہ} > \frac{\text{و مم عہ}}{\text{۲ و + و}} \text{ ، } \text{ر} < \text{۲ ا جب عہ مس عہ} \left(\text{۱} + \frac{\text{و}}{\text{و}}\right)$$

جہاں مہ رگڑ کی قدر کو تعبیر کرتا ہے اور ۲ ا فانے کے قاعدے کا طول ہے ۔

۲۴ ۔ وزن و کا ایک مستطیلی تختہ ایک ثابت کھردرے کُندے پر جس کی شکل ایک افقی مستدیر اسطوانے کی ہے آڑا پڑا ہوا ہے ۔ تعامل کی حالت میں افقی کے ساتھ یہ تختہ جو زاویہ بناتا ہے وہ عہ تک بڑھ جاتا ہے جبکہ اِس کے نیچے کے اور اوپر کے سِروں پر علی الترتیب وزن و اور وَ رکھے جاتے ہیں اور یہ زاویہ بہ تک گھٹ جاتا ہے جب کہ اِن وزنوں کا باہمی تبادلہ کیا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ تختہ کا میلان افق کے ساتھ جبکہ اُس پر کوئی وزن نہ ہو حسب ذیل ہے :

$$\frac{\text{وَ (و + وَ + و) (وَ عہ − و بہ)}}{\text{و (و + وَ − وَ) (و − وَ)}}$$

جہاں وَ وہ وزن ہے جس کو اوپر کے سِرے پر رکھنے سے تختہ افقاً متوازن ہوتا ہے ۔

۲۵ ۔ ایک زنجیر ۲ ن بالکل مشابہ کڑیوں سے بنی ہے اور متصلہ کڑیوں کے درمیان تماس کامل چکنے ہیں ۔ سِروں پر کی دو کڑیاں ایک افقی تار میں پھسل سکتی ہیں لیکن یہاں تماس کھردرے ہیں اور رگڑ کی قدر مہ ہے ثابت کرو کہ توازن کے انتہائی محل میں اوپر کی کڑیوں میں سے کسی ایک کا میلان انتصابی کے ساتھ حسب ذیل ہے

$$\text{مس}^{-1} \frac{\text{۲ ن مہ}}{\text{۲ ن − ۱}}$$

۲۶ ۔ نصف قطر ر کے دو مساوی دائری قرص جن کے کنارے چکنے ہیں

اپنے چپٹے رخوں پر دو چکنے انتصابی مستویوں کے درمیانی کونے میں رکھے گئے ہیں، یہ مستوی زاویہ ۲ عہ پر ایک دوسرے سے مائل ہیں اور قرص ایک دوسرے کو اس خط پر مس کرتے ہیں جو اس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ بڑے سے بڑا قرص جو اُن کے درمیان بغیر اِن کو ہٹائے بٹھایا جا سکتا ہے وہ ہے جس کا نصف قطر ر (قط عہ - ۱) ہے۔

۲۷ــ مثال ماسبق کے نتیجے میں کیا ترمیم کرنی ہوگی اگر تمام تماس کھُردرے ہوں اور ہر تماس پر رگڑ کا زاویہ صہ ہو۔

۲۸ــ دو یکساں سیڑھیاں ایک سرے پر جوڑی گئی ہیں اور یہ دوہری سیڑھی ایک کھُردرے اُفقی مستوی پر اپنے دوسرے سروں پر کھڑی ہے۔ ایک شخص جس کا وزن ایک سیڑھی کے وزن کے مساوی ہے ایک سیڑھی پر چڑھتا ہے ثابت کرو کہ دوسری سیڑھی پہلے پھسلے گی۔

اگر وہ پھسلنے لگے جبکہ شخص فاصلہ لا تک چڑھ چکا ہو تو ثابت کرو کہ رگڑ کی قدر

$\frac{ا + لا}{۲ ا + لا}$ ہے جہاں ا ہر سیڑھی کا طول ہے اور عہ وہ زاویہ ہے جو ہر سیڑھی انتصابی سے بناتی ہے۔

(۱۱۵) ۲۹ــ ایک غیر وزنی سیڑھی، وزن و کے ایک چکنے مکعب کے سہارے چکنی زمین پر کھڑی ہے اور سیڑھی کا پایہ مکعب کے زیریں کناروں میں سے ایک کے وسطی نقطہ کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ بندھا ہے۔ وزن و کا ایک شخص سیڑھی پر چڑھتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سیڑھی مکعب کے سرے سے باہر نکلی ہوئی ہو تو مکعب اُلٹ جائیگا قبل اِس کے کہ شخص مکعب کے سرے پر پہنچے اِلّا اُنکہ

$$و > ۲ و \text{ جم عہ (جب عہ - جم عہ)}$$

جہاں افق کے ساتھ سیڑھی کا زاویہ میلان عہ ہے۔

۳۰ــ چار مساوی کُرے ایک چکنے کُروی پیالے کی تہ میں پڑے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں، کُروں کے مرکز ایک افقی مستوی میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دوسرا مساوی کُرہ اِن پر رکھا جائے تو نیچے کے کُرے جدا ہونگے

اگر پیالے کا نصف قطر ایک کرہ کے نصف قطر کے $(\sqrt{13}+1)2$ گُنے سے بڑا ہو۔

۳۱۔ تین مساوی کرے ایک چکنے افقی مستوی پر ساکن ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ان کے مرکز ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں اور کروں کو باہم ایک مہین ڈوری سے جو ان کے گرد گذرتی ہے اور مرکزوں کے مستوی میں ہے باندھا گیا ہے۔ اگر دوسرا مساوی کرہ ان کے منتشا کلاً رکھا جائے تو ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ بقدر $\frac{1}{\sqrt{6}}$ و کے بڑھ جاتا ہے جہاں و اوپر کے کرہ کا وزن ہے۔

۳۲۔ ایک قائم مستدیر مخروط جس کا انتصابی زاویہ ۲ عہ ہے اپنے قاعدہ کے سہارے ایک افقی کھردرے مستوی پر ساکن ہے۔ اس کے راس سے ایک ڈوری باندھ کر ڈوری کو افقی سمت میں بتدریج بڑھنے والی قوت سے کھینچا جاتا ہے۔ معلوم کرو کہ توازن اولاً کس طرح ٹوٹیگا۔

۳۳۔ ایک وزنی ذرہ کو ایک کھردرے مائل مستوی پر رکھا گیا ہے جس کا میلان رگڑ کے زاویہ کے ٹھیک مساوی ہے۔ ذرہ سے ایک تاگا باندھ کر تاگے کو مستوی کے ایک سوراخ میں سے جو ذرہ کے نیچے ہے گذارا گیا ہے لیکن تاگا سوراخ میں سے گذرنے والے خط میلان اعظم میں نہیں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تاگے کو سوراخ میں سے بتدریج کھینچا جائے تو ذرہ ایک خط مستقیم اور ایک نیم دائرہ علی التواتر مرتسم کرے گا۔

۳۴۔ وزن و کا ایک ایکساں مکعبی کندہ ایک کھردرے مائل مستوی پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک کنارہ افقی ہے۔ اور کندے کے سہارے ایک کھردرا کرہ ہے جس کا وزن وَ ہے اور جس کا نصف قطر مکعب کے ایک کنارے سے کم ہے۔ مستوی کے میلان کو بتدریج بڑھایا جاتا ہے۔ وہ مختلف طریقے معلوم کرو جن میں توازن ٹوٹ سکتا ہے اور معلوم کرو کہ کسی معلومہ صورت میں کون سا طریقہ واقع ہوگا۔

۳۵۔ ایک کھردرے ایکساں ڈنڈے کو ایک افقی مستوی پر رکھا گیا ہے اور اس کے طول کے نقاط تثلیث میں سے ایک نقطہ پر ایک افقی قوت

اِس کے طول کے عمود وار سمت میں عمل کرتی ہے ۔ معلوم کرو کہ کس نقطہ کے گرد ڈنڈا گھومنے لگیگا ۔

۳۶ ۔ ایک وزنی سلاخ ا ب کو طول ل کی دو مساوی ڈوریوں کے ذریعہ جو ابتداً متوازی ہیں لٹکایا گیا ہے ۔ وہ جفت معلوم کرو جس کو سلاخ پر لگانا ہوگا تاکہ سلاخ کو افقی مستوی میں زاویہ طہ میں سے گھما دینے کے بعد ساکن رکھا جا سکے ۔

(۱۱۶) ۳۷ ۔ ایک دروازے کے قبضوں کا خط انتصابی سے زاویہ عہ پر مائل ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ جفت جب عہ جب طہ کے متناسب ہے جو دروازے کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہوتا ہے جو توازن کے محل سے زاویہ طہ پر مائل ہو ۔

۳۸ ۔ ثابت کرو کہ ایک اُستوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کے کسی نظام کو دو مساوی قوتوں میں جو مرکزی محور سے مساوی طور پر مائل ہوں تحویل کیا جا سکتا ہے ۔

۳۹ ۔ ثابت کرو کہ دو قوتوں ف اور ق کا مرکزی محور اِن کے خطوط عمل کے درمیانی فاصلہ م کو قطع کرتا ہے اور اِس کو نسبت

$$ق(ق + ف\ جم\ طہ) : ف(ف + ق\ جم\ طہ)$$

میں تقسیم کرتا ہے جہاں طہ قوتوں کی سمتوں کا درمیانی زاویہ ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ صدر جفت کا معیار حسب ذیل ہے

$$\frac{م\ ف\ ق\ جب\ طہ}{\sqrt{ف^2 + ق^2 + ۲\ ف\ ق\ جم\ طہ}}$$

۴۰ ۔ ثابت کرو کہ دو معلومہ رنچوں $(ر_۱, ھ_۱)$ اور $(ر_۲, ھ_۲)$ کے حاصل کا محور رنچوں کے محوروں کے درمیانی چھوٹے فاصلہ ۲ م کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کا فاصلہ وسطی نقطہ سے حسب ذیل ہے :

$$\frac{(ر_۱^2 - ر_۲^2)\ م + (ھ_۱ ر_۲ - ھ_۲ ر_۱)\ جب\ طہ}{ر_۱^2 + ر_۲^2 + ۲\ ر_۱ ر_۲\ جم\ طہ}$$

جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو رنچوں کے محوروں کے درمیان ہے ۔

(۱۱۷)

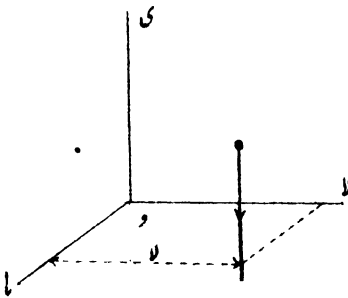
چھٹا باب

مرکز ثقل

۸۵ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ کمیتوں کے ایک نظام پر جاذبہ ارض کا عمل متوازی قوتوں کے ایک نظام سے تعبیر ہو سکتا ہے، یہ قوتیں اُن قوتوں پر مشتمل ہوتی ہیں جو ہر ذرّے پر ذرّے کے وزن کے مساوی عمل کرتی ہیں، اور اِن کی سمت انتصاباً نیچے وار ہوتی ہے۔ اُن قاعدوں کی بموجب جو باب ماسبق میں سمجھائے جا چکے ہیں اِن قوتوں کو ایک واحد قوت میں مرکب کیا جا سکتا ہے۔ اِس قوت کی مقدار تمام ترکیبی قوتوں کا مجموعہ ہے اور اِس لیے وہ جسم کا کُل وزن ہے، اور اِس قوت کی سمت ترکیبی قوتوں کے متوازی ہونے کی وجہ سے خود انتصاباً نیچے وار ہے۔ اِس باب میں اِس قوت کے خط عمل کے محل کو معلوم کرنے کا مسئلہ زیر بحث رہیگا۔

شکل (۶۴)

۸۶ — فرض کرو کہ ذروں کی کمیتیں ک، ک، ... ہیں۔

فرض کرو کہ قائم محور لیے گئے ہیں جن میں محور ی انتصابی ہے اور فرض کرو کہ پہلے ذرے کے محدّد لا، ما، ی ہیں، دوسرے ذرے کے محدّد

لا٫، ما٫، ی٫، اور علیٰ ہذا القیاس۔

پہلے ذرے کا وزن ک١ ج ہے اور اس کا خط عمل مستوی و لا ما کو ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کے محدد لا١، ما١. ہیں۔ اس لیے اس قوت کا معیار محور و ما کے گرد ک١ ج لا١ ہے۔

فرض کرو کہ حاصل کا خط عمل مستوی و لا ما کو نقطہ لاَ، ماَ. پر قطع کرتا ہے۔ اب حاصل کا معیار محور و ما کے گرد (Σ ک١) ج لاَ ہے جہاں Σ ک١ سے تمام ذروں کی کمیتوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

چونکہ حاصل کا معیار جدا جدا قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہئے (۱۱۸)

$$(\Sigma\ ک_1)\ ج\ لاَ = \Sigma\ (ک_1\ ج\ لا_1)$$

اس لیے
$$لاَ = \frac{\Sigma\ ک_1 لا_1}{\Sigma\ ک_1}$$

اسی طرح
$$ماَ = \frac{\Sigma\ ک_1 ما_1}{\Sigma\ ک_1}$$

ان مساواتوں سے اس نقطہ کے محدد لاَ، ماَ حاصل ہوتے ہیں جس پر حاصل کا خط عمل مستوی و لا ما سے ملتا ہے۔

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ نقطہ لا١، ما١، ی١ پر کی کمیت ک١، نقطہ لا٫، ما٫، ی٫ پر کی کمیت ک٫، وغیرہ کے مرکز ہندسی کے محدد حسب ذیل ہیں

$$لا = \frac{\Sigma\ ک_1 لا_1}{\Sigma\ ک_1}،\quad ما = \frac{\Sigma\ ک_1 ما_1}{\Sigma\ ک_1}،\quad ی = \frac{\Sigma\ ک_1 ی_1}{\Sigma\ ک_1}$$

اس لیے وہ نقطہ جس پر مرکز ہندسی میں سے گذرنے والا انتصابی مستوی و لا ما کو قطع کرتا ہے

$$\frac{\Sigma\ ک_1 لا_1}{\Sigma\ ک_1}،\quad \frac{\Sigma\ ک_1 ما_1}{\Sigma\ ک_1}،\ .$$

ہونا چاہئے یعنے یہ نقطہ، نقطہ لاَ، ماَ. ہونا چاہئے جس پر حاصل قوت کا

خطِ عمل مستوی ولا ما سے ملتا ہے۔ اس لیے

جاذبہ ارض کی حاصل قوت کا خطِ عمل وہ انتصابی خط ہے جو ذروں کے مرکزِ ہندسی میں سے گذرتا ہے۔

یہی وجہ ہے کہ نقطوں کی کسی تعداد کا مرکزِ ہندسی جب کہ اِن نقطوں کو اُن ذروں کی کمیتوں کی بموجب وزنی بنایا گیا ہو جو اُن نقطوں پر ہیں ذروں کا مرکزِ ثقل کہلاتا ہے۔ ایک اُستوار جسم پر جاذبہ کا اثر جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں ایک واحد قوت سے تعبیر ہوتا ہے جو جسم کے مرکزِ ثقل میں سے انتصاباً نیچے وار عمل کرتی ہے، اِس قوت کی مقدار جسم کے کل وزن کے مساوی ہوتی ہے۔ اِس لئے جاذبہ کا عمل وہی ہے جو ہوتا اگر جسم کی کل کمیت ایک واحد ذرے میں جو مرکزِ ثقل پر رکھا ہو مرتکز ہوتی۔

۸۷ — یہ ظاہر ہے کہ اگر ہم ایک اُستوار جسم کو یا اجسام کے نظام کو ایک ڈوری کے ذریعہ لٹکائیں تو مرکزِ ثقل ڈوری کے انتصاباً نیچے ہونا چاہیئے — کیونکہ نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں دو قوتوں میں تحلیل ہوتی ہیں — ڈوری کا تناؤ اور وزن جو مرکزِ ثقل پر عمل کرتا ہے — اور توازن کی حالت میں یہ دو قوتیں ایک ہی خط پر عمل کرنی چاہئیں — (۱۱۹)

اسی طرح یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر ایک جسم کو ایک نقطہ پر اس طریقہ سے رکھا جائے کہ وہ اِس نقطہ پر توازن کی حالت میں ہو تو مرکزِ ثقل اِس نقطہ کے انتصاباً اوپر ہونا چاہیئے —

۸۸ — دفعہ (۷۷) میں مرکزِ ثقل کے محل کی چند سادہ مثالیں بیان کی جا چکی ہیں۔ وہ حسبِ ذیل تھیں :

(ا) ایک یکساں ڈنڈے کا مرکزِ ثقل اِس کے وسطی نقطہ پر ہوتا ہے،

(ب) ایک یکساں دائری قرص، دائری حلقہ، یا کرہ کا مرکزِ ثقل اِس کے مرکز پر ہوتا ہے،

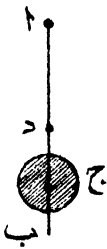
(ج) ایک مکعب یا متوازی السطوح کا مرکزِ ثقل مرکز پر ہوتا ہے

(یعنے وتروں کے نقطہ تقاطع پر)۔

۸۹ — اجسام کے کسی نظام کا مرکز ثقل معلوم کرنا آسان ہے جبکہ اِس کے حصوں میں سے ہر ایک کا مرکز ثقل معلوم ہو۔ کیونکہ ہر حصہ کے وزن کو ایک واحد قوت سمجھنے سے جو اس کے مرکز ثقل میں سے عمل کرتی ہے ہمیں عمل کرنے والی متوازی قوتوں کی ایک تعداد ملے گی اور ان متوازی قوتوں کو بیان کردہ قاعدوں کی بموجب مرکب کرنے سے حاصل کے خط عمل سے وہ خط معلوم ہوگا جس پر کُل وزن عمل کرے گا۔ اِس طرح اجسام کے کل نظام کا مرکز ثقل جداگانہ اجسام کے مراکز ثقل کا مرکز ہندسی ہوگا جبکہ اِن مراکز ثقل کو جسموں کی کمیتوں کی بموجب وزنی سمجھا گیا ہو۔

۹۰ — مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک رقاص کا مرکز ثقل معلوم کرنا چاہتے ہیں جو طول ل اور وزن و کے ایک تار پر جس کے ساتھ وزن **و** کا ایک دائری شاقول لٹکا ہوا ہے مشتمل ہے۔ فرض کرو کہ شاقول کے دائرے کا مرکز تار کے سرے سے فاصلہ ا پر ہے۔

فرض کرو کہ تار ا ب ہے، شاقول کا مرکز ج ہے اور تار کا وسطی نقطہ د ہے۔ تار کا مرکز ثقل د پر ہوگا اور شاقول کا ج پر، اِس لیے اس نظام کا مرکز ثقل نقطوں د اور ج کے مرکز ہندسی پر ہوگا جبکہ اِن نقطوں کو نسبت و : **و** میں وزنی بنایا گیا ہو۔ اِس مرکز ثقل کو ث سے تعبیر کیا جائے تو ضابطہ

$$لا = \frac{\sum ک_1 لا_1}{\sum ک_1}$$

سے جبکہ خط ا د ج ب کو محور لا اور ا کو مبداء فرض کیا جائے حاصل ہوتا ہے

شکل (۶۵)

$$ا ث = \frac{\mathbf{و} \times ا ج + و \times ا د}{\mathbf{و} + و}$$

$$= \frac{و(ل - ا) + \frac{1}{2} و ل}{و + و}$$

مثالیں

۱ــ ایک مربع کے تین کونوں میں سے ہر ایک پر ۳ پاؤنڈ کے وزن رکھے گئے ہیں اور چوتھے کونے پر ۵ پونڈ کا ایک وزن رکھا گیا ہے ـ مرکز ثقل معلوم کرو ـ

۲ــ مقوے کے ایک مربع کے ایک کونے سے ۳ انچ کنارے کا ایک مربع کاٹ لیا گیا ہے ـ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو اگر اول الذکر مربع کا کنارا ۶ انچ ہو ـ

۳ــ ۶ اونس وزن اور ۶ انچ طول کے ایک پتلے ڈنڈے کو ۶ اونس وزن اور ۶ انچ نصف قطر کے ایک دائرے پر اس طرح ثبت کیا گیا ہے کہ اس کے سرے دائرے کے محیط پر ہیں ـ کل کا مرکز ثقل معلوم کرو ـ

۴ــ بائیسکل کے ایک پہیہ کا قطر ۲۶ انچ اور وزن ۳ پونڈ ہے ـ اس کے ہر آرے کا طول ۱۱ انچ ہے اور ہر آرا پہیہ کے مرکزی محور سے نصف انچ فاصلے ناف (Hub) سے نکلتا ہے ـ اگر ایک آرے کو پہیہ سے جدا کر لیا جائے تو پہیہ کا مرکز ثقل معلوم کرو ـ

۵ــ ایک ہتوڑے کا دستہ لکڑی کا اسطوانہ ہے جس کا طول ۸ انچ، نصف قطر $\frac{3}{4}$ انچ، وزن ۸ اونس ہے ـ ہتوڑے کا سرا لوہے کا ایک سطوانہ ہے جس میں ایک سوراخ بنا ہوا ہے جس کے اندر دستہ ٹھیک بیٹھتا ہے ہتوڑے کے اس سرے کا طول ۳ انچ، نصف قطر $1\frac{1}{4}$ انچ اور وزن ۳ پونڈ ہے ـ مرکز ثقل کا تقریبی محل معلوم کرو ـ

۶ــ ایک صندوق بغیر ڈھکن کے ایک انچ موٹی لکڑی سے بنایا گیا ہے اس کے اندرونی ابعاد ۱۲ × ۱۲ × ۱۲ انچ ہیں ـ اس کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو ـ

۷ــ طول ۲۸ انچ کے ایک یکساں پتلے ڈنڈے کو اس طریقہ سے خم دیا گیا ہے کہ ۱۲ انچ اور ۱۶ انچ کے دو حصے ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں ـ مرکز ثقل

معلوم کرو ۔

۸ ۔ ایک یکساں تار کو ایک مثلث کی شکل میں خم کیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ تار کا مرکز ثقل اُس دائرے کے مرکز پر منطبق ہوتا ہے جو اُس مثلث کے اندر بنایا گیا ہو جو ضلعوں کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بنتا ہے ۔

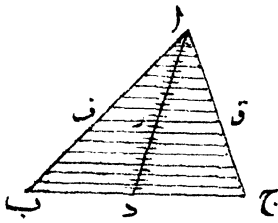
۹ ۔ ایکساں کثافت کے دیودار سے شکل T کا گنیا بنایا گیا ہے، آڑے جزو کے ابعاد ۶ × ۲ × ۱/۲ انچ ہیں اور کھڑے جزو کے ابعاد ۸ × ۱/۲ × ۱ ۱/۸ انچ ۔ آڑے جزو کو اس طرح تراشا گیا ہے کہ اس کی نیچے کی سطح مستوی ہے ۔ کل نظام کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو ۔

(۱۲۱) ۱۰ ۔ وزنوں و، وَ، وُ کے تین منکے ایک دائری تار میں پروئے گئے ہیں اور جب منکے دائرے کے نقطوں ا، ب، ج پر ہوتے ہیں تو کل نظام کا مرکز ثقل دائرہ کے مرکز و پر منطبق ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{و}{جب\ ب و ج} = \frac{وَ}{جب\ ج و ا} = \frac{وُ}{جب\ ا و ب}$$

پترے کا مرکز ثقل

۹۱ ۔ پترا پتلا اور مستوی ہوتا ہے اور اس کی موٹائی اور کثافت ایکساں ہوتی ہے مثلاً ایک مقوے کی چادر سے ہم کوئی شکل کاٹ لیں ۔ کسی پترے کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرنا اکثر اہم ہوتا ہے ۔

۹۲ ۔ **مثلث کا مرکز ثقل** ۔ فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلثی پترا ہے جس کے مرکز ثقل کے محل کو معلوم کرنا مطلوب ہے ۔ فرض کرو کہ مثلث کو قاعدہ ب ج کے متوازی خطوں سے لاانتہا تنگ پٹیوں کی ایک بہت بڑی تعداد میں تقسیم کیا گیا ہے ۔ فرض کرو کہ کوئی پٹی ف ق ہے ۔ چونکہ

بموجب فرض ہم اس پٹی کو لاانتہا کم عرض اور موٹائی کی سمجھ سکتے ہیں اس لیے ہم اس کو ایک پتلا ایکساں ڈنڈا تصور کر سکتے ہیں۔ کسی پتلے ایکساں ڈنڈے کا مرکز ثقل اس کے وسطی نقطہ پر ہوتا ہے، اس لیے پٹی ف ق کے وزن کو ر پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جا سکتا ہے جو ف ق کا وسطی نقطہ ہے۔

شکل (٦٦)

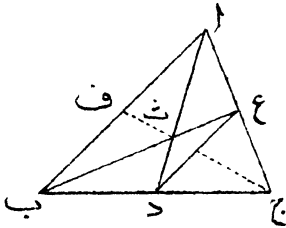
دوسری پٹیوں کے وزنوں پر اسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے۔ اس لیے پورے مثلث کے وزن کی بجائے ذروں کے ایک نظام کے اوزان جو ان پٹیوں کے وسطی نقطوں پر واقع ہوں رکھے جا سکتے ہیں۔

اب اگر قاعدہ ب ج کا وسطی نقطہ د ہو تو تمام پٹیوں کے وسطی نقطے خط ا د میں واقع ہوتے ہیں۔ اس لیے مثلث کے وزن کی بجائے ذروں کی ایک تعداد کے اوزان ہیں جو سب کے سب خط ا د میں واقع ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پورے مثلث کے مرکز ثقل کو خط ا د میں واقع ہونا چاہیئے۔

(۱۲۲) اسی طرح ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مثلث کو ضلع ا ج کے متوازی پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اب یہ معلوم ہوگا کہ مثلث کے مرکز ثقل کو خط ب ع میں واقع ہونا چاہیئے جہاں ع، ضلع ا ج کا وسطی نقطہ ہے۔

ان دو نتیجوں سے مرکز ثقل کا محل پوری طرح متعین ہو جاتا ہے، چنانچہ اس کو خطوط ا د، ب ع کا نقطہ تقاطع ہونا چاہیئے۔

د ع کو ملاؤ۔ مثلثات د ج ع، ب ج ا مشابہ ہیں جنمیں سے مثلث د ج ع، مثلث ب ج ا کے ابعاد کا عین نصف ہے۔

اِس لیے د ع، ا ب کے متوازی اور اس کا نصف ہونا چاہیئے۔
اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ د ث ع اور ا ث ب مشابہ مثلث ہیں جن میں سے مثلث د ث ع، مثلث ا ث ب کے ابعاد کا نصف ہے۔ اِس لیے ث د، ا ث کا نصف ہے۔

شکل (٦٧)

اِس طرح ث، ا د کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔
اگر ہم ج کو ف سے ملائیں جو ا ب کا وسطی نقطہ ہے تو ہم اُسی طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں کہ ج ف، ا د کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔ اِس لیے ج ف کو بھی نقطہ ث میں سے گذرنا چاہئے۔
اِن تین خطوں ا د، ب ع، ج ف کو جو مثلث کے راسوں کو مقابل کے اضلاع کے وسطی نقطوں سے ملاتے ہیں مثلث کے **خطوط وسطی** کہا جاتا ہے۔ ہم ثابت کر چکے ہیں کہ یہ تین خطوط وسطی ایک ہی نقطہ ث میں ملتے ہیں اور یہ نقطہ مثلث کا مرکز ثقل ہے۔ ہم نے یہ بھی ثابت کیا ہے کہ مرکز ثقل ہر خط وسطی کو نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے یعنے وہ خطی وسطی پر قاعدے سے اپنے کل طول کے ایک ثلث فاصلے پر واقع ہے۔

۹۳۔ کسی کثیر الاضلاع کا مرکز ثقل۔

کسی مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کا مرکز ثقل اِس کو مثلثوں میں تقسیم کر کے اور ہر مثلث کی بجائے اِس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھ کر معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ثقل تین مساوی ذروں کے مرکز ثقل پر منطبق

ہوتا ہے جو اس کے راسوں پر رکھے گئے ہوں۔

۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کا مرکز ثقل مرکز عمود ی پر منطبق ہو تو مثلث متساوی الاضلاع ہے۔

۳۔ مقوے کے ایک مربع کو ایک وتر پر اتنا موڑا گیا ہے کہ اس کے دو حصے علی القوائم ہیں۔ اس کے مرکز ثقل کا محل معلوم کرو۔

۴۔ ایک مثلثی پترے کا ربع حصہ ایک خط سے جو قاعدے کے متوازی ہے کاٹ لیا گیا ہے بقیہ حصہ کا مرکز ثقل کہاں ہے؟

(۱۲۳) ۵۔ ایک پترے سے جس کی شکل متساوی الاضلاع مثلث کی ہے ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث کاٹ لیا گیا ہے جس کا قاعدہ وہی ہے جو ابتدائی مثلث کا ہے۔ شکل ۷ کے بقیہ حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۶۔ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کا مرکز ثقل اس کے ایک وتر پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ یہ وتر دوسرے وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

مرکز ثقل کو عمل تکمل سے معلوم کرنا

۹۴۔ متغیر کثافت کے ایک ڈنڈے کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ ا ب ایک ڈنڈا ہے جس کا وزن فی اکائی طول نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ کسی نقطہ پر اس کا وزن فی اکائی طول ث ہے۔

فرض کرو کہ ف، ق دو متصلہ نقطے ہیں جن کے فاصلے نقطہ ا سے علی الترتیب لا اور لا + فرلا ہیں۔ اب طول ف ق، فرلا ہے اور اس کی کمیت ث فرلا ہے

ب ق ف ا

شکل (۶۸)

جہاں ث سے اس نقطہ پر کی کمیت فی اکائی طول تعبیر ہوتی ہے۔ جب فرلا کو لا انتہا چھوٹا بنایا جاتا ہے تو نقطہ ا سے ف ق کے مرکز ثقل کا فاصلہ لا لیا جا سکتا ہے۔ پس

اگر لاَ سے وہ فاصلہ تعبیر ہو جو ا سے پورے ڈنڈے کے مرکزِ ثقل کا ہے تو

$$\overline{لا} = \frac{\sum (ک\ لا)}{\sum ک}$$

جہاں ک کسی عنصر کی مثلاً ف ق کی کمیت ہے اور حاصل جمع اُن تمام ذروں کے لیے معلوم کیا گیا ہے جن سے ڈنڈا بنا ہے۔ ثہ فرلا رکھنے سے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$\overline{لا} = \frac{\sum (ثہ\ لا\ فرلا)}{\sum (ثہ\ فرلا)}$$

یا تکملی احصاء کی ترقیم میں

$$\overline{لا} = \frac{\int ثہ\ لا\ فرلا}{\int ثہ\ فرلا} \quad \text{..........(۲۸)}$$

جہاں تکمل ہر صورت میں پورے ڈنڈے پر لیا جاتا ہے۔ متغیر ثہ، لا کا ایک تفاعل ہوگا اور تکمل کی تکمیل نہیں ہو سکتی جب تک کہ اِس تفاعل کی ٹھیک شکل معلوم نہ ہو۔

۹۵ — ایک خاص مثال لو اور فرض کرو کہ کثافت ایک سرے سے دوسرے سرے تک ایکساں طور پر بڑھتی ہے۔ فرض کرو کہ ا پر کثافت صفر ہے اور ب پر ث۔ اگر ڈنڈے کا طول ل ہو تو ا سے فاصلہ لا پر کثافت $ث \left(\frac{لا}{ل}\right)$ ہو گی۔ اِس لیے ہمیں ضابطہ (۲۸) میں رکھنا چاہئے (۱۲۴)

$$ثہ = ث \left(\frac{لا}{ل}\right)$$

اور اِس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int \text{ث} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right) \text{لا فرلا}}{\int \text{ث} \left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right) \text{فرلا}}$$

جہاں تکمل لا = ۰ سے لا = ا تک ہے ـ نسب نما اور شمار کنندہ کو $\frac{\text{ث}}{\text{ا}}$ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_{\cdot}^{\text{ا}} \text{لا}^{2}\ \text{فرلا}}{\int_{\cdot}^{\text{ا}} \text{لا فرلا}}$$

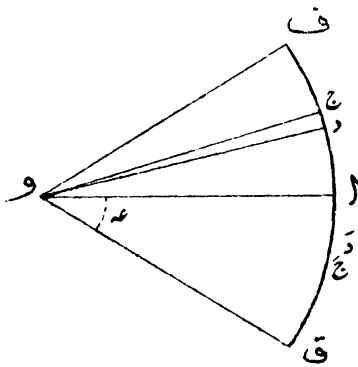
$$= \frac{\frac{1}{3}\ \text{ا}^{3}}{\frac{1}{2}\ \text{ا}^{2}} = \frac{2}{3}\ \text{ا}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ مرکز ثقل ڈنڈے پر ابتدائی سرے سے اسکے طول کے دو ثلث فاصلے پر واقع ہے ـ

۹۶ ـ ہم اِس نتیجے کو مثلث کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں استعمال کر سکتے ہیں ـ حسب دفعہ ۹۲ ہم مثلث کو متوازی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر پٹی کی بجائے اِس کے وسطی نقطہ پر ایک ذرہ رکھتے ہیں ہر ذرہ کا وزن اُس پٹی کے وزن کے مساوی ہونا چاہیئے جس کی جگہ پر اُس کو رکھا گیا ہے اور وہ پٹی کے عرض اور طول کے متناسب ہونا چاہیئے ـ اگر کسی ذرہ کا فاصلہ ا سے خط وسطی اد پر پیمائش کردہ لا ہو تو پٹی کا عرض فرلا کے متناسب ہے جو وہ طول ہے جو خط وسطی پر منقطع ہوتا ہے، اور پٹی کا طول لا کے متناسب ہے جو ضلع ا سے فاصلہ ہے ـ اِس طرح ثہ فرلا کو صرف لا فرلا کے متناسب ہونا چاہیئے اور جیسا کہ ہم ابھی معلوم کر چکے ہیں اس سے حسب ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے (۱۲۵)

$$\bar{\text{لا}} = \frac{2}{3}\ \text{ا}$$

جہاں ا خط وسطی کا طول ہے ۔ یہ ٹھیک وہی نتیجہ ہے جو پہلے حاصل ہوا تھا ۔

۹۷ ۔ دائری قوس کا مرکز ثقل ۔ اسی طریقہ کو ایک تار کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں جو ایک دائری قوس ف ق کی شکل میں خمایا گیا ہے استعمال کیا جا سکتا ہے ۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے اور قوس کا وسطی نقطہ ا ہے اور فرض کرو کہ پوری قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے ۔ تار کے نصف حصے ف ا کے ایک چھوٹے عنصر ج د پر غور کرو ۔ فرض کرو کہ زاویہ د و ا ‘طہ ہے اور زاویہ ج و ا ‘طہ + فرطہ ہے اور اسلئے اس عنصر کے محاذی مرکز پر زاویہ فرطہ بنتا ہے ۔ اگر دائرہ کا نصف قطر ا ہو تو اس عنصر کا طول ا فرطہ ہے ‘ اس لئے اگر تار کی کمیت فی اکائی طول و ہو تو اس عنصر کی کمیت و ا فرطہ ہوگی ۔ یہ اور اس کے مشابہ عنصر جَ دَ جو تار

شکل (۶۹)

کے دوسرے نصف حصے میں ہے ملکر مساوی ذروں کا ایک زوج بناتے ہیں جن کا فاصلہ مرکزی خط و ا سے مساوی ہے ۔ ان کی بجائے کمیت ۲ و ا فرطہ کا ایک واحد ذرہ ان کے مرکز ثقل پر رکھا جا سکتا ہے ۔ یہ مرکز ثقل خط و ا میں اس نقطہ پر ہے جس پر ان دو عنصروں کو ملانیوالا خط و ا کو قطع کرتا ہے ۔ اس لیے اس مرکز ثقل کا فاصلہ و سے ا جم طہ ہے ۔ اس کو لا سے اور کمیت ۲ و ا فرطہ کو ک سے تعبیر کرنے سے پورے تار کے مرکز ثقل کا فاصلہ (و سے) لا حسب ذیل مساوات سے حاصل

ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{\Sigma\,(ک\,لا)}{\Sigma\,(ک)}$$

$$= \frac{\int ا\,جم\,طہ\,(۲\,و\,ا\,فرطہ)}{\int ۲\,و\,ا\,فرطہ}$$

جہاں تکمل طہ = ۔ سے طہ = عہ تک ہے ۔ مختصر کرنے سے (۱۲۶)

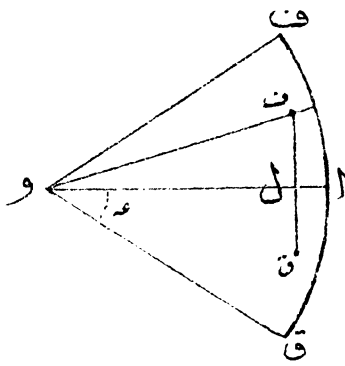
$$\bar{لا} = \frac{ا\int_{طہ=۰}^{طہ=عہ} جم\,طہ\,فرطہ}{\int_{طہ=۰}^{طہ=عہ} فرطہ}$$

$$= \frac{ا\,جب\,عہ}{عہ} \quad \ldots\ldots\ldots (۲۹)$$

اِس سے مرکز ثقل کا محل معلوم ہوتا ہے ۔

جب، عہ بہت چھوٹا ہو تو جب عہ اور عہ مساوی ہوتے ہیں اور اِس لیے عہ کی بہت چھوٹی قیمتوں کے لیے ضابطہ (۲۹) $\bar{لا}$ = ا میں تحویل ہوتا ہے جیسا کہ ہونا چاہئے ۔ اِس سے صرف یہ واضح ہوتا ہے کہ قوس کا انحناء جیسے جیسے گھٹتا ہے مرکز ثقل قوس کے وسطی نقطہ کے قریب اور قریب تر ہوتا جاتا ہے ۔ بالآخر جب، عہ = ۔ تو قوس ایک سیدھا ڈنڈا بن جاتی ہے اور مرکز ثقل ٹھیک اِس کے وسطی نقطہ پر حاصل ہوتا ہے اُس قوس کے لیے جو ایک نیم دائرے میں کھائی گئی ہو ہم عہ = $\frac{\pi}{۲}$ لیتے ہیں، چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{ا\,جب\,\frac{\pi}{۲}}{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۲\,ا}{\pi} = ۰٫۶۳۶۶\,ا$$

۹۸ — دائری قوس ف ف کا مرکز ثقل تکملی احصار کے استعمال کے بغیر ایک دلچسپ طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے ۔

تشاکل سے یہ ظاہر ہے کہ قوس ا ف کا مرکز ثقل اُس نصف قطر میں واقع ہونا چاہیے جو زاویہ ا و ف کی تنصیف کرتا ہے ۔ فرض کرو کہ یہ مرکز ثقل ف ہے اور فرض کرو کہ قوس ا ق کا مرکز ثقل ق ہے ۔ اب پوری قوس ف ق کا مرکز ثقل، ف ق کا نقطہ وسطی ل ہونا چاہیئے ۔

شکل (۷۰)

اب چونکہ زاویہ ف و ل = $\frac{1}{2}$ عہ

اس لیے

$$\text{و ل} = \text{و ف جم } \frac{1}{2} \text{ عہ} \qquad (127)$$

اس رشتہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

= جم $\frac{\text{عہ}}{2}$ × (قوس عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اسی طرح

(قوس عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

= جم $\frac{\text{عہ}}{4}$ × (قوس $\frac{\text{عہ}}{2}$ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

و علیٰ ہذا القیاس ۔ اِس طریقہ پر عمل جاری رکھ کر اور اندراج کر کے ہم حاصل کرتے ہیں

(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

$$= \text{جم } \frac{\text{عہ}}{2} \times \text{جم } \frac{\text{عہ}}{4} \times \text{جم } \frac{\text{عہ}}{8} \cdots\cdots \text{جم } \frac{\text{عہ}}{2^{\text{ن}+1}}$$

× (قوس $\frac{\text{عہ}}{2^{\text{ن}}}$ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

اگر ہم ن کو بہت بڑا لیں تو $\frac{\text{عہ}}{2^{\text{ن}}}$ کی قیمت صفر ہوتی ہے ۔ اس لئے قوس $\frac{\text{عہ}}{2^{\text{ن}}}$ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے ا کے مساوی ہو جاتا ہے جو دائرہ کا

نصف قطر ہے۔ پس ن کو لامتناہی بنانے سے حاصل ہوتا ہے
(قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے)

$$= ا \text{ جم } \frac{عہ}{۲} \text{ جم } \frac{عہ}{۴} \text{ جم } \frac{عہ}{۸} \ldots\ldots \infty \text{ تک}$$

اب

$$\text{جم } \frac{عہ}{۲} = \frac{\text{جب عہ}}{۲ \text{ جب } \frac{عہ}{۲}}$$

$$\text{جم } \frac{عہ}{۴} = \frac{۲ \text{ جب } \frac{عہ}{۲}}{۴ \text{ جب } \frac{عہ}{۴}} \text{، وغیرہ}$$

اس لیے

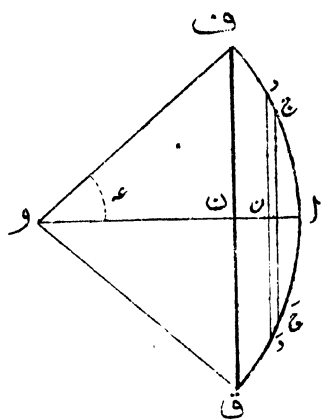
$$\text{جم } \frac{عہ}{۲} \text{ جم } \frac{عہ}{۴} \text{ جم } \frac{عہ}{۸} \ldots \text{ جم } \frac{عہ}{۲^{ن}} = \frac{\text{جب عہ}}{۲^{ن} \text{ جب } \frac{عہ}{۲^{ن}}}$$

ن کو لامتناہی بنانے سے جب $\frac{عہ}{۲^{ن}}$ کی قیمت $\frac{عہ}{۲^{ن}}$ کے مماثل ہو جاتی ہے،

اِس لیے $۲^{ن}$ جب $\frac{عہ}{۲^{ن}}$، عہ کے مماثل ہو جاتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } \frac{عہ}{۲} \text{ جم } \frac{عہ}{۴} \text{ جم } \frac{عہ}{۸} \ldots\ldots \infty \text{ تک} = \frac{\text{جب عہ}}{عہ}$$

اِس لئے قوس ۲ عہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے ا $\frac{\text{جب عہ}}{عہ}$ ہے جو محصلہ نتیجہ کے مطابق ہے۔

۹۹ ـــ قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل ـ فرض کرو کہ ہم ایک دائرہ کے (۱۲۸) قطعہ ف ا ق ن کا مرکز ثقل معلوم کرنا چاہتے ہیں جو وتر ف ن ق ت جس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ۲ عہ بنتا ہے کٹتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم پورے قطعہ کو اِس وتر کے متوازی پتلی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں اور فرض کرو کہ شکل ۱۷ میں نمونے کی ایک پٹی ج جَ د دَ ہے جو وتروں ج جَ اور د دَ سے محدود ہے فرض کرو کہ زاویہ ج و ا، ط ہے اور زاویہ د و ا، ط + قرط ہے۔ اب پٹی کا

شکل (۷۱)

عرض ج د جب طہ یا ا جب طہ فرطہ ہے اور اس کا طول ۲ ج ن یا ۲ ا جب طہ ہے ۔ اس لئے رقبہ ۲ ا^2 جب^2 طہ فرطہ ہے ۔ اس کی کمیت پوری کی پوری ن پر مرتکز سمجھی جا سکتی ہے جہاں ن کا فاصلہ مرکز و سے ا جم طہ ہے۔

اس طرح اگر پورے قطعہ کے مرکز ثقل کا فاصلہ و سے لاَ ہو تو

$$\text{لاَ} = \frac{\int (\text{ا جم طہ})(\text{۲ ا}^2\text{ جب}^2\text{ طہ فرطہ})}{\int (\text{۲ ا}^2\text{ جب}^2\text{ طہ فرطہ})}$$

جہاں تکمل کو طہ = ۰ سے طہ = عہ تک لینا چاہئے ۔ مختصر کرنے سے

$$\text{لاَ} = \text{ا} \frac{\int^{\text{عہ}} \text{جب}^2 \text{ طہ جم طہ فرطہ}}{\int^{\text{عہ}} \text{جب}^2 \text{ طہ فرطہ}}$$

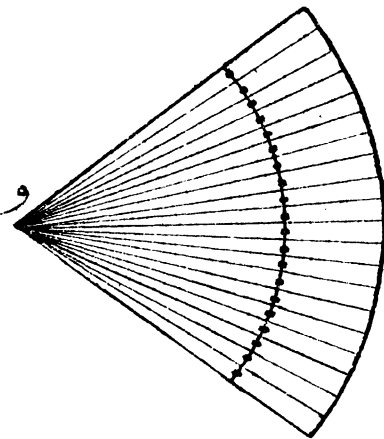
$$= \text{ا} \frac{\frac{1}{3} \text{جب}^3 \text{ عہ}}{\frac{1}{2}(\text{عہ} - \text{جب عہ جم عہ})}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ا} \frac{\text{جب}^3 \text{ عہ}}{\text{عہ} - \text{جب عہ جم عہ}}$$

عہ = $\frac{\pi}{2}$ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک نیم دائرہ کا مرکز ثقل، مرکز سے فاصلہ $\frac{4}{3\pi}$ ا پر ہوتا ہے ۔ (۱۲۹)

۱۰۰ ـــ قطاع دائرہ کا مرکز ثقل ۔

قطاع دائرہ کے مرکز ثقل کو اس طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ قطاع دائرہ کو ایک مثلث اور ایک قطعہ دائرہ سے بنا ہوا سمجھا جائے ۔

اب چونکہ مثلث کا مرکز ثقل اور قطعہ دائرہ کا مرکز ثقل معلوم کئے جا سکتے ہیں اس لئے پوری شکل کا مرکز ثقل معلوم کرنا آسان ہے۔

شکل (۷۲)

اِس سے سادہ طریقہ حسب ذیل ہے۔ ہم قطاع دائرہ کو نصف قطروں کے ایک سلسلہ کے ذریعہ بہت تنگ مثلثوں کی ایک بڑی تعداد میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ ہر مثلث کے وزن کی بجائے اِس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھا جا سکتا ہے جس کا وزن مثلث کے وزن کے مساوی ہو۔ اب انتہا میں جبکہ مثلث صغیر عرض کے ہو جاتے ہیں ہر ایک کا مرکز ثقل اِس کے خطِ وسطی پر دائرہ کے مرکز سے $\frac{2}{3}$ ا فاصلہ پر ہوگا جہاں ا دائرہ کا نصف قطر ہے۔ اس لیے تمام ذرے $\frac{2}{3}$ ا نصف قطر کے ایک دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

کسی ذرہ کا وزن اُس مثلث و ف ق کے وزن کے مساوی ہونا چاہئے جس کی بجائے اُس کو رکھا گیا ہے۔ اِس لیے اس کو مثلث کے قاعدہ ف ق کے متناسب ہونا چاہئے اور پھر یہ ف ق کے متناسب ہے جو نصف قطر $\frac{2}{3}$ ا کے دائرہ کا ایک ٹکڑا ہے جو مثلث کے اندر ہے۔ اس طرح اُس ذرہ کا وزن جس کو اس دائرہ کے چھوٹے عنصر ف ق میں رکھنا ہے طول ف ق کے متناسب ہے۔ انتہا لینے اور مثلثوں کی تعداد کو لا متناہی بنانے سے

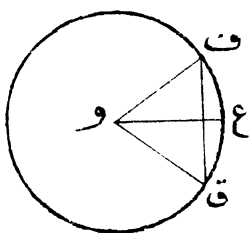
شکل (۷۳)

ہم معلوم کرتے ہیں کہ ذروں کی اِس لڑی کی بجائے ایکساں کثافت کا ایک تار رکھا جا سکتا ہے۔ ایسے تار کا مرکز ثقل پہلے معلوم کیا جا چکا ہے۔ اگر تار کا زاویہ ۲ عہ ہو تو مرکز ثقل اُس نصف قطر پر جو تار کے وسطی نقطہ میں سے گذرتا ہے مرکز سے فاصلہ $\frac{۲}{۳}$ ا $\frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$ پر واقع ہے۔ (۱۳۰)

اِس طرح نصف قطر ا اور زاویہ ۲ عہ کے ابتدائی قطاع دائرہ کا مرکز ثقل قطاع دائرہ کے مرکزی محور پر مرکز سے فاصلہ $\frac{۲}{۳}$ ا $\frac{\text{جب عہ}}{\text{عہ}}$ پر واقع ہے۔

۱۰۱ ـ کروی ٹوپی کا مرکز ثقل

ـ وہ ٹکڑا جس کو ایک کروی خول سے ایک مستوی کے ذریعہ کاٹ لیا جائے کروی ٹوپی کہلاتا ہے۔

کروی ٹوپی کا مرکز ثقل جس کو ایک ایکساں کروی خول سے کاٹ لیا گیا ہو اُن طریقوں سے جو قبل ازیں سمجھائے جا چکے ہیں بہت آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ف ق کروی ٹوپی ہے اور و اُس کرہ کا مرکز ہے جس سے یہ ٹوپی کاٹی گئی ہے۔ فرض کرو کہ و ع وہ نصف قطر ہے جو مستوی ف ق پر جس سے ٹوپی محدود ہے عمود ہے اور فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر ا ہے۔

شکل (۷۴)

کوئی مستوی جو ف ق کے متوازی ہے کرہ کو ایک دائرہ میں جس کا مرکز و ع پر واقع ہو گا قطع کریگا۔ اس لیے ف ق کے متوازی مستویوں کی ایک بڑی تعداد لینے سے ہم کروی ٹوپی کو تنگ دائری حلقوں میں تقسیم کر سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک کا مرکز و ع پر واقع ہے۔ فرض کرو کہ ہم

ایک واحد حلقہ پر جو سُتویوں ا ا' ب ب' سے منقطع ہوا ہے غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ زاد ئے
ا و ع، ب و ع علی الترتیب
طہ اور طہ + فرطہ کے مساوی ہیں
اس لیے حلقہ کے محاذی مرکز پر
زاویہ فرطہ بنتا ہے۔ حلقہ کا عرض
اب، ا فرطہ ہے۔ اس کے
محیط کو انتہا میں دائرہ ا ا' کے
محیط کے مساوی فرض کیا جا سکتا
ہے۔ چونکہ ا' ا = ا جب طہ
اس لیے یہ محیط = ۲ π ا جب طہ

شکل (۷۵)

اس لیے زیر بحث حلقہ کو طول ۲ π ا جب طہ اور عرض ا فرطہ کی ایک تنگ پٹی سمجھا جا سکتا ہے۔ اس لیے اس کا رقبہ ۲ π ا² جب طہ فرطہ ہے۔ (۱۳۱)

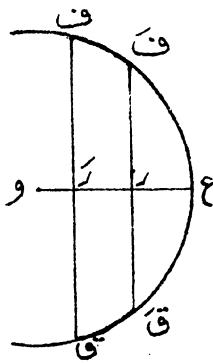
جب، فرطہ کو بہت چھوٹا بنایا جاتا ہے تو قوس ب ا کو طول ا فرطہ کا ایک خط مستقیم خیال کیا جا سکتا ہے جو و ع کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ - طہ بناتا ہے۔ اس طرح و ع پر ب ا کے ظل ب ا کا طول ا فرطہ جم ($\frac{\pi}{2}$ - طہ) یا ا جب طہ فرطہ ہے۔ حلقہ ب ا کا رقبہ اب حسب ذیل حاصل ہوتا ہے

۲ π ا² جب طہ فرطہ

یا ۲ π ا × ب ا

اس لیے حلقہ کی کمیت وہی ہے جو ڈنڈے و ع کے عنصر ب ا کی ہے بشرطیکہ یہ ڈنڈا یکساں کثافت کا ہو اور اس کی کمیت فی اکائی طول خول کے رقبہ ۲ π ا کی کمیت کے مساوی ہو۔ اس حلقہ کا مرکز ثقل جس پر ہم غور کر رہے ہیں صریحاً محور و ع پر واقع ہے، اس لئے کروی ٹوپی کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں اس حلقہ کی بجائے اس ڈنڈے کے عنصر ب ا کو رکھا جا سکتا ہے۔

اسی طرح ہر چھوٹے حلقہ کی بجائے ڈنڈے کا متناظر عنصر رکھا جاسکتا ہے۔ اس طرح پوری ٹوپی کی بجائے ڈنڈے کے طول رع کو رکھا جاسکتا ہے (شکل ۷۴) جو حدّی مستوی ف ق اور کرہ کے درمیان قطع ہوتا ہے۔ چونکہ ڈنڈا یکساں ہے ڈنڈے کے حصہ رع کا مرکز ثقل اس کے وسطی نقطہ پر ہے۔ اس لیے یہ نقطہ کروی ٹوپی کا مرکز ثقل ہے۔

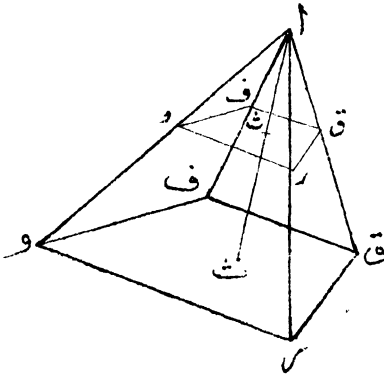
۱۰۲۔ ایک پیٹی کا مرکز ثقل جو ایک کروی خول سے دو متوازی مستویوں کے ذریعہ کاٹی گئی ہو۔ اسی طریقہ سے ہم اس پیٹی کا مرکز ثقل معلوم کرسکتے ہیں جو ایک یکساں کروی خول سے دو متوازی مستویوں کے ذریعہ کاٹ لی گئی ہو۔ شکل ۷۶ میں فرض کرو کہ ف ق، فَ قَ دو مستوی ہیں۔ اب ہم ف ق کے متوازی مستویوں سے پیٹی کو تنگ حلقوں میں تقسیم کرسکتے ہیں۔ ہر حلقہ کی بجائے حسب سابق ایک ایکساں ڈنڈے کے متناظر عنصر کو محور وع پر رکھا جاسکتا ہے اور اس لیے پوری پیٹی کی بجائے اس ڈنڈے کے حصہ ررَ کو رکھا جاسکتا ہے جو وہ حصہ ہے جو دو مستویوں ف ق اور فَ قَ کے درمیان منقطع ہوتا ہے۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل، ررَ کا وسطی نقطہ ہے۔

شکل (۷۶)

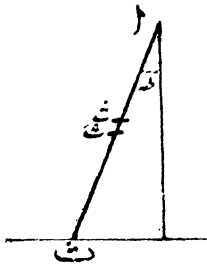
(۱۳۲)

ایک ٹھوس جسم کا مرکز ثقل

۱۰۳۔ مستوی قاعدے کے ایک مخروط مضلع کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ ایک مخروط مضلع کو اس طرح بنایا گیا ہے کہ اس کا قاعدہ و ف ق ر کوئی مستوی شکل ہے اور اس کا راس ا ہے۔ ہم کسی متجانس مخروط مضلع کے مرکز ثقل کو معلوم کرنے کے لیے اس کو اسکے قاعدے کے متوازی مستویوں کے ایک سلسلے کے ذریعہ پتلے طبقوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایسا کوئی متوازی طبقہ و ف ق ر ہے، اس طبقہ کے متعلق یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ لاانتہا پتلا پترا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ایکساں پترے کا مرکز ثقل جو قاعدہ و ف ق ر پر منطبق ہوتا ہے ث ہے اور فرض کرو کہ ا ث، پترے و ف ق ر سے ث پر ملتا ہے۔ اب متشابہ اشکال کے علم ہندسہ سے یہ ظاہر ہے کہ پترے و ف ق ر میں ث ایک ایسا محل اختیار کرتا ہے جو ٹھیک طور پر اس محل کے متناظر ہے جو پترے و ف ق ر میں نقطہ ث کا ہے۔ اس لیے پترے و ف ق ر کا مرکز ثقل ث ہے

شکل (۷۷)

اور اس لیے اس پترے کی کمیت کی بجائے ث پر ایک واحد ذرہ کی کمیت رکھی جا سکتی ہے۔

اسی طرح سے مخروط مضلع کو جتنے پتروں میں تقسیم کیا گیا ہے ان میں سے ہر ایک کی بجائے ایک واحد ذرہ اُس نقطہ پر رکھا جا سکتا ہے جس پر یہ پترا خط ا ث کو قطع کرتا ہے۔ اس طرح پورے

شکل (۷۸)

مخروط مضلع کی بجائے یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ ذروں کا ایک سلسلہ خط ا ث پر رکھا گیا ہے۔ یہ ذرے متغیر کثافت کا ایک ڈنڈا بناتے ہیں اس لیے مخروط مضلع کا مرکز ثقل اس ڈنڈے کے مرکز ثقل پر منطبق ہو گا۔

اب ڈنڈے کا مرکز ثقل اس طریقہ سے جس کی صراحت دفعہ ۹۴ میں کی جا چکی ہے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس پترے پر غور کرو جو متصلہ متوازی پتروں کے درمیان واقع ہے جبکہ یہ پترے خط ا ث کو علی الترتیب ث ثَ پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ا ث = لا اور ا ثَ = لا + فرلا چنانچہ یہ پترا خط ا ث پر طول فرلا قطع کرتا ہے۔ (۱۳۳)

فرض کرو کہ ا ث اور اس عمود کے درمیان جو ا سے پترے کے قاعدے پر کھینچا گیا ہے زاویہ طہ بنتا ہے۔ اس لیے پترے کی موٹائی

= ث ثَ جم طہ = فرلا جم طہ

اگر مخروط مضلع کے قاعدہ کا رقبہ س ہو تو زیر بحث پترے کا رقبہ

$$= \frac{لا^2}{ا ث^2} س$$

کیونکہ مختلف پتروں کے رقبے اُن کے خطی ابعاد کے مربعوں کے متناسب ہیں۔ اس لیے زیر غور پترے کا حجم

$$= \frac{لا^2}{ا ث^2} س \ فرلا \ جم \ طہ$$

اگر اس پترے کی بجائے ایک ذرہ رکھا جائے جو ڈنڈے ا ث کے طول فرلا پر ہو تو ڈنڈے کی کثافت ثہ ہونی چاہیے

$$ثہ = لا^2 \frac{س \ جم \ طہ}{ا ث^2}$$

اس طرح ڈنڈا ا ث ایسی کثافت کا ہونا چاہیے جو سرے (ا) سے فاصلہ (لا) کے مربع کے متناسب ہے۔

اب دفعہ ۹۴ کے ضابطہ کی رو سے اس ڈنڈے کے مرکز ثقل کا

فاصلہ (لاَ) نقطہ ا سے حسب ذیل ہے:

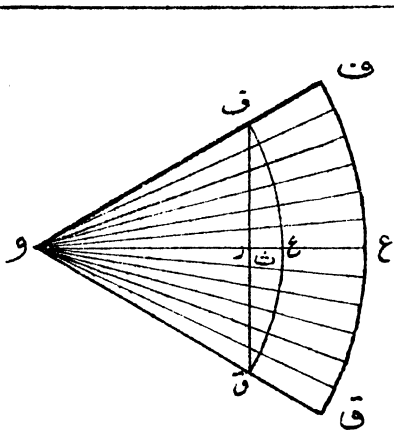
$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_{0}^{\text{اث}} \text{ش لا فرلا}}{\int_{0}^{\text{اث}} \text{ش فرلا}}$$

$$= \frac{\int_{0}^{\text{اث}} \text{لا}^{3}\ \text{فرلا}}{\int_{0}^{\text{اث}} \text{لا}^{2}\ \text{فرلا}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\ \text{اث}^{4}}{\frac{1}{3}\ \text{اث}^{3}}$$

$$= \frac{3}{4}\ \text{اث}$$

اس لیے مخروط مضلع کا مرکز ثقل، اث میں نقطہ ا سے اث کے طول کے تین چوتھائی فاصلہ پر ہے۔ (۱۳۴)

۱۰۴ — ایک کرہ کے قطاع کا مرکز ثقل۔ اب ہم ایک کرہ کے قطاع کا مرکز ثقل معلوم کر سکتے ہیں یعنے اُس حجم کا جو ایک ٹھوس کرہ میں سے قائم مستدیر مخروط سے جس کا راس کرہ کے مرکز پر ہو قطع کر لیا گیا ہو۔ اس مقصد کے لیے ہم قطاع کے قاعدہ ف ق کے رقبہ کو بہت چھوٹے چھوٹے عنصروں میں تقسیم کرتے ہیں اور اِس طرح رقبہ کے اِن عنصروں کو قاعدے مان کر اور اِن کو مشترک راس و سے ملا کر قطاع کے حجم کو بہت چھوٹی عمودی تراشں کے متعدد مخروط مضلع میں تقسیم کرتے ہیں۔ یہ سب مخروط مضلع ایک ہی ارتفاع کے ہیں اور اس لیے اِن کی کمیتیں ان کے قاعدوں کے متناسب ہیں۔ ہر مخروط مضلع کا مرکز ثقل، و سے اُس فاصلہ کے تین چوتھائی پر واقع ہے جو و اور اِس مخروط مضلع کے قاعدہ کے درمیان ہے اور اس لیے و سے ایک ایسے فاصلہ پر واقع ہے جو کرہ کے نصف قطر کے تین چوتھائی کے برابر ہے۔ پس اگر ہم ایک اور

کرہ بنائیں جس کا مرکز و ہو اور جس کا قطر ابتدائی کرہ کے نصف قطر کا تین چوتھائی ہو تو ہر چھوٹے مخروط مضلع کا مرکز ثقل اس نئے کرہ کی سطح پر واقع ہوگا۔ اب ہر مخروط مضلع کی بجائے اس کے مرکز ثقل پر ایک ذرہ رکھا جا سکتا ہے اور اس لیے کل کروی قطاع کی بجائے ذروں کا ایک سلسلہ رکھا جا سکتا ہے جو اس نئے کرہ پر واقع ہوں گے اور ان سے کروی ٹوپی ف ع ق بنے گی (دیکھو دفعہ ۹)

شکل (۷۹)

ہر مخروط مضلع کی کمیت قاعدے کے متناسب ہے اور نیز کروی خول ف ع ق کے اس حصہ کے متناسب ہے جو مخروط مضلع سے منقطع ہوتا ہے۔ اس لیے کروی خول ف ع ق جسکو اصلی حجم کی بجائے لینا ہے یکساں کثافت کا ہونا چاہیے۔

(۱۳۵) اب کرہ کے قطاع و ف ق کی بجائے یکساں کروی خول ف ق ہے اور اس کروی خول کا مرکز ثقل ث معلوم ہے جو شکل (۷۹) میں ر ع کا وسطی نقطہ ہے۔ اس لئے یہ نقطہ ث مطلوبہ مرکز ثقل ہے۔

اگر مخروط کا انتصابی زاویہ جس سے قطاع محدود ہے ۲ عہ ہو اور کرہ کا نصف قطر ا ہو تو

$$\text{و ع} = \frac{۳}{۴}\,\text{ا} \text{ ، } \text{و ر} = \frac{۳}{۴}\,\text{ا جم عہ}$$

اس لیے

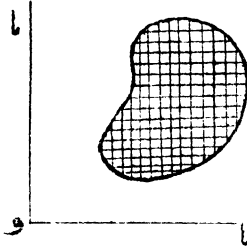
$$\text{و ث} = \frac{۳}{۸}\,\text{ا} \left(۱ + \text{جم عہ}\right)$$

مخصوص صورت میں اگر عہ = $\frac{\pi}{۲}$ تو قطاع نیم کرہ ہو جاتا ہے اور

$$\text{و ث} = \frac{۳}{۸}\,\text{ا}$$

اِس طرح نیم کرہ کا مرکز ثقل اُس نصف قطر پر جو اِس کے قاعدہ پر عمود ہے مرکز سے نصف قطر کے $\frac{3}{8}$ فاصلہ پر واقع ہوتا ہے۔

اُن رقبوں اور حجموں کے مرکز ثقل جو راست تکمل سے حاصل ہوں

۱۰۵ — پترے کا مرکز ثقل — کسی شکل کے پترے کا مرکز ثقل تکمل کے ذریعہ معلوم کرنے میں ہم پترے کے مستوی میں محوروں و لا، و ما کا کوئی سہولت بخش جٹ لیتے ہیں اور یہ خیال کرتے ہیں کہ پترا خطوں کے دو سلسلوں سے جن میں سے ایک محور و لا کے متوازی اور دوسرا محور و ما کے متوازی ہے چھوٹے عناصر میں منقسم ہے۔

اُس چھوٹے مستطیلی عنصر پر غور کرو جس میں لا کی قیمتیں اُن کناروں کے لیے جو و ما کے متوازی ہیں لا اور لا + فرلا ہیں اور ما کی قیمتیں اُن کناروں کے لیے جو و لا کے متوازی ہیں ما اور ما + فرما ہیں۔

ما

و لا

شکل (۸۰)

اِس عنصر کا رقبہ فرلا فرما ہے اور اس لئے اگر اِس نقطہ پر پترے کے فی کائی رقبہ کی کمیت ثہ ہو تو اس عنصر کی کمیت ثہ فرلا فرما ہوگی۔ مزید برین جب فرلا، فرما کو لاانتہا چھوٹا بنایا جاتا ہے تو انتہا میں اِس کمیت کو ایک ذرہ سمجھا جا سکتا ہے۔ اسلیے پترے کی کل کمیت کو متعدد ذروں کی کمیتیں سمجھا جا سکتا ہے۔

دفعہ ۸۶ میں ہم نے ذروں کے مرکز ثقل کے لیے حسب ذیل ضابطے حاصل کئے تھے: (۱۳۶)

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\Sigma\, \text{ک لا}}{\Sigma\, \text{ک}} \text{،} \quad \bar{\text{ما}} = \frac{\Sigma\, \text{ک ما}}{\Sigma\, \text{ک}}$$

موجودہ صورت میں یہ ضابطے ہو جاتے ہیں

لاَ = (∫∫ ثہ لا فرلا فرما) / (∫∫ ثہ فرلا فرما) ، ماَ = (∫∫ ثہ ما فرلا فرما) / (∫∫ ثہ فرلا فرما) ......(۳۰)

علامت جمع Σ کی بجائے تکمل کی علامتیں ہیں اور تکمل کو پترے کے پورے رقبہ پر لینا ہوگا۔

اگر پترا یکساں ہے تو ثہ کی قیمت مستقل ہے اور اس لیے

∫∫ ثہ لا فرلا فرما = ثہ ∫∫ لا فرلا فرما

اور علیٰ ہذا القیاس ۔ اس لئے مندرجہ بالا ضابطوں کو ثہ پر تقسیم کرنے سے یہ ضابطے حسب ذیل ضابطوں میں تحویل ہوتے ہیں :

لاَ = (∫∫ لا فرلا فرما) / (∫∫ فرلا فرما) ، ماَ = (∫∫ ما فرلا فرما) / (∫∫ فرلا فرما)

۱۰۶ ۔ ٹھوس جسم کا مرکز ثقل ۔ کسی ٹھوس جسم کا مرکز ثقل معلوم کرنے میں ہم جسم کو مستویوں کے تین نظاموں کے ذریعہ جو محددوں کے تین مستویوں کے متوازی ہوں چھوٹے ٹھوس عناصر میں تقسیم کرتے ہیں تب کسی چھوٹے عنصر کا حجم فرلا فرما فری ہوگا۔ پس دفعہ ۸۶ کے ضابطوں سے جسم کے مرکز ثقل کے محدد حسب ذیل شکل میں حاصل ہوتے ہیں :

لاَ = (∫∫∫ ثہ لا فرلا فرما فری) / (∫∫∫ ثہ فرلا فرما فری) ، ماَ = (∫∫∫ ثہ ما فرلا فرما فری) / (∫∫∫ ثہ فرلا فرما فری) ،

یَ = (∫∫∫ ثہ ی فرلا فرما فری) / (∫∫∫ ثہ فرلا فرما فری) ، ....(۳۱)

(۱۳۷) اگر جسم متجانس ہے تو ثہ مستقل ہے اور ضوابط ہو جاتے ہیں

$$\bar{لا} = \frac{\int\int\int لا فرلا فرما فری}{\int\int\int فرلا فرما فری}، \quad \bar{ما} = \frac{\int\int\int ما فرلا فرما فری}{\int\int\int فرلا فرما فری}، \text{ وغیرہ}$$

۱۰۷ — قطبی محددوں کا استعمال

تکمل کے ذریعہ مرکز ثقل معلوم کرنے میں محددوں کا کوئی اور نظام استعمال کیا جا سکتا ہے۔ کارٹیزی محددوں کے علاوہ جو محدد اس مقصد کے لیے زیادہ مفید ہیں وہ صرف قطبی محدد ہیں۔

کسی پترے کے مرکز ثقل کو قطبی محددوں میں یہ فرض کر کے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ کارٹیزی محددوں لا، ما اور قطبی محددوں ر، طہ میں حسب ذیل روابط موجود ہیں:

$$لا = ر\,جم\,طہ، \quad ما = ر\,جب\,طہ$$

پس اِن اندراجات سے ضوابط (۳۰) ہو جاتے ہیں

$$\bar{ر\,جم\,طہ} = \frac{\int\int ثہ (ر\,جم\,طہ)(ر\,فرر\,فرطہ)}{\int\int ثہ (ر\,فرر\,فرطہ)}$$

$$= \frac{\int\int ثہ\,ر^2 جم\,طہ\,فرر\,فرطہ}{\int\int ثہ\,ر\,فرر\,فرطہ}،$$

$$\bar{ر\,جب\,طہ} = \frac{\int\int ثہ (ر\,جب\,طہ)(ر\,فرر\,فرطہ)}{\int\int ثہ (ر\,فرر\,فرطہ)}$$

$$= \frac{\int\int ثہ\,ر^2 جب\,طہ\,فرر\,فرطہ}{\int\int ثہ\,ر\,فرر\,فرطہ}$$

جن میں $\bar{\text{ر}}$ ، $\bar{\text{طہ}}$ ، مرکز ثقل کے قطبی محدد ہیں ۔ اِن مساواتوں کی متناظر طرفوں کو تقسیم کرنے سے مساوات

$$\text{مس } \bar{\text{طہ}} = \frac{\iint \text{ثہ ر}^2 \text{ جب طہ فر ر فر طہ}}{\iint \text{ثہ ر}^2 \text{ جم طہ فر ر فر طہ}}$$

حاصل کیجا سکتی ہے جس سے صرف محدد $\bar{\text{طہ}}$ معلوم ہوسکتا ہے ۔

اسی طرح ہم کسی ٹھوس جسم کے مرکز ثقل کو قطبی محددوں میں یہ فرض کرکے معلوم کرسکتے ہیں کہ کارٹیزی محددوں لا ، ما ، ی اور قطبی محددوں ر، طہ، فہ میں حسب ذیل روابط موجود ہیں :

لا = ر جب طہ جم فہ ، ما = ر جب طہ جب فہ ، ی = ر جم طہ

اِس استحالہ کو عمل میں لانے سے ضوابط (۳۱) میں سے پہلا ضابطہ ہوجاتا ہے

$$\bar{\text{ر}} \text{ جب } \bar{\text{طہ}} \text{ جم } \bar{\text{فہ}} = \frac{\iiint \text{ثہ (ر جب طہ جم فہ) (ر}^2 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ)}}{\iiint \text{ثہ (ر}^2 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ)}}$$

$$= \frac{\iiint \text{ثہ ر}^3 \text{ جب}^2 \text{ طہ جم فہ فر ر فر طہ فر فہ}}{\iiint \text{ثہ ر}^2 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ}} \quad \text{.....(۳۲)}$$

اسی طرح باقی دو ضابطے ہوجاتے ہیں :

$$\bar{\text{ر}} \text{ جب } \bar{\text{طہ}} \text{ جب } \bar{\text{فہ}} = \frac{\iiint \text{ثہ ر}^3 \text{ جب}^2 \text{ طہ جب فہ فر ر فر طہ فر فہ ،}}{\iiint \text{ثہ ر}^2 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ}} \quad \text{.....(۳۳)}$$

$$\bar{\text{ر}} \text{ جم } \bar{\text{طہ}} = \frac{\iiint \text{ثہ ر}^3 \text{ جب طہ جم طہ فر ر فر طہ فر فہ}}{\iiint \text{ثہ ر}^2 \text{ جب طہ فر ر فر طہ فر فہ}} \quad \text{.......(۳۴)}$$

۱۰۸ — ٹھیک اسی کے مشابہ طریقہ سے محددوں کے کسی اور نظام میں مرکز ثقل کے محل کے محددوں کے لیے ضابطے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

کسی جسم کا مرکز ثقل معلوم کرنے کے لیے وہ طریقے کافی ہیں جنکی تفہیم اوپر کی گئی ہے، نیز ان طریقوں کو ملا کر بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اس امر کی توضیح کے لیے ہم ایک ہی ٹھوس جسم کا مرکز ثقل تین مختلف طریقوں سے معلوم کرینگے۔

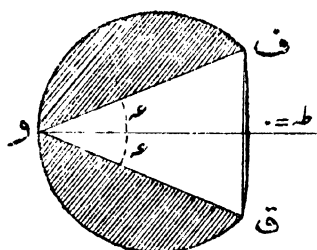
(۱۳۹)

توضیحی مثال

ایک قائم مستدیر مخروط و ف ق کو ایک ٹھوس متجانس کرہ سے کرید کر نکالا گیا ہے، مخروط کا راس و، کرہ کی سطح پر اور راس کا محور کرہ کا ایک قطر تھا۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرنا مطلوب ہے۔

طریقہ (۱) — قطبی محدد — فرض کرو کہ اول ہم قطبی محدد استعمال کرتے ہیں۔ مخروط کے راس و کو مبداء قرار دو اور مخروط کے محور کو ابتدائی خط۔ اگر مخروط کا نیم انتصابی زاویہ عہ ہے تو مخروط کی مساوات طہ = عہ ہے۔ اگر کرہ کا نصف قطر ا ہے تو کرہ کی مساوات ر = ۲ ا جم طہ ہے۔ مرکز ثقل، تشاکل کی وجہ سے محور طہ = ۰ پر واقع ہونا چاہیے، اس لئے طہ = ۰۔ اور مساوات (۳۴) ہو جاتی ہے

$$\bar{ر} = \frac{\iiint ثہ\, ر^3\, جب\, طہ\, جم\, طہ\, فر\, ر\, فر\, طہ\, فر\, فہ}{\iiint ثہ\, ر^2\, جب\, طہ\, فر\, ر\, فر\, طہ\, فر\, فہ}$$

جسم کو متجانس فرض کیا گیا ہے، اس لئے ثہ مستقل ہے اور اس لئے اس کو شمار کنندے اور نسب نما دونوں میں تکمل کی علامت سے باہر رکھا جا سکتا ہے

فہ کے لئے تکمل کے حدود فہ = ۰ سے فہ = ۲ π تک ہیں اور اس لئے ہر صورت میں اس تکمل کے عمل کی تکمیل کی جا سکتی ہے۔ تکمل کر کے ۲ π ثہ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

شکل (۸۱)

$$\bar{\text{ر}} = \frac{\iint \text{ر}^3 \,\text{جب طہ جم طہ فر ر فر طہ}}{\iint \text{ر}^2 \,\text{جب طہ فر ر فر طہ}}$$

پھر ہم ر کے لحاظ سے تکمل کر سکتے ہیں جس کے لئے حدود ہیں ر = ۰ تا ر = ۲ ا جم طہ چنانچہ حاصل ہوتا ہے

$$\bar{\text{ر}} = \frac{\int \frac{1}{4}(\text{۲ ا جم طہ})^4 \,\text{جب طہ جم طہ فر طہ}}{\int \frac{1}{3}(\text{۲ ا جم طہ})^3 \,\text{جب طہ فر طہ}}$$

$$= \frac{3}{2}\text{ا}\, \frac{\int \text{جم}^5\text{طہ جب طہ فر طہ}}{\int \text{جم}^3\text{طہ جب طہ فر طہ}}$$

بالآخر طہ کے لئے تکمل کے حدود طہ = عہ تا طہ = $\frac{\pi}{2}$ (کرہ کا مماس مستوی) ہیں۔ پس چونکہ

$$\int_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^5\text{طہ جب طہ فر طہ} = -\frac{1}{6}\Big[\text{جم}^6\text{طہ}\Big]_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\,\text{جم}^6\text{عہ}\,،$$

$$\int_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^3\text{طہ جب طہ فر طہ} = -\frac{1}{4}\Big[\text{جم}^4\text{طہ}\Big]_{\text{عہ}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\,\text{جم}^4\text{عہ}$$

(۱۴۰) اس لیے ان قیمتوں کو درج کرنے سے

$$ت = \frac{3}{2} ا \frac{\frac{1}{6} جم^6 عہ}{\frac{1}{4} جم^4 عہ} = ا جم^2 عہ$$

اس طرح مرکز ثقل مخروط کے محور پر راس سے فاصلہ ا جم² عہ پر واقع ہے۔

طریقہ (۲) ۔ کارٹیزی محدد ۔ اب ہم کارٹیزی محددوں کو مرکز ثقل کا محل معلوم کرنے کے لیے استعمال کریںگے ۔ و کو مبداء فرض کرو اور مخروط کے محور کو محور لا لو ۔ اب مخروط کی مساوات ہے

$$ما^2 + ی^2 = لا^2 مس^2 عہ$$

اور کرہ کی مساوات ہے

$$لا^2 + ما^2 + ی^2 - 2 ا لا = 0$$

دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

$$\bar{لا} = \frac{\iiint لا فرلا فرما فری}{\iiint فرلا فرما فری}$$

شکل (۸۲)

ہر تکملہ میں ہم اول ما اور ی کے لحاظ سے ایکساتھ تکمل کر سکتے ہیں ۔ دونوں صورتوں میں ہمیں ایک ہی تکملہ کی قیمت معلوم کرنی ہے یعنی ∬ فرما فری کی جہاں حدود حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں :

$$ما^2 + ی^2 = لا^2 مس^2 عہ$$

اور

$$ما^2 + ی^2 = 2 ا لا - لا^2$$

یہ مسئلہ وہی ہے کہ ایک مستدیر انگوٹھی کا رقبہ معلوم کیا جائے جس کے اندرونی و بیرونی نصف قطر علی الترتیب لا مس عہ اور $\sqrt{2 ا لا - لا^2}$ ہیں ۔ (یہ انگوٹھی بلاشبہ جسم کا وہ مقطوعہ ہے جو مستوی ما ی کے متوازی مستوی پر حاصل ہوتا ہے) ۔ اس انگوٹھی کا رقبہ ہے

$$\pi\,(۲\,ا\,لا - لا^۲) - \pi\,(لا^۲\,س^۲\,عہ) = \pi\,(۲\,ا\,لا - لا^۲\,قط^۲\,عہ)$$

اور می ہی فرما فری کی بجائے یہ قیمت رکھنے سے ضابطہ ہو جاتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{\int \pi\, لا\,(۲\,ا\,لا - لا^۲\,قط^۲\,عہ)\,فرلا}{\int \pi\,(۲\,ا\,لا - لا^۲\,قط^۲\,عہ)\,فرلا}$$

اب تکمل کے حدود وہیں مبداء لا = ۰ سے لا = ۲ ا جم^۲ عہ تک جو مستوی ف ق پر لا کی قیمت ہے۔ تکملوں کی قیمتیں معلوم کر کے اِن حدود کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{لا} = \frac{۲\,ا\,\pi \times \frac{۱}{۳}\,(۲\,ا\,جم^۲\,عہ)^۳ - \pi\,قط^۲\,عہ \times \frac{۱}{۴}\,(۲\,ا\,جم^۲\,عہ)^۴}{۲\,ا\,\pi \times \frac{۱}{۲}\,(۲\,ا\,جم^۲\,عہ)^۲ - \pi\,قط^۲\,عہ \times \frac{۱}{۳}\,(۲\,ا\,جم^۲\,عہ)^۳}$$

$$= ا\,جم^۲\,عہ$$

جو وہی نتیجہ ہے جو طریقہ (۱) سے حاصل ہوا تھا۔

(۱۴۱) **طریقہ (۳) ہندسی طریقہ**۔ مرکز ثقل کو اِس طرح بھی معلوم کیا جاسکتا ہے کہ دئے ہوئے حجم کو ایسے سادہ ترحجموں کے مجموعوں اور فرقوں میں تحویل کیا جائے جن کے مرکز ثقل معلوم ہوں۔ کُل کرہ و ف س ق میں سے مخروط و ف ر ق اور کروی قطعہ ف ر ق س کو تفریق کرنے سے وہ حجم حاصل ہوتا ہے جس کا مرکز ثقل معلوم کرنا ہے۔ اب کرہ کا مرکز ثقل اور مخروط کا مرکز ثقل معلوم ہے اور قطعہ ف ر ق س کا مرکز ثقل بہت آسانی سے اِس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ اس کو قطاع ج ف س ق اور مخروط

شکل (۸۳)

ج ف رق کافرق سمجھا جائے۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ابتدائی شکل (کرہ و ف س ق)۔(مخروط و ف رق)۔(قطاع ج ف س ق)
+ (مخروط ج ف رق)
سے بنی ہے۔

اِن کے حجم اور و ج پر ان کے مراکز ثقل کے فاصلے نقطہ و سے حسب ذیل ہیں:

شکل	حجم	مرکز ثقل کا فاصلہ و سے
+ کرہ	$\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3$	ا
- مخروط و ف رق	$-\frac{1}{3}(2\,\text{ا جم}^2\,\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})$	$\frac{3}{4}(2\,\text{ا جم}^2\,\text{عہ})$
- قطاع ج ف س ق	$-\frac{2}{3}\pi\,\text{ا}^3(1-\text{جم}\,2\,\text{عہ})$	$\text{ا}+\frac{3}{8}\,\text{ا}\,(1+\text{جم}\,2\,\text{عہ})$
+ مخروط ج ف رق	$\frac{1}{3}(\text{ا جم}\,2\,\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})$	$\text{ا}+\frac{3}{4}\,\text{ا جم}\,2\,\text{عہ}$

اِس جدول میں منفی علامت سے یہ مراد ہے کہ شکل کو جدا کرنا چاہئے یعنی اِس کے حجم کو منفی علامت کے ساتھ لینا چاہئے۔

و سے کسی مرکز ثقل کے فاصلہ کو لا سے تعبیر کریں اور ضابطہ (دفعہ ۸۶)

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\Sigma\,\text{ک لا}}{\Sigma\,\text{ک}}$$

کو استعمال کریں تو پوری شکل کے مرکز ثقل کا فاصلہ و سے حسب ذیل حاصل ہوتا ہے:

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^4-\frac{1}{4}(2\,\text{ا جم}^2\,\text{عہ})^2(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})-\frac{2}{3}\pi\,\text{ا}^4(1-\text{جم}\,2\,\text{عہ})\left\{1+\frac{3}{8}(1+\text{جم}\,2\,\text{عہ})\right\}}{\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3-\frac{1}{3}(2\,\text{ا جم}^2\,\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})-\frac{2}{3}\pi\,\text{ا}^3(1-\text{جم}\,2\,\text{عہ})}$$

$$\frac{+\frac{1}{3}(\text{ا جم}\,2\,\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})\,\text{ا}\,(1+\frac{3}{4}\,\text{جم}\,2\,\text{عہ})}{+\frac{1}{3}(\text{ا جم}\,2\,\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})+\frac{4}{3}\pi\,\text{ا}^3-\frac{1}{3}(2\,\text{ا جم}^2\,\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})}$$

$$\overline{-\frac{2}{3}\pi\,\text{ا}^3(1-\text{جم}\,2\,\text{عہ})+\frac{1}{3}(\text{ا جم}\,2\,\text{عہ})(\pi\,\text{ا}^2\,\text{جب}^2\,2\,\text{عہ})}$$

جس کو مختصر کیا جائے تو

لاَ = ا جم۲ عہ

یہ وہی نتیجہ ہے جو قبل ازیں حاصل ہو چکا ہے۔

عام مثالیں

(۱۴۲)

۱۔ ایک مستوی ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ج د کو وتر ا ج سے تنصیف کیا گیا ہے اور یہ وتر، وتر ب د سے نسبت ا : ب میں تقسیم ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ذو اربعۃ الاضلاع کا مرکز ثقل، ا ج میں واقع ہے اور اس کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں نسبت ۲ ا + ب : ۲ ب + ا ہے۔

۲۔ ایک یکساں تار کو ایک دائری قوس اور دو حدودی نصف قطروں کی شکل میں موڑا گیا ہے اور اس کل نظام کا مرکز ثقل مرکز پر ہے۔ ثابت کرو کہ قوس کے محاذی مرکز پر زاویہ مس۱ (- ۴/۳) بنتا ہے۔

۳۔ ایک دائری میز کے تین پائے کور کے نیچے انتصاباً واقع ہیں اور ایک مثلث متساوی الاضلاع بناتے ہیں۔ ثابت کرو کہ کل میز کے وزن سے کم وزن میز کو اُلٹ نہیں سکتا۔

۴۔ ایک مثلثی میز تین پایوں پر جو اس کے ضلعوں کے وسطی نقطوں پر ہیں سہارا ہوا ہے اور اس پر کسی محل میں ایک وزن و رکھا گیا ہے۔ یہ معلوم ہوا کہ ایک راس پر وزن ف رکھنے سے میز کا توازن عین ٹوٹتا ہے۔ اسی طرح دوسرے راسوں پر اوزان ق، ر رکھنے سے اس کے توازن میں عین خلل واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف + ق + ر، وزن و کے محل پر منحصر نہیں ہے۔

۵۔ ایک مثلثی پترے کے تین کونوں پر تین وزن کیلوں کے ذریعہ جوڑ دیے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک، مثلث کے مقابل کے ضلع کے طول کے متناسب ہے اور تینوں کا باہم وزن پترے کے ابتدائی وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ثقل نو نقطی دائرہ کے مرکز پر ہے۔

۶۔ ایک مثلثی پترے کو جس کا وزن و اور جس کے اضلاع ا، ب، ج ہیں

طول ل، ل، ل کی ڈوریوں کے ذریعے جو اس کے راسوں سے بندھی ہیں ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ و ک ل، و ک ل، و ک ل ہیں جہاں

$$ک = \left[۳ (ل_۱^۲ + ل_۲^۲ + ل_۳^۲) - ا^۲ - ب^۲ - ج^۲ \right]^{-\frac{1}{2}}$$

۷۔ ایک گھڑی کی سوئی کو ایک چکنے شکن پر رکھ کر کس طرح تیار کیا جا سکتا ہے کہ وہ گھڑی کاری (watchwork) کے ذریعہ وقت بتلائے جبکہ ایک وزن گھڑی کی سوئی میں چھپا ہوا سوئی کے ساتھ اطراف گھومے۔

۸۔ یکساں مادے سے بنا ہوا تکلہ کی شکل کا ایک جسم دو قائم مستدیر مخروطوں سے محدود ہے جن کے ارتفاع ۶ اور ۲ انچ ہیں اور جن کا قاعدہ مشترک ہے جو نصف قطر ایک انچ کا ایک دائرہ ہے۔ اس جسم کو ایک ڈوری کے ذریعہ جو مستدیر قاعدہ کی کور کے ایک نقطہ سے بندھی ہے لٹکایا گیا ہے۔ تکلہ کے محور کا میلان انتصابی کے ساتھ معلوم کرو جبکہ وہ آزادانہ لٹک رہا ہو۔

۹۔ ایک پورا گنجفہ میز پر اس طرح رکھا ہوا ہے کہ ہر کارڈ اپنے نیچے کے کارڈ سے گنجفہ کے طول کی سمت میں اتنا نکلا ہوا ہے کہ وہ عین گرنے کو ہے بلا لحاظ ان کارڈوں کے جو اس کے نیچے ہیں۔ ثابت کرو کہ متواتر کارڈوں کے سروں کے درمیانی فاصلے ایک سلسلہ موسیقیہ بناتے ہیں۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں طور پر وزنی ڈوری کے کسی حصہ ف ق (۱۴۳) کا مرکز ثقل، ف اور ق پر کے مماسوں کے نقطہ تقاطع کے اوپر انتصاباً واقع ہوتا ہے جبکہ ڈوری آزادانہ لٹک رہی ہو۔

۱۱۔ ایک کروی خول کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر ا، ب ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز ہندسی سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ حسب ذیل ہے

$$\frac{۳ (ا + ب)(ا^۲ + ب^۲)}{۸ (ا^۲ + اب + ب^۲)}$$

۱۲۔ ایک لنگر چھلے کو ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے مرکز اور محور میں سے

گذرتا ہے دو مساوی حصوں میں قطع کیا گیا ہے۔ کسی ایک نصف کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ رسا کشی کے مقابلہ میں ایک شخص کو جو قوت (کھینچ) لگانی پڑتی ہے وہ اس کے وزن کا $\frac{ا}{ب}$ ہے جہاں ا، اُس خط کا افقی ظل ہے جو اسکی ایڑیوں کو اس کے مرکز ثقل سے ملاتا ہے اور ب، زمین کے اوپر رسی کی بلندی ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ ایک گھوڑا جس کا وزن و پونڈ ہے زمین کے اوپر ارتفاع ف پر $\frac{و ا}{ف}$ پونڈ کی افقی کھینچ اس طرح عائد کر سکتا ہے کہ اپنے مرکز ثقل کو اُس محل سے ا فٹ آگے بڑھائے جبکہ وہ اپنے قدموں پر سیدھا کھڑا ہوا تھا۔

۱۵۔ متغیر کثافت اور مادے کی ایک سلاخ کو ایک شخص اپنی دو انگشتہائے شہادت پر اس طرح سہارے ہوئے ہے کہ سلاخ افقی محل میں ہے۔ شخص اپنی ان انگلیوں کو ایک دوسرے کی جانب اُن کو ایک ہی افقی مستوی میں رکھتے ہوئے حرکت دیتا ہے اور سلاخ کو ایک یا دونوں انگلیوں پر سے پھسلنے سے نہیں روکتا۔ ثابت کرو کہ جب اُس کی انگلیاں مل جاتی ہیں تو سلاخ کا مرکز ثقل اُن دو نقاط تماس کے وسط میں ہوتا ہے جن پر سلاخ اُس کی انگلیوں کو مس کرتی ہے۔

۱۶۔ ایک نیم دائری قرص انتصابی مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا منحنی کنارہ ایک کھردرے افقی مستوی پر اور اتنے ہی کھردرے ایک انتصابی مستوی پر ٹکا ہوا ہے، رگڑ کا قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ کم سے کم زاویہ جو احاطہ کرنے والا قطر انتصابی کے ساتھ بنا سکتا ہے حسب ذیل ہے:

$$\text{جم}^{-1}\frac{مہ + مہ^2}{1 + مہ^2} \times \frac{3\pi}{4}$$

۱۷۔ نصف قطر ا اور وزن و کا ایک نیم کرہ ایک چکنے میز پر اس طرح رکھا ہوا ہے کہ اس کی منحنی سطح میز پر ہے اور طول ل (ل > ا) کی ایک ڈوری اس کی کور کے ایک نقطہ اور میز کے ایک نقطہ سے بندھی ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ ہے

$$\frac{۳}{۸}\,و\,\frac{ا - ل}{\sqrt{۲\,ا\,ل - ل^{۲}}}$$

۱۸ — وزن و کا ایک مثلثی پترا تین انتصابی ڈوریوں سے جو اس کے راسوں سے بندھی ہیں اس طرح سہارا گیا ہے کہ مثلث کا مستوی افقی ہے۔ وزن و کا ایک ذرہ مثلث کے مرکز عمودی پر رکھا گیا۔ ثابت کرو کہ ڈوریوں کے تناؤ حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{ت_{۱}}{۱+۳\,مم\,ب\,مم\,ج} = \frac{ت_{۲}}{۱+۳\,مم\,ج\,مم\,ا} = \frac{ت_{۳}}{۱+۳\,مم\,ا\,مم\,ب} = \frac{و}{۲}$$

(۱۴۴) ۱۹ — ایک پترے کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک مکافی اور اس کے محور پر کے ایک عمود وار خط سے محدود ہے۔

۲۰ — اُس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک ٹھوس مکافی نما سے ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے محور پر عمود ہے کاٹ لیا گیا ہے۔

۲۱ — اُس رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک قطع ناقص کے دو نیم قطروں کے درمیان محدود ہے۔

۲۲ — اُس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو ایک ٹھوس ناقص نما سے ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے مرکز میں سے گذرتا ہے کاٹ لیا گیا ہے۔

۲۳ — ایک ناقص نما خول کے نصف کا مرکز ثقل معلوم کرو جو دو متشابہ ہم مرکز اور ہم محور ناقص نماؤں سے اور مرکز میں سے گذرنے والے ایک مستوی سے محدود ہے۔

۲۴ — ایک قائم مستدیر مخروط کو جس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہے دو مساوی حصوں میں ایک مستوی کے ذریعہ جو اس کے محور میں سے گذرتا ہے تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی ایک حصہ کا مرکز ثقل محور سے $\frac{ر}{\pi}$ فاصلہ پر واقع ہے۔

۲۵ — ایک پترا نیم کعبی مکافی $لا^{۳} = ا\,ما^{۲}$، محور لا، اور معین $لا = ا$ سے محدود ہے۔ اس کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

۲۶ — منحنی

ر = ا جیب ۳ طہ

کے ایک سادہ حلقہ کا مرکز ثقل معلوم کرو ۔

۲۷ ۔ ایک کرہ کے ایک ثمن کا مرکز ثقل معلوم کرو ۔

۲۸ ۔ نصف قطر ب کے ایک نیم کرہ میں نصف قطر ا کا ایک اسطوانی سوراخ آر پار اس طرح بنایا گیا ہے کہ وہ نصف قطر جو نیم کرہ کے قاعدہ پر عمود ہے سوراخ کا مرکزی خط بھی ہے ۔ شکل کا مرکز ثقل معلوم کرو ۔

۲۹ ۔ اس رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو دو دائروں

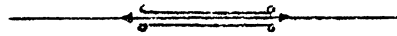
لا² + ما² = ا² ، لا² + ما² = ۲ ا ب

سے محدود ہے ۔

۳۰ ۔ ایک عدسہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جو متجانس شیشے سے بنا ہوا ہے اور جس کی کروی سطحوں کے نصف قطر ر، س ہیں اور جس کی موٹائی مرکز پر م ہے اور کنارے پر صفر ۔

(۱۴۵)

ساتواں باب

کام

۱۰۹۔ کام کی پیمائش۔ کام کی مختلف قسمیں ہیں لیکن علم حیل میں جس کام سے ہمیں واسطہ رہے گا وہ صرف وہ کام ہے جو اجسام کو جن پر قوتیں عمل کرتی ہوں حرکت دینے میں انجام پاتا ہے۔ ایسے کام کو حیلی کام کہتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں کہ حیلی کام ہوتا ہے جب کبھی کوئی جسم اس پر عمل کرنے والی قوتوں کے مقابلہ میں حرکت کرتا ہے مثلاً وزن اٹھانے میں، کھردری سطح پر کوئی وزنی شئے گھسیٹنے میں یا لچکدار ڈوری تاننے میں۔ پہلی صورت میں کام قوت جاذبہ کے خلاف انجام پاتا ہے، دوسری صورت میں اس رگڑ کی قوت کے خلاف جو متحرک شئے پر کھردری سطح لگاتی ہے، اور تیسری صورت میں ڈوری کے تناؤ کے خلاف۔

کئے ہوئے کام کی مقدار کا تخمینہ کرنے میں صریحاً دو چیزوں کو محسوب کرنا ہوگا یعنے اُس قوت کی مقدار کو جو جسم پر عمل کرتی ہے اور اس فاصلہ کو جو قوت کے خلاف جسم نے طے کیا ہے۔ کام کی مقدار صریحاً قوت کے راست متناسب ہوگی۔ ۲۰۰ پونڈ کا ایک وزن ایک معلومہ بلندی تک اٹھانے میں جو کام ہم کرتے ہیں وہ اُس کام کا دُگنا ہوگا جو ۱۰۰ پونڈ کے ایک وزن کو اُسی بلندی تک اٹھانے میں مطلوب ہوگا۔ نیز کام اُس فاصلے کے بھی متناسب ہوگا جو طے ہوا ہے۔ کسی وزن کو ۲ فٹ تک

اٹھانے میں جو کام ہم کرتے ہیں وہ اُس کام کا دگنا ہوگا جو اُسی وزن کو ایک فٹ تک اٹھانے میں مطلوب ہوگا۔ اس لئے کئے ہوئے کام کی مقدار، قوت اور فاصلہ کے حاصل ضرب کے متناسب ہوتی ہے۔

ایک پونڈ کے وزن کو ایک فٹ ارتفاع تک اٹھانے میں جو کام ہوتا ہے اُس کی مقدار کو **ایک فٹ پونڈ** کہتے ہیں۔

اوپر کے بیان سے یہ ظاہر ہے کہ و پونڈ کے وزن کو ف فٹ بلندی تک اٹھانے میں کئے ہوئے کام کی مقدار و ف فٹ پونڈ ہے۔ نیز کسی جسم کو ف پونڈ کی ایک قوت کے خلاف س فٹ تک حرکت دینے میں کیا ہوا کام ف س فٹ پونڈ ہے' اس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ

(۱۳۶) **ایک جسم کو ایک ایکساں قوت کے خلاف کسی فاصلہ تک حرکت دینے میں جو کام ہوتا ہے وہ قوت اور فاصلہ کا حاصل ضرب ہے۔**

مثلاً فرض کرو کہ ایک ریل گاڑی کو ایک ہموار راستہ پر کھینچنے میں جو قوت مطلوب ہوتی ہے وہ ۱۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔ تب اس گاڑی کو ۱۰۰ میل کے فاصلہ تک کھینچنے میں جو کام ہوگا وہ

= ۱۰۰ × ۵۲۸۰ × ۱۰۰۰ فٹ پونڈ

۱۱۰۔ کام کرنے کی شرح

کام کو اکثر ایک مقررہ وقت میں انجام دینا ہوتا ہے اور اِس لیے اکثر اس کی ضرورت ہوتی ہے کہ وہ شرح معلوم کی جائے جس سے کام ہو رہا ہے۔ کام کرنے کی وہ شرح جس میں ۳۳۰۰۰ فٹ پونڈ کا کام فی منٹ ہوتا ہے **ایک اسپی طاقت** کہلاتی ہے۔ اسپی طاقت کو بالعموم **ا۔ ط** (H. P) سے تعبیر کیا جائے گا۔

اِس اکائی کو **واٹ** (Watt) نے جاری کیا تھا کیونکہ یہ سمجھا جاتا تھا کہ وہ ایک معمولی گھوڑے سے کام کرنے کی شرح ہے۔ لیکن یہ معلوم ہوا ہے کہ بہت کم گھوڑے مسلسل ایک اسپی طاقت کے ساتھ کسی مدت تک کام کرسکتے ہیں۔

اسپی طاقت کا حساب لگانے کے لیے ذیل میں ایک مثال دیجاتی ہے:
فرض کرو کہ اس انجن کی اسپی طاقت مطلوب ہے جو ایک ٹرین کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے کھینچتا ہے جبکہ رگڑ کی مزاحمت ۱۰۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔ ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار = ۴۴ فٹ فی ثانیہ، اس لئے وہ کام جو فی ثانیہ ہوا = ۴۴ × ۱۰۰۰ فٹ پونڈ۔ لیکن چونکہ ایک اسپی طاقت = ۵۵۰ فٹ پونڈ فی ثانیہ اس لئے مطلوبہ اسپی طاقت

$$= \frac{۴۴ \times ۱۰۰۰}{۵۵۰} = ۸۰ \text{ اسپی طاقت}$$

اس سے وہ اسپی طاقت ملتی ہے جو ٹرین کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے کھینچنے میں مطلوب ہے اگر رفتار مستقل نہ ہو تو ہم دیکھیں گے کہ اسپی طاقت مختلف ہوگی کیونکہ کام کا کچھ حصہ حرکت کا اسراع پیدا کرنے میں صرف ہوگا لیکن موجودہ صورت میں ہم اپنی توجہ صرف ایکساں رفتار کی حرکت پر محدود رکھتے ہیں۔

کام کی مطلق اکائی

۱۱۱ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ قوت کی عملی اکائی کمیت کا وزن ہے اور اس اکائی کے علاوہ ایک اور اکائی بھی ہے جس کو مطلق اکائی کہتے ہیں اور جسکی تعریف یہ ہے کہ یہ وہ قوت ہے جو اکائی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے۔ چونکہ عملی اکائی اکائی کمیت میں اسراع ج پیدا کرتی ہے جہاں ج اسراع بوجہ جاذبہ ارض ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عملی اکائی مطلق اکائی کی ج گنی ہے۔ (۱۴۷)

برطانوی عملی اکائیوں میں اکائی قوت پونڈ وزن ہے۔ مطلق اکائیوں میں متناظر اکائی پونڈل کے طور پر مشہور ہے۔ یہ وہ قوت ہے جو ایک پونڈ کی کمیت میں اکائی اسراع پیدا کرتی ہے۔
کام کی عملی اکائی جیسا کہ ہم بیان کر چکے ہیں وہ کام ہے جو ایک پونڈ کی

کمیت کو ایک فٹ تک اٹھانے میں انجام پاتا ہے یعنی ایک پونڈ کے وزن سے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں۔ کام کی ایک مطلق اکائی بھی ہے جس کی تعریف یہ کی جاتی ہے کہ یہ وہ کام ہے جو ایک پونڈل کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں ہوتا ہے۔ اس اکائی کو **فٹ پونڈل** کہتے ہیں۔ اب چونکہ ایک پونڈ وزن 'ج پونڈل کے مساوی ہے اس لئے صریحاً حسب ذیل ربط حاصل ہوتا ہے

ایک فٹ پونڈ = ج فٹ پونڈل

مثالیں

۱۔ ایک ایسی طاقت کا ایک گھوڑا ایک ٹن وزنی گاڑی کو کس رفتار سے کھینچ سکتا ہے اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ رگڑ ایک ایسی افقی قوت پیدا کرتی ہے جو گاڑی کے وزن کا $\frac{1}{۱۴}$ ہے۔

۲۔ اگر ایک جسم کو جس پر ف پونڈل کی ایک مزاحم قوت عمل کرتی ہے اس مزاحمت کے خلاف رفتار و سے حرکت میں لایا جائے تو کتنی ایسی طاقت مطلوب ہوگی۔

۳۔ ۷ ایسی طاقت کا ایک بھاپ بیلن (Roller) جس کا وزن ایک ٹن ہے کس شرح سے ایک راستہ پر لڑھکے گا اگر مزاحمت بوجہ رگڑ بیلن کے وزن کے مساوی ہے

۴۔ ایک گھونگا جس کا وزن $\frac{1}{۲}$ اونس ہے ۶ فٹ بلند دیوار پر ۴ گھنٹوں میں چڑھتا ہے۔ کس ایسی طاقت سے وہ کام کرتا ہے۔

۵۔ اینٹوں کے ایک ڈھیر کو جس کا وزن ۵ ٹن ہے ایک مکان کی چھت پر پہنچانا ہے جس کی بلندی ۵۰ فٹ ہے۔ دس مزدور لگائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک $\frac{1}{۱۲}$ ایسی طاقت کی اوسط شرح سے کام کرتا ہے۔ اس کام میں کتنا وقت لگیگا۔

۶۔ ایک انجن کے فشارے کا رقبہ ا مربع فٹ اور ضرب ل فٹ ہے اور انجن ن گردشیں فی منٹ کرتا ہے۔ اگر فشارہ پر عمل کرنے والا دباؤ فی اکائی

رقبہ ف پونڈ وزن فی مربع فٹ ہو تو ثابت کرو کہ انجن جس اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے وہ

$$\frac{\text{ف ل ا ن}}{۳۳۰۰۰}$$

ہے ۔

۷ ۔ ایک حرّاکہ (Locomotive) کا دائری فشارہ ۷ انچ قطر کا ہے اور اس کی ضرب ۲۶ انچ ہے ۔ وہ ۲۵۰ گردشیں فی منٹ کرتا ہے اور دباؤ ۲۲۵ پونڈ وزن فی مربع انچ ہے ۔ اس کی اسپی طاقت معلوم کرو ۔

۸ ۔ اگر ایک جہاز کو جس کا طول ۱۵۰ فٹ ہے ۹ بحری میل کی رفتار سے چلانے کے لیے ۲۰۰ اسپی طاقت مطلوب ہو تو ثابت کرو کہ ایک مشابہ جہاز کو جو متشابہاً غرق ہے اور ۶۰۰ فٹ لمبا ہے ۱۸ بحری میل کی رفتار سے چلانے کے لیے ۲۵۶۰۰ اسپی طاقت مطلوب ہوگی جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ مزاحمت تر سطح کے اور رفتار کے مربع کے متناسب ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ مافیہ جہاز کے ہر ٹن کے لیے کوئلے کی قیمت دونوں جہازوں میں ایک ہی ہوگی ۔ (۱۴۸)

۹ ۔ ۱۵۰ اسپی طاقت ایک دھرے سے دوسرے دھرے پر ایک پٹے کے ذریعہ منتقل ہوتی ہے جو دھروں کے دو پہیوں پر ۲۵۰۰ فٹ فی منٹ کی خطی رفتار سے حرکت کرتا ہے ۔ پٹے کی دو جانبوں پر تناؤ کا فرق معلوم کرو ۔

۱۰ ۔ ایک حرّاکہ میں فی اسپی طاقت گھنٹہ (Horse-power-hour) $\frac{1}{2}$ ۱ پونڈ کوئلہ خرچ ہوتا ہے ۔ ایک ٹرین کو جس کا مجموعی وزن ۱۰۰۰ ٹن ہے ہموار راستہ پر ۵۰ میل تک کھینچنے میں کتنا کوئلہ مطلوب ہوگا جبکہ راستہ کی مزاحمت بوجہ رگڑ ۱۲ پونڈ وزن فی ٹن ہو ۔

۱۱ ۔ ۲۲۰۰۰ اسپی طاقت کا ایک جہاز چھ دنوں میں ۳۴۰۰ میل طے کرتا ہے ۔ جہاز کی حرکت پر مزاحمت معلوم کرو ۔

متغیر قوت کے خلاف کام

۱۱۲ ۔ اگر ایک جسم کو ایک قوت کے خلاف جس کی شدت مستقل نہ ہو

بلکہ متحرک جسم کے راستہ پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہو تصور کیا جائے تو ہم اس صورت میں انجام پذیر کام کے لیے ضابطہ ف س استعمال نہیں کر سکتے۔

کام کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم اُس پورے خط کو جس پر حرکت واقع ہوتی ہے لاانتہا صغیر چھوٹے ٹکڑوں کی لاتناہی تعداد میں تقسیم کرتے ہیں، اِن میں سے ہر ٹکڑا اتنا چھوٹا لیا جاتا ہے کہ حرکت میں جو قوت مزاحم ہے اُس کو کسی ایک ٹکڑے پر اثنا حرکت میں مستقل مقدار کا فرض کیا جا سکے۔

اگر کسی جزو کا طول فرس ہو جس کا فاصلہ ابتدائی نقطہ سے س ہے اور اگر قوت کی شدت جو اِس چھوٹے جزو فرس میں حرکت کی مزاحم ہے ف ہو تو اِس جزو کو طے کرنے میں کام کی مقدار ف فرس ہو گی۔ اسلئے تمام اجزا میں کیے ہوئے کام کی مقداروں کا مجموعہ یعنی کل کام جو ہوا

$$\int ف\ فرس$$

ہے۔

لچکدار ڈوری کو تنانے میں کام

۲۱۱۔ اِس ضابطہ کے استعمال کی مثال کے لیے فرض کرو کہ ہم وہ کام معلوم کرتے ہیں جو ایک لچکدار ڈوری کو تنانے میں انجام پاتا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل ہے اور اس کی لچک کی قدر لہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

(۱۴۹) جب ڈوری کا طول کھنچکر لا ہو جاتا ہے تو اِس کا تناؤ ف، دفعہ ۳۹ کے ضابطہ کی رو سے حسب ذیل ہے:

$$ت = لہ \frac{لا - ل}{ل}$$

ڈوری کو اور مزید طول فرلا تک تنانے میں ــــ یعنی طول لا سے طول لا + فرلا تک ــــ کیا ہوا کام

$$= ت\ فرلا$$

$$= \frac{ل}{ل} (لا - ل) فرلا$$

تکمل سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ ڈوری کو طول ا سے طول ب تک تنانے میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$= \int_{لا=ا}^{لا=ب} \frac{ل}{ل} (لا - ل) فرلا$$

$$= \frac{ل}{۲ل} \left\{ (ب - ل)^۲ - (ا - ل)^۲ \right\}$$

$$= \frac{ل}{۲ل} (ب + ا - ۲ل)(ب - ا)$$

وسیع شدہ طول ب - ا ہے اور $\frac{ل}{۲ل}$ (ب + ا - ۲ل) وہ تناؤ ہے جبکہ توسیع کا نصف مکمل ہو چکتا ہے یعنی جبکہ لا = $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب)

پس معلوم ہوا کہ

کسی لچکدار ڈوری کو کسی طول ا سے (جو ڈوری کے طبعی طول سے بڑا ہو) طول ب تک تنانے میں جو کام ہوتا ہے وہ

تناؤ طول $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب) پر × (ب - ا)

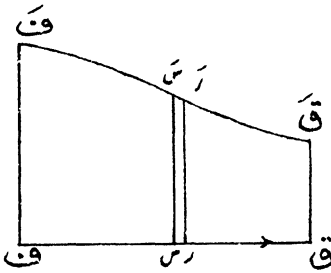
کے مساوی ہے۔

اگر تناؤ کو پونڈ وزن میں اور توسیع (ب - ا) کو فٹوں میں پیمائش کیا جائے تو صریحاً اس حاصل ضرب سے کام کی وہ مقدار حاصل ہوگی جو فٹ پونڈوں میں پیمائش کی گئی ہے۔ اگر تناؤ کو پونڈلوں میں اور (ب - ا) کو فٹوں میں پیمائش کیا جائے تو حاصل ضرب سے فٹ پونڈلوں میں کام کی مقدار حاصل ہوگی۔

(۱۵۰)

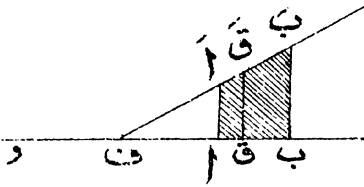
کام کو رقبہ کے ذریعہ تعبیر کرنا

۱۱۴ ـــ فرض کرو کہ ف ق اُس راستہ کو تعبیر کرتا ہے جو ایک متحرک جسم مرتسم کرتا ہے اور فرض کرو کہ ہم ف ق کے ہر نقطہ پر مُعین کھینچتے ہیں جو کسی پیمانہ پر (جو ہم چاہیں) اُس قوت کو تعبیر کرتے ہیں جو اُس نقطہ پر جسم کی حرکت میں مزاحم ہے۔ فرض کرو کہ ایسے کوئی دو متصلہ نقطے س، ر ہیں اور ان نقطوں پر کے مُعین س سَ، ر رَ ہیں

شکل (۸۴)

اب چھوٹی پٹی س سَ رَ ر کے رقبہ کو انتہا میں س ر × س سَ کے مساوی فرض کیا جا سکتا ہے۔ اس پیمانہ پر جس پر ہم قوتوں کو تعبیر کر رہے ہیں یہ حاصل ضرب = فاصلہ س ر × وہ قوت جو جسم کی حرکت از س تا ر میں مزاحم ہے
دوسرے الفاظ میں چھوٹے رقبہ س سَ رَ ر سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو جسم کو س سے ر تک حرکت دینے میں ہوا ہے۔
ایسے چھوٹے رقبوں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ کل رقبہ ف فَ قَ ق سے وہ کام تعبیر ہوتا ہے جو ف تا ق حرکت میں انجام پایا ہے۔

۱۱۵ ـــ اس طریقہ سے وہ کام بہت ہی آسانی سے معلوم کیا جا سکتا ہے جو ایک لچکدار ڈوری کو تنانے میں انجام پاتا ہے اور جس کی ہم دفعہ ۱۱۳ میں تخمین کر چکے ہیں۔ فرض کرو کہ و ف ڈوری کا طبعی طول ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے سرے و کو خوب مضبوط پکڑ لیا ہے اور یہ کہ ڈوری کو جب تنایا جاتا ہے تو اس کا دوسرا سرا ف خط و ف پر حرکت کرتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ کام مطلوب ہے جو ڈوری کو

طول و ا سے طول و ب تک تنانے میں انجام پاتا ہے۔

فرض کرو کہ خط و ف ا ب کا کوئی نقطہ ق ہے اور فرض کرو کہ مُعین ق قَ کھینچا گیا ہے جو اُس تناو کو تعبیر کرتا ہے جبکہ ڈوری کا طول و ق ہے۔

شکل (۸۵)

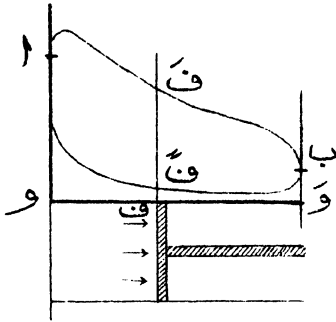
ق کے مختلف محلوں کے لئے معین ق قَ کا ارتفاع مختلف ہوگا۔

اب چونکہ کلیہ ہُک کی رُو سے تناؤ توسیع کے متناسب ہوتا ہے اسلئے مُعین ق قَ کا ارتفاع (جو تناؤ کو تعبیر کرتا ہے) ہمیشہ ف ق (توسیع) کے ساتھ ایک ہی نسبت رکھے گا۔ اِس لئے قَ ہمیشہ ف میں سے گذرنے والے ایک خط مستقیم پر ہوگا۔ اگر ا اَ اور ب بَ وہ مُعین ہوں جو علی الترتیب ا اور ب پر کے تناؤں کو تعبیر کرتے ہیں تو یہ خط نقطوں اَ، بَ میں سے گذرے گا۔ اب وہ کام جو ڈوری کو ا سے ب تک تنانے میں انجام پاتا ہے دفعہ ۱۱۴ کی بموجب رقبہ ا اَ بَ ب سے تعبیر ہوتا ہے (دیکھو شکل ۸۵)

(۱۵۱) اِس شکل کا رقبہ صریحًا ا ب کو اُس مُعین سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے جو ا ب کے نقطہ وسطی پر قائم کیا گیا ہو۔ یہ مُعین ڈوری کے اُس تناؤ کو تعبیر کرتا ہے جبکہ اس کا طول $\frac{1}{2}$ (و ا + و ب) ہو یعنی ہمیں دفعہ ۱۱۳ کا نتیجہ ہی حاصل ہوتا ہے جو حسب ذیل ہے:

(کیا ہوا کام) = (توسیع کی وسعت، ا ب) × (توسیع کی نصف منزل پر تناؤ)

۱۱۶ — مظہار نقشہ — کام کی اُس ترسیمی تعبیر سے جسکو دفعہ ۱۱۴ میں سمجھایا گیا ہے عملی انجینیرنگ میں استفادہ کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ و وَ وہ فاصلہ ہے جو ایک فشارہ، اسطوانہ میں طے کرتا ہے۔ جب فشارہ کسی محل ف میں ہو تو فرض کرو کہ فشارہ پر عمل کرنے والے دباؤ کی پیمائش

کی گئی ہے اور فرض کرو کہ اِس دباؤ کو تعبیر کرنے کے لیے کسی پیمانہ پر ایک خط ف فَ، و وَ کے علی القوائم کھینچا گیا ہے۔ جب فشارہ طول و وَ پر حرکت کرتا ہے اور پھر طول وَ و پر واپس ہوتا ہے تو نقطہ فَ ایک بند منحنی ا فَ ب فً ا مرتسم کرتا ہے جس کو فشارہ کی حرکت کا مظہار نقشہ کہتے ہیں۔

شکل (۸۶)

فشارہ کی آگے کی حرکت میں بھاپ نے اُسپر جو کام کیا ہے وہ جیساکہ ہم دیکھ چکے ہیں رقبہ ا فَ ب وَ ف و ا سے تعبیر ہوتا ہے جو منحنی ا فَ ب اور محور و وَ سے محدود ہے۔ یہ کام فشارہ کو اِس کے ڈنڈے کی دھکیل کے خلاف آگے حرکت دینے میں صرف ہوا ہے۔ اسی طرح فشارہ کی پیچھے کی حرکت میں یعنی حرکت واپسیں میں بھاپ نے اسپر جو کام کیا ہے وہ رقبہ ب وَ ف و ا فً ب سے تعبیر ہوتا ہے جو منحنی ب فً ا اور محور و وَ سے محدود ہے، اِس رقبہ کو منفی علامت کے ساتھ لینا چاہیئے کیونکہ فشارہ اب اسپر عمل کرنے والے دباؤ کے خلاف حرکت کر رہا ہے۔

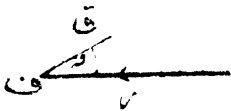
پس کُل کام جو فشارہ پر ہوا اِن دو رقبوں کے فرق سے تعبیر ہوتا ہے اور یہ وہ رقبہ ہے جو خود مظہار نقشہ کا ہے۔ اس لیے وہ شرح معلوم کرنیکے لیے جس پر انجن کام کر رہا ہے صرف اِس امر کی ضرورت ہے کہ مظہار نقشہ کا رقبہ اور گردشوں کی تعداد فی اکائی وقت معلوم کی جائے۔

کام اُس قوت کے خلاف جو سمت حرکت کے ساتھ کوئی زاویہ بنائے (۱۵۲)

۱۱۷ — ہم نے اتبک اُن صورتوں پر بحث کی ہے جن میں قوت ایسی سمت میں

عمل کرتی ہے جو اُس سمت کے ٹھیک مخالف ہے جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ لیکن ہمیں اُس کام کا بھی حساب لگانا پڑے گا جو انجام پاتا ہے جبکہ حرکت قوت کی سمت کے ساتھ کوئی زاویہ بنا سکے۔

جب جسم کو قوت کی سمت کے علی القوائم متحرک کیا جاتا ہے تو صریحاً کیا ہوا کام صفر ہے مثلاً کسی وزن کو ایک افقی سطح پر پھرانے میں جاذبۂ ارض کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا۔

اب ہم وہ کام معلوم کرینگے جو انجام پاتا ہے جبکہ کسی جسم کو ایک ایسی سمت میں متحرک کیا جاتا ہے جو اسپر عمل کرنے والی قوت کی سمت سے کوئی زاویہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک جسم کو ف سے ق تک جو اس کے راستہ کا ایک چھوٹا حصہ فرس ہے حرکت دی گئی ہے جبکہ اس پر ایک قوت ر عمل کرتی ہے جس کا خط عمل، ق ف سے زاویہ فہ بناتا ہے۔ ر کو دو اجزائے ترکیبی ر جم فہ، ر جب فہ میں تحلیل کرو جن میں سے پہلا ق ف پر اور دوسرا ق ف کے عمود وار عمل کرے۔

ر کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ وہی ہے جو ہوتا اگر یہ دو قوتیں ر جم فہ اور ر جب فہ ایک ساتھ جسم پر عمل کرتیں۔ اول الذکر قوت کے خلاف

ق
فہ
ف
ر

شکل (۸۷)

جو کام ہوا ہے وہ ر جم فہ فرس ہے اور موخر الذکر کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ صفر ہے۔ اس لئے کل کام جو انجام پایا ہے ر جم فہ فرس ہے۔

۱۱۸ — فرض کرو کہ ر کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما، ہے ہیں اور فرض کرو کہ راستہ کے عنصر ف ق کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں ر کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام

$$\frac{لا}{ر} ، \frac{ما}{ر} ، \frac{ہے}{ر}$$

ہیں اور چونکہ یہ خط عمل، ف ق سے زاویہ ۲۱ - فہ بناتا ہے اسلئے

$$\text{جم}(\pi-\text{فہ}) = \text{ل}\,\frac{\text{لا}}{\text{ر}} + \text{م}\,\frac{\text{ما}}{\text{ر}} + \text{ن}\,\frac{\text{ے}}{\text{ر}}$$

پس ر فرس جم فہ = - فرس (ل لا + م ما + ن ے)

= - (لا فرلا + ما فرما + ے فری)

جہاں فرلا، فرما، فری، محوروں پر فرس کے ظِل ہیں۔ اس سے اُس کام کے لئے جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں ہوتا ہے ایک تحلیلی جملہ حاصل ہوتا ہے۔ تکمل کے ذریعہ ہم وہ کام معلوم کر سکتے ہیں جو کسی حرکت میں ہوا ہے۔

۱۱۹ — جاذبہ کے خلاف اجسام کے ایک نظام کو اٹھانے میں کام

(۱۵۳) **کام** — اگر کمیت ک کے ایک ذرہ کو ایک راستہ پر جو انتصابی (اوپر وار) سے زاویہ فہ بنائے فاصلہ فرس تک حرکت دی جائے تو کیا ہوا کام ک ج جم فہ فرس ہے چونکہ وہ فاصلہ جس میں سے ذرہ کو اُٹھایا گیا ہے فرس جم فہ ہے اِس لئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ کام جو ہوا وہ جسم کے وزن (ک ج) اور اُس ارتفاع کا حاصل ضرب ہے جس میں سے ذرہ کو اٹھایا گیا ہے۔

ذرہ کو کسی راستہ پر سے لیجانے اور راستہ کے متواتر عناصر پر جو کام ہوا ہے اِن کی مقداروں کو جمع کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوتا ہے وہ ذرہ کے وزن اور اُس کُل انتصابی فاصلہ کا حاصل ضرب ہوتا ہے جس میں سے ذرہ کو اُٹھایا گیا ہے۔

۱۲۰ — فرض کرو کہ ہم کمیتوں ک۱، ک۲، ک۳ ... کے متعدد ذروں کو حرکت دیتے ہیں۔ فرض کرو کہ حرکت سے قبل زمین کے اوپر اِن کے ارتفاع ف۱، ف۲، ف۳ ... ہیں اور حرکت کے ختم پر اِن کے ارتفاع فَ۱، فَ۲، فَ۳ ... ہیں۔ پہلے ذرہ پر جاذبہ ارض کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ ک۱ ج (فَ۱ - ف۱) ہے، ایسی تمام مقداروں کو جمع کرنے سے جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوا ہے وہ

= ک۱ ج (فَ۱ - ف۱) + ک۲ ج (فَ۲ - ف۲) + ...

= ج (Σ ک۱ فَ۱ - Σ ک۱ ف۱) .... (۳۵)

فرض کرو کہ ذروں کی مجموعی کمیت ک سے تعبیر ہوتی ہے۔ اور فرض کرو کہ تمام ذروں کے مرکز ثقل کا ارتفاع حرکت سے قبل ف اور حرکت کے بعد فَ ہے۔ اب دفعہ ۸۶ کے ضابطہ کی رُو سے

$$ف = \frac{\sum ک_۱ ف_۱}{\sum ک} = \frac{\sum ک_۱ ف_۱}{ک}$$

اِس لئے $\sum ک_۱ ف_۱ = ک\, ف$

اور اسی طرح $\sum ک_۱ فَ_۱ = ک\, فَ$

اس لئے کُل کام بموجب جملہ (۳۵)

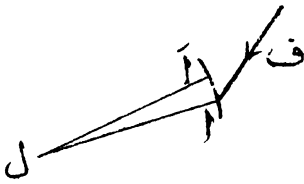
$$= ج\,(ک\, فَ - ک\, ف)$$

$$= ک\, ج\,(فَ - ف)$$

اِس طرح جاذبہ کے خلاف جو کُل کام ہوا وہ ذروں کے مجموعی وزن (۱۵۴) اور اُس انتصابی ارتفاع کا حاصل ضرب ہے جس میں سے ذروں کے مرکز ثقل کو اُٹھایا گیا ہے۔

کام جو ایک جفت کے خلاف انجام پائے

۱۲۱ ـ مسئلہ۔ اگر ایک اُستوار جسم کو جس پر قوتوں کا ایک نظام عمل کرتا ہے کسی محور کے گرد زاویہ صہ میں سے چھوٹی گردش دیجائے تو کام جو کیا گیا وہ گ صہ ہے جہاں گ اِس محور کے گرداں قوتوں کا معیار ہے جو حرکت میں مزاحم ہیں۔

فرض کرو کہ گردش کا محور وہ خط ہے جو صفحہ کے مستوی پر عمود ہے اور اِس سے نقطہ ا پر ملتا ہے۔ فرض کرو کہ نمونہ کی ایک قوت ف ہے جو جسم کے ذرہ ا پر عمل کرتی ہے۔ گردش کے بعد فرض کرو کہ ا کا محل اَ

ہو جاتا ہے اور اس لئے زاویہ
ا ل اَ، صہ کے مساوی ہے
کیونکہ یہ وہ زاویہ ہے جس میں سے
جسم کو گردش دی گئی ہے۔
اثنائے گردش میں قوت
ف کا نقطہ عمل ا سے اَ تک
حرکت کرتا ہے اور اس لئے جو کام
ہوا وہ

ف
اَ
ا
ل

شکل (۸۸)

= ف × ا اَ × جم فہ
جہاں فہ، ف اور ا اَ کا درمیانی زاویہ ہے،
= ا اَ × ف کا جزو ترکیبی سمت ا اَ پر
= صہ × ل ا × ف کا جزو ترکیبی سمت ا اَ پر
= صہ × ف کا معیار گردش کے محور کے گرد
اگر استوار جسم پر متعدد قوتیں عمل کریں جن کے نقاط عمل جسم کے مختلف ذرات ہوں تو عمل جمع سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ کل کام جو ہوا وہ
= صہ × گردش کے محور کے گرد ان تمام قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ
= گ صہ، جہاں گ گردش کے محور کے گرد تمام قوتوں کا معیار ہے۔

مثالیں

(۱۵۵)

۱۔ ایک شخص جس کا وزن ۱۴۰ پونڈ ہے ایک پہاڑی راستہ پر چڑھتا ہے جس کا میلان افق کے ساتھ ۳۰° ہے۔ اگر اس کے چڑھنے کی شرح ایک میل فی گھنٹہ ہو تو معلوم کرو کہ اس کو اپنا وزن اٹھانے میں کتنی اسپی طاقت سے کام کرنا پڑ رہا ہے۔

۲۔ ایک انجن، ۱۰۰۰ ٹن وزنی ٹرین کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی شرح سے ایک سطح مائل پر جس کا میلان ۲۰۰ میں ۱ ہے کھینچ رہا ہے۔ مزاحمت بوجہ رگڑ ٹرین کے وزن کا $\frac{1}{200}$ ہے۔ معلوم کرو کہ کس اسپی طاقت سے انجن کام کر رہا ہے۔

۳ — ایک آٹو موبیل، ایک ٹن وزنی، ایک پہاڑ پر جس کا میلان ۶۰ میں ۱ ہے ۸ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چڑھتی ہے — مزاحمت بوجہ رگڑ کو گاڑی کے وزن کا $\frac{1}{50}$ لیکر معلوم کرو کہ وہ کس شرح سے پہاڑ کے نیچے اُتر سکتی ہے، یہ فرض کرو کہ اسپی طاقت جو انجن میں پیدا ہوتی ہے وہی رہتی ہے —

۴ — پتھروں کے ایک بوجھ کو جس کا وزن ۱۸ ٹن ہے ایک ناؤ سے ایک گھاٹ پر جو ناؤ کے اوپر ۳۰ فٹ بلند ہے حمالوں (Cranes) کے ذریعہ اتارا گیا ہے جہاں حمالوں کو ایک انجن چلاتا ہے — اگر اتارنے میں تین گھنٹے صرف ہوں تو وہ اوسط اسپی طاقت معلوم کرو جس سے انجن کام کر رہا ہے —

۵ — یہ فرض کر کے کہ ایک آدمی چلتے وقت ہر قدم پر اپنے مرکز ثقل کو ایک انچ انتصابی فاصلہ میں سے اوپر اٹھاتا ہے معلوم کرو کہ وہ کتنی اسپی طاقت سے کام کرتا ہے اگر وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چلے اور اس کا قدم ۳۳ انچ اور اس کا وزن ۱۶۸ پونڈ ہو —

۶ — ایک سیکل سوار اور اس کی مشین کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہے اور وہ ایک چڑہائی پر جو ۸۰ میں ۱ ہے ۵ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چڑہتا ہے — اُس کی سیکل کی گیرائی ۷۲ انچ ہے اور کرینکوں کا طول ۷ انچ ہے — رکاب پر اس کے پاؤں کا اوسط انتصابی دباؤ معلوم کرو، یہ فرض کرو کہ یہ دباؤ صرف رکاب کی نیچے دار حرکت میں موجود رہتا ہے —

۷ — ایک جہاز کے انجن ۵۰۰۰ اسپی طاقت کے ہیں اور جب انجن پوری طاقت سے کام کرتے ہیں تو انجن ۷۵ گردشیں فی منٹ کرتا ہے — وہ جفت معلوم کرو جو دُھرے کے ذریعہ منتقل ہوتا ہے —

۸ — جب ایک جسم دوسرے پر لُڑھکتا ہے تو ایک جفت پیدا ہوتا ہے جو حرکت کی مزاحمت کرتا ہے، یہ جفت اُس جفت کے مساوی ہوتا ہے جو طول ل کے ایک بازو کے سرے پر عمادی تعامل پیدا کرتا ہے جہاں ل کو لُڑھکنی رگڑ کی قدر کہتے ہیں —

اگر ریل کا ایک ڈبہ نصف قطر ا کے پھیہ پر چلے تو ثابت کرو کہ اسکی حرکت میں لُڑھکنی رگڑ سے جو مزاحمت پیدا ہوگی وہ اس کے وزن کا $\frac{ل}{ا}$ گُنی ہے —

موہوم کام کا اصول

۱۲۲ــ چھوٹے ہٹاؤ سے فی الحال وہ حرکت مراد ہوگی جس میں ایک نظام کا ہر ذرہ اپنی ابتدائی مقام سے اتنے فاصلہ تک حرکت کرے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو ایک صغیر مقدار تصور کیا جا سکے اور اس کا مربع نظرانداز ہو سکے۔ اگر نظام قوتوں کے زیر عمل ہے تو کسی چھوٹے ہٹاؤ کی تکمیل میں کام انجام پائیگا۔ اب چونکہ ہٹاؤ کو ایک چھوٹی مقدار فرض کیا گیا ہے اس لیے جو کام ہوگا وہ بھی ایک چھوٹی مقدار کا ہوگا۔

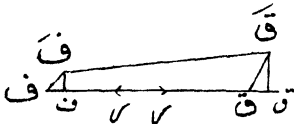
(۱۵۶) اگر کوئی ذرہ توازن میں ہے تو حاصل قوت جو اس پر عمل کرتی ہے معدوم ہوتی ہے اور اس لیے ذرہ کے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے وہ ہٹاؤ کے مقابلتاً اعلیٰ تر رتبہ کا ہونے کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے۔ اگر کوئی استوار جسم یا استوار اجسام یا ذروں کا کوئی نظام توازن میں ہے اور اگر اس میں کوئی چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا جائے تو چونکہ ہر ذرہ پر کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہے اس لیے کل کام صفر ہے۔

۱۲۳ــ کسی نظام کے ذروں پر عمل کرنے والی قوتوں کو حسب دفعہ ۵ دو جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے:

(ا) وہ قوتیں جو اجسام پر بیرونی جانب سے عمل کرتی ہیں،

(ب) اُن اعمال اور تعاملات کے زوج جو اجسام کے ذروں کے درمیان یا ایک دوسرے کو مس کرنے والے دو اجسام کے درمیان عمل کرتے ہیں۔ کسی چھوٹے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے اُس کو محسوب کرنے میں ہمیں اُس کام کو شمار کرنا چاہئے جو دونوں جماعتوں کی قوتوں کے خلاف انجام پاتا ہے لیکن ہم دیکھیں گے کہ دوسری جماعت کی قوتوں سے جو ارقام پیدا ہوتی ہیں اُن میں سے بیشتر ایک دوسرے کو خارج کرتی ہیں۔

۱۲۴ــ فرض کرو کہ اول ہم قوتوں کے اُس زوج پر غور کرتے ہیں جو ایک استوار جسم کے دو ذروں ف، ق کے درمیان عمل اور تعامل سے پیدا ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ

ہر قوت کی مقدار ر ہے اور اس کی سمت ق ف یا ف ق ہے بموجب اِس کے کہ وہ ف یا ق پر عمل کرتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ کا اثر یہ ہے کہ ف، ق علی الترتیب فَ، قَ تک حرکت کرتے ہیں اور فرض کرو کہ فَ، قَ سے ف ق پر عمود فَ ف اور قَ ق کھینچے گئے ہیں۔ اُس قوت ر کے خلاف جو ف پر عمل کرتی ہے جو کام ہوا وہ ر × ف ف ہے اور اُس قوت ر کے خلاف جو ق پر عمل کرتی ہے جو کام ہوا وہ ـ ر × ق ق ہے۔ اِس لئے کُل کام جو ہوا وہ

شکل (۸۹)

= ر (ف ف ـ ق ق)

= ر (ف ق ـ ف ق)

= ر (ف ق ـ فَ قَ کا ظل ف ق پر)

اب چونکہ جسم اُستوار ہے طول فَ قَ، طول ف ق کے مساوی ہے اور چونکہ بموجب فرض ہٹاؤ چھوٹا ہے اِس لئے فَ قَ کا ظل ف ق پر

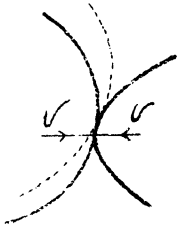
= فَ قَ، اِلّا رتبہ اول سے اعلیٰ تر رتبہ والی چھوٹی مقداروں کے

= ف ق

اِس لئے جو کام ہوا وہ صفر ہے۔

۱۲۵ — نیز وہ کام بھی صفر ہوتا ہے جو قوتوں کے اُس زوج کے خلاف انجام پاتا ہے جو دو چکنی سطحوں کے درمیان عمل اور تعامل پر مشتمل ہوتی ہیں۔ اول اُس صورت پر غور کرو جس میں ایک جسم ساکن ہے اور دوسرا اِس کی سطح پر پھسلتا ہے۔ ایسے ہٹاؤ میں اگر کوئی کام ہوا ہے تو وہ اِس تعامل کے خلاف ہے جو متحرک جسم پر عمل کرتا ہے۔ چونکہ قوت عماد پر عمل کرتی ہے

اور اس کے نقطۂ عمل کا مماس مستوی میں حرکت کرنا ضروری ہے یعنی عماد کے علی القوائم اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہے۔

وہ عام سے عام حرکت جو ان دو سطحوں کے لئے ممکن ہے وہ حرکتوں سے مرکب ہوتی ہے ایک اس قسم کی حرکت جو ابھی بیان کی گئی اور دوسری وہ حرکت جس میں یہ دو سطحیں ایک استوار جسم کے طور پر حرکت کرتی ہیں ہم ابھی دیکھ چکے ہیں کہ ہٹاؤ کے پہلے حصے میں جو کام ہوتا ہے وہ صفر ہے۔ ہٹاؤ کے دوسرے حصے میں جو کام ہوتا ہے وہ حسب دفعہ ۱۲۴ معدوم ہوتا ہے پس کل کام معدوم ہوتا ہے اور مطلوبہ نتیجہ ثابت ہے۔

شکل (۹۰)

۱۲۶ ــ نتائج بالادست نہیں ہوں گے اگر سطحوں کے درمیان تماس کھردرا ہو۔ ایسی صورت میں جو کام ہوتا ہے وہ رگڑ کی قوتوں کی مقدار پر منحصر ہوتا ہے اور چونکہ ان قوتوں کی مقدار معلوم کرنا اتنا ہی مشکل ہے جتنا پورے مسئلے کو حل کرنا اس لئے ایسی صورتوں میں موہوم کام کا طریقہ کوئی قدر نہیں رکھتا۔

۱۲۷ ــ ہم دیکھ چکے ہیں کہ قوتوں کی ایک بڑی تعداد کو اس کام کے محسوب کرنے میں جو ایک چھوٹے ہٹاؤ میں ہوتا ہے ترک کیا جا سکتا ہے اور موہوم کام کے اصول میں جس میں یہ بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی نظام توازن میں ہو تو کسی چھوٹے ہٹاؤ میں کئے ہوئے کام کی مقدار صفر ہوتی ہے صرف اس کام کو محسوب کرنے کی ضرورت ہے جو بیرونی قوتوں کے خلاف تکمیل پاتا ہے اور اس کام کو محسوب کرنے کی ضرورت نہیں جو استوار اجسام کے اعمال اور تعاملات کے خلاف انجام پائے۔

۱۲۸ ــ **چرخیوں کے نظام** ــ موہوم کام کے اصول کا ایک اہم

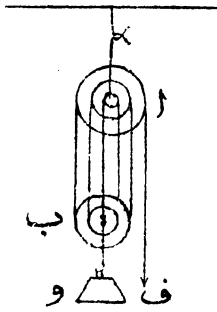
اطلاق حسبِ ذیل ہے : فرض کرو کہ چرخیوں اور نا امتداد پذیر رسیوں کی ایک ترتیب ہے جس میں رسیوں کے دو سرے آزاد ہیں ۔ اِن میں سے ایک سرا اُس وزن سے بندھا ہے جس کو اُٹھانا مقصود ہے اور دوسرے سرے پر طاقت لگائی جاتی ہے ۔ فرض کرو کہ رسی کے اِن دو آزاد سروں کو علی الترتیب (۱۵۸) وزن سرا اور طاقت سرا کہا گیا ہے اور فرض کرو کہ چرخیوں اور رسیوں کا یہ نظام ایسا ہے کہ وزن سرے کو ایک انچ کے فاصلہ میں سے حرکت دینے کے لئے طاقت سرے کو ن انچ کے فاصلہ میں سے حرکت دینا پڑتا ہے ۔ فرض کرو کہ وزن سرے سے ایک وزن و باندھا گیا ہے اور فرض کرو کہ یہ معلوم ہوا ہے کہ طاقت سرے پر قوت ف لگانے سے توازن پیدا ہوتا ہے ۔

اب ہمارے پاس دو قوتیں ف اور و توازن میں ہیں اِن میں رشتہ معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ ہم اِس نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کرتے ہیں ۔ چنانچہ فرض کرو کہ ہم وزن و کو فاصلہ فرس تک حرکت دیتے ہیں اب اگر رسی میں توسیع واقع نہ ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا چاہئیے کہ طاقت سرے ف نے فاصلہ ن فرس طے کیا ہے ۔ بیرونی قوت نے جو کام کیا ہے وہ صرف اُس کام پر مشتمل ہے جو رسی کے طاقت سرے پر انجام پایا ہے اور یہ کام ف ن فرس کے مساوی ہے ۔ جاذبہ کے خلاف وزن کو حرکت دینے میں جو کام ہوا ہے وہ و فرس ہے ۔ یہ کام مختلف العلامت ہیں اگر ہم وزن اٹھائیں تو و فرس کو مثبت لینا چاہئیے اور ف ن فرس کو منفی، اور اِس کے بالعکس ۔ اگر نظام ابتداً توازن میں تھا تو اِس چھوٹے ہٹاؤ میں بیرونی قوتوں نے جو کام مجموعی طور پر انجام دیا ہے وہ معدوم ہونا چاہئیے، اِس لئے توازن کی مساوات ہے

$$\text{و فرس} - \text{ف ن فرس} = ۰$$

اس لیے

$$\text{ف} = \frac{\text{و}}{\text{ن}}$$

جس سے طاقت اور وزن کے درمیان رشتہ معلوم ہوتا ہے ۔

شکل (۹۱)

اِس تحقیق میں ہم نے رگڑ وغیرہ کو نظر انداز کیا ہے اور نیز متحرک رسیوں اور چرخیوں کے اوزان کو بھی نظر انداز کردیا گیا ہے۔

چرخیوں کے نظام کی ایک مثال کے طور پر اُس ترتیب پر غور کرو جو شکل (۹۱) میں دکھائی گئی ہے۔

اِس میں چرخیوں کے دو قالب ا اور ب ہیں۔ اول الذکر ثابت ہے اور دوسرا جس سے وزن و لٹکایا گیا ہے حرکت پذیر ہے۔ رسی، طاقت سرے سے نکلتی ہے اور قالب ا کی ایک چرخی پر سے گذرتی ہے اور پھر قالب ب کی ایک چرخی پر سے گذرتی ہے اور علیٰ ہذا جتنی بھی چرخیاں ہوں ان پر سے ہوکر گذرتی جاتی ہے اور آخر میں اِس کے دوسرے سرے کو قالب ب سے باندھ دیا جاتا ہے۔ ف اور و کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لیے ہمیں صرف عدد ن معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ فرض کرو کہ رسی کے آزاد طاقت سرے کے علاوہ رسی کے انتصابی حصوں کی تعداد س ہے۔ اب اگر ہم طاقت سرے کو اسقدر کھینچیں کہ وزن پیرا ایک انچ اوپر اُٹھے تو اِن س حصوں میں سے ہر حصہ بقدر ایک انچ کے چھوٹا ہو جائے گا اور اِس لیے طاقت پیرا بقدر س انچ کے لمبا ہوگا۔ اِس لیے ن = س اور (۱۵۹)

اِس صورت میں ف = $\frac{\text{و}}{\text{س}}$ ۔

مثلاً نچلے قالب میں دو چرخیاں اور اوپر کے قالب میں تین چرخیاں ہوں تو ن کی قیمت ۵ ہوگی اور اس لیے طاقت کا ہر پونڈ وزن کے ۵ پونڈ سہاریگا چنانچہ کوئی شخص اگر طاقت سرے کو ۱۰۰ پونڈ کی قوت سے کھینچے تو وہ ۵۰۰ پونڈ کے وزن کو سہار سکے گا اور جوں ہی اس کی کھینچنے کی قوت ۱۰۰ پونڈ سے بڑھ جائیگی

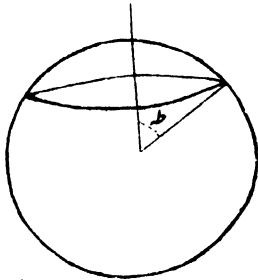
وہ ۵۰۰ پونڈ کا وزن اُٹھانے لگے گا۔

توضیحی امثلہ

ا۔ موہوم کام کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ فطری طول ا کی ایک بے سرا لچکدار ڈوری ہے جس کی لچک کا مقیاس لہ ہے اور جو نصف قطر ب کے ایک کرہ پر رکھی گئی ہے اور جاذبہ کے تحت تن جانے میں آزاد ہے۔

توازن کے محل میں توسیع کی مقدار بلاشبہ قوتوں کو تحلیل کرنے سے معلوم کی جا سکتی ہے لیکن اسے آسانی کے ساتھ موہوم کام کے طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ توازن میں ڈوری، زاویائی نصف قطر طہ کے ایک چھوٹے دائرہ پر واقع ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری کے محل میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس سے ڈوری کا ہر عنصر کرہ کی سطح پر نیچے کی جانب ہٹتا ہے چنانچہ ڈوری اب زاویائی نصف قطر طہ + فرطہ کا ایک نیا چھوٹا دائرہ بناتی ہے۔ ڈوری کا طول جبکہ وہ زاویہ طہ کا دائرہ بناتی تھی ۲ π ب جب طہ تھا، اِس میں اضافہ جبکہ طہ بدل کر

شکل (۹۲)

طہ + فرطہ ہوگیا فرطہ $\frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}}$ (۲ π ب جب طہ)

یا ۲ π ب جم طہ فرطہ ہے۔ ڈوری کو اسقدر وسیع کرنے میں جو کام ہوا وہ ت × ۲ π ب جم طہ فرطہ ہے

جہاں ت تناؤ ہے۔ کام، جاذبہ کی قوت کے خلاف (یا اِس مخصوص صورت میں جاذبہ کی قوت کی سمت میں) بھی انجام پایا ہے۔ ڈوری کے مرکز ثقل کا ارتفاع جبکہ وہ زاویہ طہ کا دائرہ بناتی تھی ب جم طہ ہے اور طہ کے طہ + فرطہ میں بدل جانے سے مرکز ثقل کے ارتفاع میں – ب جب طہ فرطہ کا اضافہ ہوتا ہے اور اس لیے جاذبہ کے خلاف کئے ہوئے کام کی مقدار – و ب جب طہ فرطہ

ہے ۔ اس طرح ہم نے چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پائے ہوئے کل کام کو محسوب کر لیا ہے ۔ موہوم کام کے اصول کی رو سے اِس کام کی مجموعی مقدار صفر ہونی چاہئے اور اسلیے

- و ب جب طہ فرطہ + ت × ۲ π ب جم طہ فرطہ = ۰

یعنی ت = و / ۲π مس طہ

اور تناؤ ت کے جواب میں ڈوری کا طول ہے

ا (۱ + ت / لہ)

اس لیے ا (۱ + و / ۲π لہ مس طہ) = ۲π ب جب طہ

اس مساوات سے طہ حاصل ہوتا ہے ۔

(۱۶۰) ۲ ۔ **سائیکل کی گیرائی** ۔ دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک سیکل کی میکانیت پر موہوم کام کا اصول استعمال کرتے ہیں ۔ فرض کرو کہ کرنیک کا طول ا ہے اور فرض کرو کہ سائیکل کی گیرائی ب انچ ہے چنانچہ رکابوں (Pedals) کی ہر گردش سے سیکل اتنے آگے حرکت کرتی ہے جتنی وہ قطر ب انچ کے پہیہ کی ایک گردش میں حرکت کرتی ۔ فرض کرو کہ ہمیں وہ دباؤ معلوم کرنا ہے جو سیکل سوار ایک رکاب پر ڈالتا ہے تاکہ سیکل رگڑ کی و پونڈ وزن کی مزاحم قوت کے خلاف حرکت کر سکے ۔

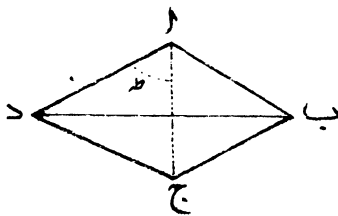
فرض کرو کہ سیکل میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس میں کرنیک ایک صغیر زاویہ صہ میں سے گھومتے ہیں اور پھیئے اور سیکل بھی اس کے ساتھ آگے حرکت کرتے ہیں ۔ چونکہ گیرائی ب انچ ہے اس لیے سیکل بہ حیثیت مجموعی ½ ب صہ انچ حرکت کرے گی اور رکاب کا طے شدہ فاصلہ خود سیکل کو حوالہ کا فریم لینے سے ا صہ ہوگا ۔ فرض کرو کہ وہ قوت ق پونڈ وزن کی ہے جو رکاب پر لگائی پڑتی ہے تاکہ سیکل عین حرکت کرنے کو ہو ۔ اس لئے سیکل رکاب پر عمل

کرنے والی اِس قوت اور و پونڈ کی مخالف قوت (جو رگڑ کی وجہ سے ہے) کے
کے تحت توازن میں ہے۔ اِس لیے توازن کی مساوات ہے

وَ × ا صہ − و × ½ ب صہ = ۰

اِس لئے مطلوبہ قوت ہے   وَ = ب / ۲ ا و

اِس طرح یہ قوت سیکل کی گیرائی کے راست متناسب اور کرنیک کے
طول کے بالعکس متناسب ہے۔

۳۔ وزن و اور طول ا کے چار مساوی ڈنڈوں کو آزادانہ جوڑ کر ایک مُعین اب ج د بنایا گیا ہے۔ یہ قالب ایک افقی میز پر اِستادہ ہے اِس طور پر کہ ج ا انتصابی ہے اور نقطوں ب، د کو ایک ہلکی نا امتداد پذیر ڈوری سے جس کا طول ا ہے ملایا گیا ہے تاکہ ڈنڈوں کی شکل برقرار رہے۔ اِس ڈوری کا تناؤ معلوم کرنا مقصود ہے۔

شکل (۹۳)

موہوم کام کے اصول سے تناؤ معلوم کرنے کے لیے بلا شُبہ ایک ایسا چھوٹا ہٹاؤ معلوم ہونا چاہئے کہ تناؤ کے خلاف کام انجام پائے ورنہ تناؤ مساواتوں میں بالکل شریک ہی نہ ہوگا۔ چونکہ ڈوری نا امتداد پذیر ہے اِس لئے فی الواقعی اِس کو وسیع کرنا ناممکن ہے اور اِس لئے اِس کے تناؤ کے خلاف کام کا حاصل ہونا ممکن نہیں ہے
لیکن ہم اِس کی نا امتداد پذیری کے باوجود اس کو وسیع شدہ خیال کر سکتے ہیں یا

ہم یہ کر سکتے ہیں کہ اس کی بجائے اسی طول اور اسی تناؤ کی ایک امتداد پذیر ڈوری رکھی ہوئی سمجھیں، صریحاً اس میں اور اول الذکر صورت میں کوئی فرق نہیں ہے ۔
فرض کرو کہ قالب میں ایسا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے کہ ا، ج کی جانب نیچے دار انتصاباً حرکت کرتا ہے اور ج ساکن رہتا ہے ۔ فرض کرو کہ یہ ہٹاؤ ایسا ہے کہ زاویہ د ا ج، طہ سے طہ + فرطہ ہو جاتا ہے ۔ زاویہ طہ کے جواب میں ڈوری کا طول ل مساوات

ل = ۲ ا جب طہ

سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو تفرق کرنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

فرل = ۲ ا جم طہ فرطہ

جس سے ل اور طہ کے اضافوں فرل، فرطہ کے درمیان ایک رشتہ ملتا ہے (۱۶۱)
اس ہٹاؤ میں ڈوری کے تناؤ (ت) کے خلاف جو کام ہوا وہ ت فرل ہے ۔
کل شکل کے مرکز ثقل کا ارتفاع (ابتداً) ج کے اوپر $\frac{1}{2}$ ا ج ہے یا ا جم طہ اور اس لئے حسب دفعہ ۱۲۰ جاذبہ کے خلاف جو کام ہوا وہ

۴ و فر (ا جم طہ)

ہے ۔ اس لئے اس ہٹاؤ میں بیرونی قوتوں نے مجموعی طور پر جو کام انجام دیا وہ

۴ و فر (ا جم طہ) + ت فرل

ہے یعنی فرل اور فر (ا جم طہ) کی قیمتیں درج کرنے سے کل کام جو ہوا وہ

-۴ و ا جب طہ فرطہ + ت × ۲ ا جم طہ فرطہ

ہے ۔ توازن کے لئے اس کو معدوم ہونا چاہئے، اسلئے

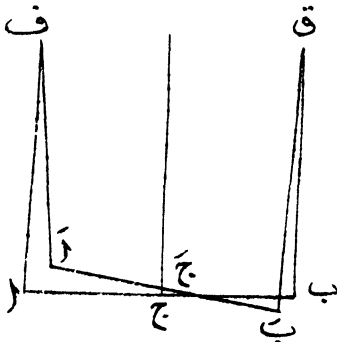
ت = ۲ و س طہ

جو مطلوبہ تناؤ ہے ۔

۴ ۔ طول ل اور وزن و کے ایک ڈنڈے کے سروں سے دو رسیاں جن میں سے ہر ایک کا طول ا ہے باندھی گئی ہیں اور ڈنڈے کو ان رسیوں کے ذریعہ دو نقطوں ف، ق سے جو ایک ہی

ارتفاع پر ہیں اور جن کے درمیان فاصلہ ل ہے لٹکایا گیا ہے
وہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈے کو ایسے محل میں رکھنے کے لئے
مطلوب ہے جو اس کے توازن کے محل سے زاویہ طہ بنائے۔

توازن کی حالت میں رسیاں انتصابی رہتی ہیں اور ڈنڈے کے سرے ا، ب، نقطوں ف، ق کے ٹھیک انتصاباً نیچے رہتے ہیں۔

جب ڈنڈے کو اس کے توازن کے محل سے گھمایا جاتا ہے تو ہم یہ خیال کرسکتے ہیں کہ اس کا وسطی نقطہ بتدریج اُس انتصابی خط پر چڑھتا ہے جو اسکے ابتدائی محل کے وسطی نقطہ میں سے گذرتا ہے۔ جب ڈنڈا کسی زاویہ طہ میں سے گھوم جائے تو فرض کرو کہ یہ نقطہ جس بلندی تک چڑھا ہے وہ لا ہے۔

شکل (۹۴)

طول ف اَ کا ظل انتصابی خط پر ا ـ لا ہوگا اور ف اَ کا ظل افقی خط پر اَ وَ کے افقی ظل کے مساوی ہونے کی وجہ سے، صریحاً ل جب $\frac{طہ}{2}$ ہوگا۔

اب چونکہ ہٹی ہوئی رسی ف اَ کا طول اپنی ابتدائی قیمت ا کے مساوی رہتا ہے اس لئے

$$ا^2 = (ا - لا)^2 + ل^2 \,\text{جب}^2 \frac{طہ}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب وہ جفت معلوم کرنے کے لئے جو ڈنڈے کو زاویہ طہ پر رکھتا ہے فرض کرو کہ ڈنڈا اِس محل میں جفت گ کے زیر عمل ہے اور ایک چھوٹا ہٹاؤ واقع ہوتا ہے جس میں طہ بدل کر طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ جفت کے خلاف جو کام ہوا وہ حسب دفعہ ۱۲۱، ـ گ فرطہ کے مساوی ہے جہاں منفی علامت

اِس وجہ سے لی گئی ہے کہ جفت حرکت میں مزاحم ہونے کی بجائے اِس کی مدد کرتا ہے۔
جاذبہ کے خلاف جو کام ہوا ہے وہ و فرلا ہے۔ اِس لئے توازن کی مساوات ہے

$$-\text{گ فرطہ} + \text{و فرلا} = ۰$$

(۱۶۲) فرلا اور فرطہ کے درمیان رشتہ معلوم کرنے کے لئے ہم مساوات (ل) کو تفرق کر کے حاصل کرتے ہیں

$$-۲(\text{ا} - \text{لا})\,\text{فرلا} + \text{ل}^۲ \text{ جب } \frac{\text{طہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{طہ}}{۲}\,\text{فرطہ} = ۰$$

اس لئے

$$\text{گ} = \text{و}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}}$$

$$= \frac{\text{و ل}^۲ \text{ جب } \frac{\text{طہ}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{طہ}}{۲}}{۲(\text{ا} - \text{لا})}$$

$$= \frac{\text{و ل}^۲ \text{ جب طہ}}{۴\sqrt{\text{ا}^۲ - \text{ل}^۲ \text{ جب}^۲ \frac{\text{طہ}}{۲}}}$$

جس سے مطلوبہ جفت معلوم ہوتا ہے۔

مثالیں

۱۔ چار مساوی ڈنڈوں کو آزادانہ حرکت پذیر قبضوں کے ذریعہ جوڑ کر ایک مربع ا ب ج د بنایا گیا ہے۔ نقطوں ا اور ج کو ایک لچکدار ڈوری سے جس کا طبعی طول مربع کے ایک وتر کے مساوی ہے اور جس کا مقیاس لہ ہے ملایا گیا ہے۔ نقطوں ب اور د پر کتنی قوتیں لگانی چاہئیں کہ ڈوری تن کر اپنے طول کا $۱\frac{۱}{۴}$ گنا ہو جائے۔

۲۔ نصف قطر ا اور وزن و کے تین مساوی کروں کو ایک نقطہ ف سے طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی لچکدار ڈوریوں کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ کرے آزادانہ لٹک رہے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ف کے نیچے اِن کے مرکزوں کی گہرائی معلوم کرو۔

۳ ۔ ایک جاپانی چھتری کی میکانیت جس سے چھتری کھلتی ہے ایسی ہے کہ جب پھسلنے والے جزو کو وسطی لکڑی پر چڑھایا جاتا ہے تو چڑھاؤ کے ہر انچ کے جواب میں چھتری کی ہر کاڑی ۵° کے زاویہ میں سے گردش کرتی ہے ۔ اگر چھتری میں ۱۸ کاڑیاں ہوں جن میں سے ہر ایک کا وزن ½ اونس ہو اور ان کے مراکز ثقل سہاروں سے ۱۰ انچ کے فاصلہ پر ہوں تو معلوم کرو کہ پھسلنے والے جزو کو کس قوت سے اوپر اُٹھانا چاہیئے کہ چھتری کھل جائے جبکہ وسطی لکڑی انتصابی رہے اور کاڑیاں اس کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بنائیں ۔

۴ ۔ ایک گھڑی کی سوئیوں کو اوزان معادلہ کے ذریعہ متوازن کیا گیا ہے تاکہ وہ کسی محل میں توازن کی حالت میں رہ سکیں ۔ جب گھڑی میں وقت ۱۰ ا ۵ ہوتا ہے تو ایک پرندہ جس کا وزن و ہے منٹ کی سوئی پر اس کے ایک نقطہ سے جس کا فاصلہ سہارے سے ۶ فٹ ہے آکر لٹکتا ہے ۔ گھنٹہ کی سوئی پر کتنی بڑی انتصابی دھکیل کی قوت سہارے سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر لگانی چاہیئے کہ توازن برقرار ہو ۔

۵ ۔ ایک گھڑی کو کوک دینے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ اُس کام کے مساوی ہے جو ۲۰ پونڈ کے ایک وزن کو ۳ فٹ انتصاباً اوپر اٹھانے میں کرنا پڑتا ہے اور کوک دینے کے بعد گھڑی ۳۰ گھنٹوں تک چلتی ہے ۔ گھڑی کا رقاص اور حرکت پر قابو رکھنے والا پرزہ جدا کر لئے گئے ہیں جس کی وجہ سے گھڑی کی سوئیاں بسرعت تمام گھومنے لگیں گی اگر انہیں مضبوط نہ پکڑ لیا جائے ۔ منٹ کی سوئی پر کتنا بڑا جفت لگانا چاہیئے کہ یہ وقوع پذیر نہ ہونے پائے ۔

۶ ۔ ریل کے دو ڈبوں کو جوڑنے کے لیے یہ انتظام ہے کہ ان کے درمیان ایک ڈنڈا ہوتا ہے جس کے مخالف سروں پر راست دستی اور چپ دستی پیچ کٹے ہوئے ہوتے ہیں اور ڈنڈا ڈبوں میں پیوست کردہ ڈبہریوں کے اندر گھوم سکتا ہے ۔ اگر ہر پیچ کی گھائی ایک انچ ہو اور ڈنڈے کو ۵۶ پونڈ کی ایک ایسی قوت سے گھمایا جائے جو ۱۵ انچ لمبے بیرم کے سرے پر پورے فائدہ کے ساتھ عمل میں لائی گئی ہے تو وہ قوت معلوم کرو جس سے ڈبے ایک دوسرے کی جانب کھینچتے ہیں ۔

توانائی بالقوہ

۱۲۹۔ یہ معلوم ہو چکا ہوگا کہ ہمیں کام کی دو قسموں سے واسطہ رہتا ہے۔ ایک قسم وہ ہے جس کی مثال وہ کام ہے جو جاذبہ ارض کے خلاف انجام پاتا ہے اور دوسری وہ ہے جس کی مثال وہ کام ہے جو ایک ٹرین کو ہموار سڑک پر کھینچنے میں رگڑ کے خلاف ہوتا ہے۔ اِن دو قسموں کے درمیان اصلی فرق یہ ہے کہ قسم اول کا کام اجسام کے نظام سے خود ان اجسام سے حیلی کام لیکر واپس وصول کیا جا سکتا ہے لیکن دوسری قسم کا کام جب ایک دفعہ صرف ہو چکتا ہے تو پھر کبھی حاصل نہیں ہو سکتا۔ وزن اٹھانے میں کام صرف کرنے کی بجائے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہم کام کو بطور ذخیرہ جسم میں جمع کر رہے ہیں کیونکہ وزن کو اٹھانے میں جو کام انجام پایا ہے اس کو کسی وقت بھی وزن سے واپس وصول کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ اگر ہم وزن و کو فاصلہ ف میں سے اٹھائیں تو وزن پر جو کام ہوا ہے وہ و ف ہے، اب اگر اس کو اپنے ابتدائی مقام پر واپس ہونے کے لئے چھوڑ دیں تو وہ ہمارے لئے جو کام کرے گا وہ و ف ہوگا، اس لئے وزن پر کل کام جو انجام پایا وہ صفر کے مساوی ہے۔

برخلاف اس کے کسی کمیت کو رگڑ کی قوت ف کے خلاف فاصلہ س تک کھینچنے میں جو کام انجام پاتا ہے وہ ف س ہے۔ اِس کمیت کو اپنے ابتدائی مقام پر واپس لانے کے لیے جو کام کرنا پڑتا ہے اس کی مقدار بھی ف س ہے اور اس لئے کل کام جو انجام پایا ۲ ف س ہے۔ اِس سے اُس فرق کی توضیح ہوتی ہے جو کام کی اِن دو قسموں میں اور قوتوں کے اُن دو نظامات میں ہے جن کے خلاف کام انجام پاتا ہے۔

۱۳۰۔ تعریف۔ جب اجسام کے کسی نظام پر عمل کرنے والی قوتیں اِس نوعیت کی ہوں کہ وہ کل کام (جبری طور پر محسوب کردہ)

جو ہٹاؤں کے کسی سلسلے میں سے نظام کو اپنے ابتدائی تشکیل پر واپس لانے میں انجام پاتا ہے صفر ہو تو قوتوں کے ایسے نظام کو تحفظی نظام کہتے ہیں ۔

چونکہ کام کا جبری مجموعہ صفر ہے اس لئے نظام کو کسی تشکیل پر لیجانے میں جو کام ہوتا ہے وہ اُس کام کے مساوی لیکن علامت میں مختلف ہوتا ہے جو نظام کو اپنی ابتدائی تشکیل پر واپس ہونے کے لیے چھوڑ دینے میں انجام پاتا ہے ۔ اِس لئے کام گویا نظام میں بطور ذخیرہ جمع رہتا ہے یعنی ضائع نہیں ہوتا ۔

(۱۶۴) تھوڑے سے غور سے معلوم ہوگا کہ قوتوں کا کوئی نظام تحفظی ہوگا اگر صرف وہ قوتیں جو ذیل میں درج ہیں ایک یا زیادہ عمل کر رہی ہوں :-

(ا) جاذبہ ارض،

(ب) تعاملات جن میں تماس کامل طور پر چکنا ہو،

(ج) ڈوریوں کے تناؤ خواہ ڈوریاں امتداد پذیر ہوں یا ناامتداد پذیر۔

برخلاف اس کے اگر حسب ذیل نمونوں کی قوتیں ایک یا زیادہ عمل کر رہی ہوں (اِس طور پر کہ اِن کے خلاف کام انجام پائے) تو قوتوں کا نظام غیر تحفظی ہوگا :-

(ا) تعاملات جن میں تماس کھُردرا ہو،

(ب) ہوا کی مزاحمت ۔

۱۳۱ ـ مسئلہ ـ اگر اجسام کے ایک نظام پر تحفظی قوتیں عمل کریں اور اِن قوتوں کے خلاف اِس نظام کو ایک تشکیل ف سے دوسری تشکیل ق تک حرکت دی جائے تو نظام پر جو کام ہوتا ہے وہ اُن تشکیلوں پر منحصر نہیں ہوتا جن میں سے نظام

ف سے ق تک گذرنے میں حرکت کرتا ہے۔

اِس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ تشکیلوں کے ایک سلسلہ میں سے حرکت کرتے ہوئے ف تا ق گذرنے میں جو کام ہوا ہے وہ ک۱ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ کسی دوسرے سلسلے میں سے گذرنے میں جو کام ہوا ہے وہ ک۲ سے تعبیر کیا گیا ہے اور کسی تیسرے سلسلہ میں سے گذرنے میں جو کام ہوا ہے وہ ک۳ سے تعبیر کیا گیا ہے۔ اگر ہم ف سے ق تک پہلے سلسلہ کے ذریعہ گذریں اور ق سے ف تک تیسرے سلسلہ کے ذریعہ واپس ہوں تو کل کام جو انجام پایا صفر ہے اور اِس لئے

ق

۱ ۲ ۳

ف

شکل (۹۵)

$$ک_۱ + ک_۳ = ۰$$

نیز اسی طرح اگر ہم ف سے ق تک دوسرے سلسلہ کے ذریعہ گذریں اور ق سے ف تک تیسرے سلسلہ کے ذریعہ واپس ہوں تو

$$ک_۲ + ک_۳ = ۰$$

اِس لئے ک۱ = ک۲ جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۳۲۔ تعریف۔ اگر کسی تشکیل ف کو معیار کے طور پر لیا جائے تو اجسام کے کسی نظام کو تشکیل ف سے تشکیل ق تک حرکت دینے میں جو کام انجام پاتا ہے اِس کو تشکیل ق کی توانائی بالقوہ کہتے ہیں۔

(۱۶۵) اِس لئے توانائی بالقوہ اُس کام کی پیمائش کرتی ہے جو نظام کو تشکیل ق میں لاکر رکھنے میں جمع ہوا ہے۔

مسئلہ۔ کسی نظام کو تشکیل (۱) سے تحفظی قوتوں کے خلاف تشکیل (۲) تک حرکت دینے میں جو کام ہوتا ہے وہ $ک_۲ - ک_۱$ ہے جہاں $ک_۱$ تشکیل (۱) کی توانائی بالقوہ اور $ک_۲$ تشکیل (۲) کی توانائی بالقوہ ہے۔

کیونکہ اگر ف معیاری تشکیل ہے تو ف تا (۱) جو کام ہوا وہ $ک_۱$ ہے' ف تا (۱) جمع (۱) تا (۲) جو کام ہوا وہ $ک_۲$ ہے' اس لئے (۱) تا (۲) جو کام ہوا وہ $ک_۲ - ک_۱$ ہے۔

۲۳۱۔ مسئلہ۔ اگر اجسام کا ایک نظام' توانائی بالقوہ ک کی تشکیل میں ہو اور اگر کسی ذرہ کے محدد لا' ما' ی ہوں تو ذرہ پر عمل کرنے والی حاصل قوت کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہوتے ہیں:

$$-\frac{جف ک}{جف لا} ، -\frac{جف ک}{جف ما} ، -\frac{جف ک}{جف ی}$$

اِس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے جس کی وجہ سے لا' ما' ی پر کا ذرہ محور لا کے متوازی فاصلہ فرلا تک حرکت کرتا ہے۔ اگر اس ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا' ما' ے ہوں تو ہٹاؤ میں جو کام ہوا ہے وہ حسب دفعہ ۱۱۸' - لا فرلا کے مساوی ہے۔ یہ کام توانائی بالقوہ کے اضافے کے مساوی بھی ہے یعنی $\frac{جف ک}{جف لا}$ فرلا کے' اِس لئے

$$-لا\ فرلا = \frac{جف ک}{جف لا} فرلا$$

اس لئے $لا = -\frac{جف ک}{جف لا}$ اور اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{ما} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}}\text{، ے} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}}$$

۱۳۴ — مسئلہ۔ اگر اجسام کا ایک نظام، توانائی بالقوہ ک کی تشکیل میں ہو اور اگر طہ وہ زاویہ ہو جس سے نظام کے ایک استوار جسم کا محل کسی خط کے گرد حاصل ہوتا ہے تو استوار جسم پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اِس خط کے گرد (جبکہ اُس کو مثبت شمار کیا گیا ہو اگر گردش کا میلان طہ کی بڑھتی ہوئی سمت میں ہے) حسب ذیل ہے:

$$-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}$$

(۱۶۶) کیونکہ فرض کرو کہ ہم جسم میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کرتے ہیں جس کی وجہ سے زیر بحث جسم منتخبہ خط کے گرد مزید زاویہ فرطہ میں سے گھوم جاتا ہے اور اس لئے طہ بدل کر طہ + فرطہ ہو جاتا ہے۔ توانائی بالقوہ کا اضافہ $\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}$ فرطہ ہے اور کام جو انجام پایا وہ دفعہ ۱۲۱ کے مسئلہ کی رُو سے۔ گ فرطہ کے مساوی ہے جہاں گ، محور کے گرد ان سب قوتوں کا معیار ہے جو جسم پر عمل کرتی ہیں۔ اس لئے

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}\ \text{فرطہ} = -\text{گ فرطہ}$$

اس لئے
$$\text{گ} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}}$$

جو مطلوبہ نتیجہ ہے۔

۱۳۵ — مسئلہ۔ اگر اجسام کا کوئی نظام توازن کے محل میں ہے تو توانائی بالقوہ ک، یا تو اعظم ہوگی یا اقل۔

توانائی بالقوہ اُن تمام ذروں کے محددوں کا تفاعل ہے جن سے اجسام کا نظام ترکیب یافتہ ہے، فرض کرو کہ ان ذروں کے محدد حسب ذیل ہیں :

$$\text{لا}_1،\ \text{ما}_1،\ \text{ی}_1؛\ \text{لا}_2،\ \text{ما}_2،\ \text{ی}_2؛\ \text{وغیرہ}$$

اگر نظام توازن کی حالت میں ہے تو ہر ذرہ توازن میں ہے اور اسلئے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی حسب دفعہ ۳۳ جداگانہ معدوم ہوتے ہیں۔ اس کے لئے حسب دفعہ ۱۳۳ شرط ہے

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1} = ۰،\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1} = ۰،\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1} = ۰،$$

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_2} = ۰،\ \text{وغیرہ}$$

لیکن یہ ٹھیک وہی شرطیں ہیں جن کے پورا ہونے پر ک اعظم ہوتا ہے یا اقل

۱۳۶ — اس مسئلہ کا عکس بھی درست ہے۔

مسئلہ — اگر اجسام کے کسی نظام کی توانائی بالقوہ کسی تشکیل میں اعظم یا اقل ہو تو یہ تشکیل توازن کی ہوگی۔

کیونکہ دفعہ گذشتہ کی ترقیم اختیار کی جائے اور اگر ک اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1} = ۰،\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1} = ۰،\quad \frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1} = ۰$$

چونکہ $-\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}_1}،\ -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ما}_1}،\ -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف ی}_1}،$ اُس قوت کے اجزائے ترکیبی ہیں جو ذرہ (۱) پر عمل کرتی ہے اس لیے اوپر کی مساواتوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ذرہ توازن میں ہے۔ اسی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ دوسرے ذرے بھی توازن میں ہیں چنانچہ مسئلہ ثابت ہو چکا۔ (۱۶۷)

۱۳۷ — ان مسئلوں کی ایک خاص اہم صورت اُس وقت پیدا ہوتی ہے

جبکہ کسی ہٹاؤ میں کام انجام دینے والی قوتیں صرف اُن اجسام کے اوزان ہوں جن سے نظام ترکیب یافتہ ہے۔ اگر کُل نظام کی کمیت ک ہو اور کسی معیاری افقی مُستوی کے اوپر اِس کے مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہو تو توانائی بالقوہ حسب دفعہ ۳ک ج ف ہوگی اور وہ اعظم یا اقل ہوگی بموجب اس کے کہ ف اعظم یا اقل ہو۔ اِس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

اگر اجسام کے کسی نظام میں وہ قوتیں جو ہٹاؤ میں کام انجام دیتی ہیں صرف جاذبہ کی قوتیں ہوں تو اس نظام کے توازن کی تشکیلات وہ ہوں گی جنمیں مرکز ثقل کا ارتفاع اعظم یا اقل ہوگا۔

مثالیں

۱۔ دو یکساں ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول ل ہے سروں پر آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ اِن کو نصف قطر ا کے ایک چکنے اسطوانے پر رکھا گیا ہے جس کا محور افقی ہے۔ وہ زاویہ معلوم کرو جو ڈنڈے اُفق سے بناتے ہیں جبکہ وہ توازن میں ہوں۔

۲۔ ایک ناقصی قرص کو اِس طور پر وزنی بنایا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل اِس کے مرکز اور اِس کے محور اعظم کے ایک سرے کے درمیان وسط میں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اِس کا خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ سے بڑا ہو تو توازن کے چار محل ہوں گے جن میں قرص ایک اُفقی مُستوی پر انتصاباً کھڑا ہوگا لیکن اگر خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ سے بڑا نہ ہو تو توازن کے صرف دو محل ہوں گے۔

۳۔ وزن و کا ایک ڈنڈا افقی ہے اِس کو مرکز ثقل تک ایک ثابت انتصابی پیچ سے جس کے گرد وہ گردش کرتا ہے، چھیدا گیا ہے۔ ایک گردش سے ڈنڈا بقدر $\frac{1}{2}$ انچ کے اوپر اٹھتا یا نیچے اُترتا ہے۔ اگر رگڑ نہ ہو تو وہ جفت معلوم کرو جو اس کو ساکن رکھنے کے لیے مطلوب ہے۔

۴۔ وزن و کا ایک ڈاٹ مخروط مضلع کی شکل کا ہے جس کی عمودی تراش

مربع ہے ۔ اِس کو ضلع ج کے ایک مربع سوراخ میں اِس طرح رکھا گیا ہے کہ اِس کا محور انتصابی ہے اور اِس محل میں اِس کے راس کی گہرائی تماس کے مستوی کے نیچے گ ہے ۔ وہ جفت معلوم کرو جو اِس کو زاویہ ط میں سے گھما ہوا رکھنے کے لیے مطلوب ہے دراں حالیکہ اِس کا محور انتصابی ہی رہے ۔

۵ ۔ ایک چکنے مکافی تار کو انتصابی محور کے ساتھ رکھا گیا ہے ۔ اِس میں دو منکے پروئے گئے ہیں جن کو ایک ڈوری مربوط کرتی ہے جو ماسکہ پر کے ایک حلقہ میں سے گذرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن کے محلوں کی تعداد لاتناہی ہے ۔

۶ ۔ ایک چکنا پیالہ ناقص نما کی شکل کا ہے ۔ اِس کے نیم محور ا، ب، ج ہیں اور ایک محور انتصابی ہے ۔ وہ جفت معلوم کرو جو طول ل کے ایک ڈنڈے کو پیالے کے اندر افقی محل میں رکھنے کے لیے جو توازن کے محل سے زاویہ ط بنائے مطلوب ہے ۔

توانائی بالحرکت

(۱۶۸)

۱۲۸ ۔ فرض کرو کہ ایک متحرک ذرہ پر ایک قوت عمل کرتی ہے جس کی سمت ذرہ کی حرکت کی سمت کے مخالف ہے ۔ اِس قوت کا اثر حرکت کے دوسرے قانون کی بموجب یہ ہوگا کہ ذرہ کی رفتار میں ابطا پیدا ہوگا ۔ ذرہ کی رفتار گھٹتی جائے گی جب تک کہ قوت عمل کرے گی اور اگر قوت کافی وقت تک عمل کرنا جاری رکھے تو ذرہ کو آخرالامر ساکن ہو جانا چاہیئے ۔

مثلاً ایک کیلے پر غور کرو جس کو ہتھوڑی سے ایک تختہ میں ٹھونکا جا رہا ہے ہتھوڑی اور کیلے کے درمیان تعامل ایک قوت ہے جس کی سمت ہتھوڑی کی حرکت کی سمت کے مخالف ہے اور یہ قوت آخرالامر ہتھوڑی کو ساکن کر دیتی ہے ۔ نیز جب کسی ذرہ کو اوپر وار انتصاباً پھینکا جاتا ہے تو اس کا وزن کچھ وقفہ کے بعد اِس کو بالآخر ساکن کرتا ہے جس کے بعد وہ زمین پر واپس گرتا ہے ۔

اُس اثنا میں جس میں متحرک جسم قوت کے عمل سے ساکن ہو جاتا ہے قوت کا نقطۂ عمل جو متحرک جسم کے ساتھ حرکت کر چکا ہے کوئی فاصلہ طے کر چکا ہوگا

اِس لیے متحرک جسم نے کچھ کام کیا ہے۔ پس ہم جسم کی حرکت کے تخیل پر پہنچتے ہیں جس میں کام کرنے کی قابلیت ہے۔

مثلاً پچھلی مثالوں میں ہتھوڑی کی حرکت نے کیلے کو تختہ میں گاڑدیا اور ذرہ کی حرکت نے جس کو ہوا میں اُچھالا گیا تھا ذرہ کو زمین کی سطح کے اوپر کچھ بلندی تک اُٹھایا۔

۱۳۹ — فرض کرو کہ ایک ذرہ رفتار و سے حرکت کر رہا ہے اور اس کی حرکت میں ایک قوت ف (مطلق اکائیوں میں) مزاحم ہے جو ذرہ کی حرکت کی سمت کی مخالف سمت میں عمل کر رہی ہے۔ فرض کرو کہ اِس قوت کے خلاف ذرہ نے فاصلہ فرس وقت فرت میں طے کیا ہے اور فرض کرو کہ اِس وقفہ میں اس کی رفتار و سے بدل کر و - فرو ہو گئی ہے۔ اب، ذرہ اپنی حرکت کی سمت میں $\frac{فرو}{فرت}$ کا ابطاء رکھتا ہے یعنے $\frac{فرو}{فرت}$ کا اسراع اُس سمت میں جس میں قوت ف عمل کر رہی ہے، اِس لیے حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے

$$ف = ک \frac{فرو}{فرت}$$

(۱۶۹) اِس لیے ذرہ نے قوت ف کے خلاف فاصلہ فرس طے کرنے میں جو کام کیا ہے وہ حسب ذیل ہے:

$$ف\ فرس = ک \frac{فرو}{فرت} فرس$$

یا چونکہ $\frac{فرس}{فرت}$ وہی ہے جو ذرہ کی رفتار ہے اِسلیے

$$ف\ فرس = ک\ و\ فرو$$

تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ کا کل کام ساکن ہونے سے پیشتر حسب ذیل ہے:

$$\int ف\ فرس = \frac{۱}{۲} ک\ و^{۲} \quad ....(۳۶)$$

چونکہ قوت ف کو مطلق اکائیوں میں پیمائش کیا گیا ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے (دفعہ ۱۱۱) کہ کام $\frac{1}{2}$ ک و^2 کی پیمائش بھی مطلق اکائیوں میں ہوتی ہے اس لیے اس قوت کی مقدار خواہ کچھ ہی ہو جو ذرہ کی حرکت میں مزاحم ہے ذرہ نے ساکن ہونے سے پیشتر جو کام کیا ہے وہ وہی رہتا ہے یعنے $\frac{1}{2}$ ک و^2 کام کی مطلق اکائیاں۔

مقدار $\frac{1}{2}$ ک و^2 (مطلق اکائیوں میں پیمائش کردہ) کو متحرک ذرہ کی توانائی بالحرکت کہتے ہیں۔ یہ اس کام کی مقدار کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ ساکن ہونے سے پیشتر انجام دیسکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ وہ مزاحمت جو کیلے کو تختہ میں نصب کرنے میں پیش ہوتی ہے ۵۰۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے یعنی ۵۰۰ پونڈ کا وزن کیلے کو تختہ میں دبانے کے لئے مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ اس کو تختہ میں ہتھوڑی سے مار کر گھسایا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ہتھوڑی کا سرا ۱۰ پونڈ وزنی ہے اور اس کی ہر ضرب کیلے پر ۵۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پڑتی ہے۔ فرض کرو کہ ہر ضرب پر کیلا تختہ میں فاصلہ س تک (فٹوں میں پیمائش کردہ) گھستا ہے۔ تب ہتھوڑی نے ہر ضرب پر جو کام انجام دیا ہے وہ اس کام کے مساوی ہے جو ۵۰۰ پونڈ وزن۔ یا ۵۰۰ × ج پونڈل۔ کی ایک قوت کو فاصلہ س میں سے حرکت دینے میں ہوتا ہے۔ اس لیے یہ کام ۵۰۰ فٹ پونڈلوں کے مساوی ہے۔ ہتھوڑی کی توانائی بالحرکت ہے

$$\frac{1}{2}\text{ک و}^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 50^2 = 12500,$$

مطلق فٹ پاؤنڈ ثانیہ اکائیوں میں۔ اس لیے رشتہ (۳۶) کی رو سے

$$500\ \text{ج س} = 12500$$

جس میں چونکہ اکائیاں فٹ پونڈ ثانیہ ہیں اس لیے ج = ۳۲ لیا جا سکتا ہے اور اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{س} = \frac{25}{320}\ \text{فٹ} = \frac{15}{16}\ \text{انچ}$$

(۱۷۰) **۱۴۰ — مسئلہ۔ اگر قوتوں کے کسی نظام کے تحت ایک ذرہ حرکت کرے تو اس کی حرکت کی اثناء میں توانائی بالحرکت کا اضافہ اس کل کام کے مساوی ہوتا ہے جو ذرہ پر بیرونی عوامل کرتے ہیں۔**

فرض کرو کہ ہم ایک محل ف سے دوسرے محل ق تک ذرہ کی حرکت پر غور کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ان نقطوں پر ذرہ کی رفتاریں علی الترتیب $\text{و}_{\text{ف}}$ اور $\text{و}_{\text{ق}}$ ہیں۔

فرض کرو کہ ہم اس راستہ کے کسی عنصر فرس کا امتحان کرتے ہیں اور فرض کرو کہ اس عنصر کے آغاز اور اختتام پر ذرہ کی رفتاریں و اور و + فرو ہیں۔ فرض کرو کہ ف وہ قوت یا قوت کا جزو ترکیبی ہے جو سمت فرس میں ذرہ پر عمل کرتی ہے جبکہ وہ اپنے راستہ کا عنصر فرس مرتسم کرتا ہے۔ اگر راستہ کے اس وقفہ کے مرتسم کرنے میں وقت فرت صرف ہو تو اسراع $\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$ ہے اور چونکہ حرکت کی سمت میں عمل کرنے والی قوت ف ہے اس لیے حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے

$$\text{ف} = \text{ک}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}$$

اس لیے حسب دفعہ ۱۳۹

$$\text{ف فرس} = \text{ک}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرت}}\,\text{فرس}$$

$$= \text{ک}\,\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\,\text{فرو}$$

$$= \text{ک و فرو}$$

ف سے ق تک پورے راستہ پر تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\int_{ف}^{ق} ف \, فرس = ک \int_{ف}^{ق} و \, فرو = \frac{1}{2} ک \, و_{ق}^{2} - \frac{1}{2} ک \, و_{ف}^{2} \quad \ldots (۳۷)$$

= توانائی بالحرکت میں اضافہ

اِس مساوات کی دائیں جانب کا جملہ اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو ذرہ پر ہوا ہے اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ ثابت ہو چکا۔

۱۴۱ — بیرونی قوتوں نے ذرہ پر جو کام کیا ہے اُس کو منفی علامت کے ساتھ اُس کام کے مساوی تصور کیا جا سکتا ہے جو ذرہ بیرونی قوتوں پر کرتا ہے کیونکہ اگر ف وہ قوت ہے جو ذرہ پر بسمت فرس میں عمل کرتی ہے تو عمل اور تعامل کی مساویت سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ بیرونی عوامل پر ذرہ سے عمل کرنے والی قوت ـ ف ہے اور اس لیے ذرہ نے کل کام ـ ف فرس (۱۷۱) کیا ہے ـ اس لیے مسئلہ کو حسب ذیل متبادل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:

قوتوں کے کسی نظام کے تحت ذرہ کی حرکت کی اثنا میں توانائی بالحرکت کی تخفیف اُس کُل کام کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ بیرونی عوامل کے خلاف انجام دیتا ہے۔

۱۴۲ — اگر ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا نظام بقائی نظام ہو تو ـ $\int_{ف}^{ق}$ ف فرس کی یعنے بیرونی عوامل پر ذرہ کے کل کام کی قیمت حسب دفعہ ۱۳۲ $ک_{ق} - ک_{ف}$ کے مساوی ہے۔ پس مساوات (۳۷) ہو جاتی ہے

$$ک_{ق} - ک_{ف} + \frac{1}{2} ک \left(و_{ق}^{2} - و_{ف}^{2} \right) = 0$$

یا

$$ک_{ق} + \frac{1}{2} ک \, و_{ق}^{2} = ک_{ف} + \frac{1}{2} ک \, و_{ف}^{2} \quad (۳۸)$$

اِس لیے ق پر توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کا مجموعہ وہی ہے

جو ان کا شف پر ہے، اور اس لیے مسئلہ ثابت ہے۔

توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کے مجموعہ کو ذرہ کی **کُل توانائی** کہتے ہیں۔

توانائی کا بقا

۱۴۳ ۔ اجسام کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت صریحاً اس کے مختلف ذروں کی توانائیوں بالحرکت کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ نظام کی توانائی بالقوہ جیساکہ ہم دیکھ چکے ہیں اس کے ذروں کی توانائیوں بالقوہ کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

اس لیے کسی نظام کی کل توانائی اس کے مختلف ذروں کی کل توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔ چونکہ ہر ذرہ کی کُل توانائی مستقل رہتی ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نظام کی کُل توانائی مستقل رہتی ہے۔

اس واقعہ کو کہ کُل توانائی مستقل رہتی ہے **توانائی کا بقا** کہتے ہیں۔ اُس مساوات کو جو اس امر کو ظاہر کرے کہ ایک لمحہ پر کی کُل توانائی کسی دوسرے لمحہ پر کی کُل توانائی کے مساوی ہے **توانائی کی مساوات** کہتے ہیں۔

۱۴۴ ۔ تمثیلاً فرض کرو کہ منجنیق سے ایک پتھر پھینکا جاتا ہے۔

اولاً منجنیق کی لچکدار رسی کے تنانے میں کام انجام پاتا ہے اور یہ کام تنی ہوئی رسی کی توانائی بالقوہ کے طور پر جمع ہوتا ہے۔ جب منجنیق کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو رسی کا تناؤ پتھر پر عمل کرتا ہے اور پتھر اس تناؤ کے اسراع پیدا کرنے والے اثر کے تحت حرکت کرتا ہے اور رسی کا تناؤ گھٹتا ہے۔ اس عمل کے اثناء میں پتھر توانائی بالحرکت حاصل کرتا جاتا ہے اور تنی ہوئی رسی توانائی بالقوہ کھوتی جاتی ہے۔ اوپر ثابت شدہ مسئلہ (۱۴۲) کی رو سے وہ توانائی بالحرکت جو پتھر حاصل کرتا ہے اُس توانائی بالقوہ کے عین مساوی ہے جو رسی کھوتی ہے۔

جب پتھر منجنیق سے نکلتا ہے تو رسی کی توانائی بالقوہ کا بیشتر حصہ پتھر کی توانائی بالحرکت میں مستحیل ہو جاتا ہے۔ اس کے بعد پتھر کی حرکت کی اثناء میں توانائی کا ایک اور استحالہ

وقوع پذیر ہو سکتا ہے چنانچہ اگر پتھر اوپر وار حرکت کرتا ہے تو اس کی توانائی بالقوہ بڑھتی ہے اور اس لیے اس کے جواب میں اس کی توانائی بالحرکت گھٹنی چاہئے۔ اس کی چال سست پڑنی چاہئے۔ برخلاف ازیں اگر پتھر نیچے وار حرکت کرتا ہے تو توانائی بالقوہ گھٹیگی اور اس لیے اس کی توانائی بالحرکت بڑھے گی۔ اس کی رفتار میں اضافہ ہوگا۔

۱۴۵۔ توانائی کے بقا کے اصول سے ایک بہت اہم نتیجہ حسب ذیل حاصل ہوتا ہے:

مسئلہ۔ اگر ایک ذرہ کسی چکنے منحنی پر پھسلے اور اس پر سوائے جاذبہ اور منحنی کے تعامل کے کوئی اور قوتیں عمل نہ کریں اور اگر اس کے راستہ کے دو نقطوں ف، ق پر رفتاریں ع، و ہوں تو

$$و^2 = ع^2 + ۲ ج ف \quad \dots\dots (۳۹)$$

جہاں ف کے نیچے ق کا انتصابی فاصلہ ف سے تعبیر کیا گیا ہے یعنی راستہ ف ق کا انتصابی ظل ف ہے۔

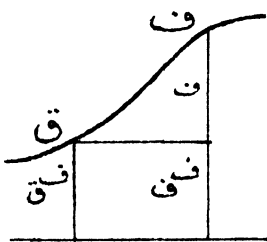
فرض کرو کہ کسی افقی مستوی کے اوپر مثلاً زمین کی سطح کے اوپر ف اور ق کے ارتفاع $ف_ف$، $ف_ق$ ہیں۔ جب ذرہ ف پر ہوتا ہے تو اس کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ ک $ع^2$ اور توانائی بالقوہ ک ج $ف_ف$ ہے۔ اس لیے اس کی توانائی

$$\frac{1}{2} ک ع^2 + ک ج ف_ف$$

ہے۔ اسی طرح ق پر اسکی کل توانائی

ف
ف
ق
$ف_ق$
$ف_ف$

شکل (۹۶)

$$\frac{1}{2}ک\ و^2 + ک\ ج\ ف_ق$$

ہے۔

اب چونکہ عمل کرنے والی قوتوں کا نظام بقائی ہے اسلیے کُل توانائی غیر متغیر رہتی ہے۔ اس لیے

$$\frac{1}{2}ک\ ع^2 + ک\ ج\ ف_ف = \frac{1}{2}ک\ و^2 + ک\ ج\ ف_ق$$

اس لیے $و^2 - ع^2 = ۲ج\ (ف_ف - ف_ق) = ۲ج\ ف$

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

(۱۴۷) **۱۴۶** — دفعہ ۱۴۵ کا مسئلہ صریحاً درست رہتا ہے جبکہ ذرہ اوپر وار حرکت کر رہا ہو، اس صورت میں ف منفی ہوگا۔ اسی طرح یہ مسئلہ اس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ ذرہ اپنے راستہ کے کچھ حصہ میں اوپر چڑھے اور باقی حصہ میں نیچے اترے۔ مزید بریں ذرہ قوتوں کے کسی بقائی نظام کے تحت حرکت کرسکتا ہے صرف اس شرط کے ساتھ کہ کُل توانائی بالقوہ ذرہ کے وزن سے پیدا ہونی چاہئے۔ اس صورت میں بھی مسئلہ بالا درست رہتا ہے۔

مثالاً یہ مسئلہ درست ہے جبکہ ذرہ ایک نا امتداد پذیر رسی سے بندھا ہو یا خلاء میں آزادانہ حرکت کرے۔

اس مسئلہ کا استعمال سمجھنے کیلئے فرض کرو کہ ایک سیکل سوار پندرہ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک پہاڑی کی چوٹی پر پہنچتا ہے جس کا ارتفاع ۶۰ فٹ ہے اور ساتھ ہی پہاڑی کے نیچے اترنے لگتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم پہاڑی کے دامن میں اس کی رفتار معلوم کرنا چاہتے ہیں اس مفروضہ کی بناء پر کہ رگڑ، ہوا کی مزاحمت وغیرہ نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

پہاڑی کی چوٹی اور دامن کو نقاط ف اور ق (دیکھو مسئلہ بالا) لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ف = ۶۰\ فٹ$$

$$ع = ۱۵\ میل\ فی\ گھنٹہ = ۲۲\ فٹ\ فی\ ثانیہ$$

اِس لیے فٹ ثانیہ اکائیاں استعمال کرنے سے

$$و^2 = ع^2 + ۲ج ف = ۲۲^2 + ۲ \times ۳۲ \times ۶۰$$

$$= ۴۳۲۴$$

اِس لیے $و = ۶۶$ فٹ فی ثانیہ تقریباً

$= ۴۵$ میل فی گھنٹہ

اس طرح سیکل سوار کی رفتار جبکہ رگڑ یا ہوا کی مزاحمت نہ ہو ۴۵ میل فی گھنٹہ ہو گی ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک آٹو موبیل جو ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے ایک ڈھلوان پہاڑی کے پائین پر پہنچتی ہے اور اُسی آن اِس کے انجن کو بند کر دیا جاتا ہے ۔ معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر گاڑی پہاڑی پر کتنے ارتفاع تک پہنچیگی (رگڑ وغیرہ نظر انداز کرو) ۔

۲ ۔ ایک مزدور اینٹوں کو ۱۰ فٹ ارتفاع پر ایک معمار کے پاس پہنچاتا ہے ۔ وہ اِن کو اِس طرح پھینکتا ہے کہ وہ ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے معمار کے پاس پہنچتی ہیں ۔ مزدور اپنے کام کو کس تناسب میں بچا سکتا ہے اگر وہ اینٹوں کو اس طرح پھینکے کہ وہ معمار کے پاس عین پہنچ سکیں ۔

۳ ۔ ۳ ٹن کمیت کی ایک توپ گاڑی، افقی مستوی پر ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پیچھے دھکا دیتی ہے ۔ وہ یکساں دباؤ معلوم کرو جو اس کو ۳ فٹ کے فاصلہ میں ساکن کر دینے کے لیے اِس پر لگانا پڑے گا ۔

۴ ۔ ۲۰۰۰ ٹن کے ایک جہاز کو جو ۴۰ فٹ فی منٹ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے جہازی رسی کے ذریعہ ۲ فٹ کے فاصلہ میں ساکن کر دیا گیا ہے ۔ معلوم کرو کہ رسی کو کتنی کھینچ برداشت کرنی پڑی ۔

۵ ۔ ایک سیکل اور سیکل سوار ۲۰۰ پونڈ وزنی ہیں سیکل سوار ہموار سڑک پر ۲۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے سیکل چلاتا ہے اور اچانک بریک ڈالتا ہے جو ٹائر کو ایک ایسی قوت سے دباتا ہے جو ۵۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے ۔ اگر بریک (۱۷۴)

اور ٹائر کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{4}$ ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر سیکل کتنی دور جائے گی۔

۶۔ مثال ماسبق میں سیکل کتنی دور جائے گی اگر سڑک ہموار ہونے کی بجائے ۲۰ میں اڈھلوان ہو۔

۷۔ ایک گولی کو ۱۰۰۰ فٹ ثانیہ کی رفتار سے فائر کرنے پر وہ لکڑی کے ایک کندے میں بارہ انچ گہرائی تک گھس جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُسے اُسی لکڑی کے دو انچ موٹے تختے میں سے فائر کیا جائے تو خروج پر اس کی رفتار تقریباً ۹۱۳ فٹ فی ثانیہ ہوگی۔ (مان لو کہ لکڑی کی مزاحمت گولی پر مستقل ہے)۔

۸۔ دو مساوی وزن ف اور ف ایک رسی کے ذریعہ جو دو چکنی چرخیوں ا اور ب پر سے گذرتی ہے سہارے گئے ہیں اور ایک وزن و (= $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ف) ا اور ب کے درمیان ڈوری کے وسطی نقطہ پر باندھا گیا ہے۔ ا اور ب ایک ہی افقی خط میں ہیں۔ ثابت کرو کہ و اُترتا جاری رکھے گا تا آنکہ و ا ب ایک متساوی الاضلاع مثلث بنائے۔ اس کے بعد کیا واقع ہوگا؟

۹۔ طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی ایک ڈوری کو ایک ہی افقی خط میں کے دو نقطوں ا اور ب کے درمیان جن کا باہمی فاصلہ ف ہے لٹکایا گیا ہے اور اس کے وسطی نقطہ پر وزن و بندھا ہے۔ وزن و کو ا اور ب کے درمیان وسط میں پکڑ کر دفعتاً چھوڑ دیا گیا۔ معلوم کرو کہ کتنے فاصلہ میں سے وہ گرے گا قبل اس کے کہ ڈوریاں اُسے ساکن کر دیں۔

۱۰۔ ایک وزنی ذرہ طبعی طول ل کی ایک ڈوری سے لٹکتا ہے اور اس کو طول لَ تک تنا دیتا ہے، ڈوری کا دوسرا سرا ثابت ہے۔ ذرہ کو سہارے کے نقطہ کے نیچے طول ۲ لَ تک کھینچ کر چھوڑ دیا گیا۔ کتنے اوپر وہ چڑھے گا۔

۱۱۔ وہ اسپی طاقت معلوم کرو جو ایک دریا کی توانائی بالحرکت سے اُس مقام پر حاصل کی جا سکتی ہے جہاں اس کا عرض ۱۰۰ فٹ، اوسط گہرائی ۲۰ فٹ اور اوسط رفتار $\frac{1}{4}$ ۴ میل فی گھنٹہ ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا

وزن ۵ء۶۲ پونڈ ہے)۔
۱۲۔ اگر (مثال ماسبق) دریا ایک آبشار پر جس کی تہ دریا کی تہ سے ۵۰ فٹ نیچے ہے ختم ہو تو وہ ایسی طاقت معلوم کرو جو پانی سے حاصل کی جا سکتی ہے۔
۱۳۔ ایک انجن (حراکہ) میں $\frac{1}{4}$ ا پونڈ کوئلہ فی اسپی طاقت ساعت جلتا ہے جاذبہ ارگڑ، وغیرہ پر غالب آنے میں جتنا کوئلہ خرچ ہوتا ہے اسکو چھوڑ کر معلوم کرو کہ کتنا کوئلہ جلانا چاہئے کہ ۳۰۰ ٹن وزنی ٹرین میں ۵۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار پیدا ہو سکے۔

قائم اور غیر قائم توازن

۱۴۷۔ فرض کرو کہ ایک نظام توازن کے محل میں ساکن ہے اور وہ اس محل سے صرف ایک راستہ پر حرکت کرنے کے قابل ہے جس کی دو سمتوں میں سے کسی سمت میں وہ حرکت کر سکتا ہے۔ اس قسم کے نظام کی مثالیں حسب ذیل ہیں: انجن جو پٹریوں پر کھڑا ہو، دروازہ جو ایک قبضہ کے گرد گھوم سکتا ہو، منکا جو ایک تار میں پھسلتا ہو۔ نظام پر بقائی قوتوں کی کوئی تعداد عمل کر سکتی ہے لیکن ان قوتوں کے تحت نظام کو توازن کے محل میں ہونا چاہئے۔ (۱۷۵)

فرض کرو کہ توازن کا محل ف سے تعبیر ہوتا ہے اور فرض کرو کہ تشکیل ف میں نظام کی توانائی بالقوہ ک$_{ف}$ ہے۔ فرض کرو کہ لا کوئی محدد ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ نظام کی تشکیل ف سے کتنی دور حرکت کر چکی ہے۔ مثلاً لا سے وہ فاصلہ تعبیر ہو سکتا ہے جو انجن پٹریوں پر طے کر چکا ہے، لا سے وہ زاویہ تعبیر ہو سکتا ہے جس میں سے دروازہ اپنے قبضوں کے گرد گھوم چکا ہے یا لا سے وہ فاصلہ تعبیر ہو سکتا ہے جو منکا تار پر طے کر چکا ہے۔ لا کی قیمت مثبت ہو گی جبکہ نظام ایک سمت میں حرکت کرے اور منفی ہو گی جبکہ وہ دوسری سمت میں حرکت کرے۔

جب نظام اپنے توازن کی تشکیل ف سے حرکت کرتا ہے تو لا کی قیمت بدلے گی۔ توانائی بالقوہ ک کی قیمت بھی بدلے گی اور چونکہ وہ صرف لا کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے جبکہ قوتیں بقائی ہوں اس لئے ہم

کہہ سکتے ہیں کہ ک، لا کا ایک تفاعل ہے۔

ایک مشہور مسئلہ کی بموجب ہم ک کو لا کی قوتوں میں شکل

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ف}} + \text{لا}\left(\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ف}} + \frac{1}{2}\text{لا}^{2}\left(\frac{\text{جف}^{2}\text{ک}}{\text{جف لا}^{2}}\right)_{\text{ف}} + \cdots\cdots \quad (۴۰)$$

میں پھیلا سکتے ہیں جس میں زیر تحریر ف اس امر کو تعبیر کرتا ہے کہ اس مقدار کو تشکیل ف میں محسوب کرنا چاہیئے جیسا کہ $\text{ک}_{\text{ف}}$ کی صورت میں فرض کیا جا چکا ہے۔ اب چونکہ تشکیل ف کو توازن کا محل فرض کیا گیا ہے اس لیے دفعہ ۱۲۵ کی رو سے

$$\left(\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}\right)_{\text{ف}} = ۰$$

اور اس لیے مساوات (۴۰) ہو جاتی ہے

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ف}} + \frac{1}{2}\text{لا}^{2}\left(\frac{\text{جف}^{2}\text{ک}}{\text{جف لا}^{2}}\right)_{\text{ف}} + \cdots\cdots\cdots \quad (۴۱)$$

اب ف سے قریب تشکیلات کے لیے، لا چھوٹا ہے اور اس لیے مساوات (۴۱) کی رقم $\frac{1}{2}\text{لا}^{2}\left(\frac{\text{جف}^{2}\text{ک}}{\text{جف لا}^{2}}\right)_{\text{ف}}$ اگرچہ خود چھوٹی ہے تاہم لا^{3}، لا^{4} وغیرہ والی ارقام کے مقابلہ میں جو اس کے بعد آتی ہیں بہت بڑی ہے۔ اس لیے ف سے قریب تشکیلات کے لیے ہم ان آخری رقموں کو بالکل نظر انداز کر سکتے ہیں اور اس لیے مساوات کو شکل ذیل میں لکھ سکتے ہیں: (۱۷۶)

$$\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}} = \frac{1}{2}\text{لا}^{2}\left(\frac{\text{جف}^{2}\text{ک}}{\text{جف لا}^{2}}\right)_{\text{ف}} \cdots\cdots\cdots \quad (۴۲)$$

اب $\left(\frac{\text{جف}^{2}\text{ک}}{\text{جف لا}^{2}}\right)_{\text{ف}}$ کی قیمت مثبت ہو سکتی ہے یا منفی۔

اگر وہ مثبت ہے تو $\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}}$ مثبت ہے خواہ لا کی کچھ ہی قیمت ہو اور اس لیے ف سے قریب ہر تشکیل میں توانائی بالقوہ ک،

تشکیل ف کی توانائی بالقوہ سے بڑی ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں ک، ف پر اقل ہے۔

اسی طرح اگر $\left(\frac{جف^2 ک}{جف\ لا^2}\right)_ف$ منفی ہے تو لا کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لیے ک۔ک ف منفی ہے اور اِس لیے ک، ف پر اعظم ہے۔

۱۴۸ — اب فرض کرو کہ نظام کو ف سے قریب کسی محل میں ساکن رکھا گیا ہے۔ یہ تشکیل توازن کی تشکیل نہیں ہے اور اِس لیے نظام ساکن نہیں رہ سکتا۔ وہ سمت معلوم کرنے کے لیے جس میں وہ حرکت کرنے لگے گا ہمیں صرف یہ دیکھنے کی ضرورت ہے کہ جب نظام حرکت کرتا ہے تو وہ توانائی بالحرکت حاصل کرتا ہے اور چونکہ یہ توانائی حسب دفعہ ۱۴۳ اسکی توانائی بالقوہ کے بدلے میں حاصل ہونی چاہیئے اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ نظام ایک ایسی سمت میں حرکت کرنے لگے گا کہ اِس کی توانائی بالقوہ گھٹے گی۔

مساوات (۴۲) پر نظر ڈالنے سے معلوم ہوگا کہ یہ سمت ف کی جانب ہے یا اِس کے مخالف۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $\left(\frac{جف^2 ک}{جف\ لا^2}\right)_ف$ مثبت ہے تو $لا^2$ کی قیمت گھٹنی چاہیئے۔ اور اِس لیے حرکت ف کی جانب ہونی چاہیئے خواہ لا کی قیمت کچھ ہی ہو۔ اِسی طرح اگر $\left(\frac{جف^2 ک}{جف\ لا^2}\right)_ف$ منفی ہے تو $لا^2$ کی قیمت بڑھنی چاہیئے اور اِس لیے حرکت ہمیشہ ف سے دُور ہوگی۔

اِس طرح معلوم ہو چکا کہ اگر نظام کو ف سے قریب کسی تشکیل میں رکھا جائے تو یہ سوال کہ حرکت ف کی جانب ہوگی یا اِس سے دُور اُس تشکیل پر منحصر نہیں ہے جس میں نظام کو رکھا گیا ہے بلکہ $\left(\frac{جف^2 ک}{جف\ لا^2}\right)_ف$ کی علامت پر منحصر ہے۔

(۱۴۸)

ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ف توازن کی تشکیل ہو اور اگر نظام کو ف سے خفیف طور پر کسی قریبی تشکیل میں ہٹایا جائے تو

(ا) اگر $\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ مثبت ہے تو نظام کو آزاد چھوڑنے پر وہ اپنے توازن کے ابتدائی محل پر لوٹے گا،

(ب) اگر $\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ منفی ہے تو نظام کو آزاد چھوڑنے پر وہ توازن کے محل سے اور دُور حرکت کرے گا۔

قسم اول کے توازن کو قائم توازن اور قسم دوم کے توازن کو غیر قائم توازن کہتے ہیں۔

ہم نتائج کو حسب ذیل جدول میں خلاصہ کے طور پر بیان کر سکتے ہیں:

$\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}}$ کی علامت	توانائی بالقوہ ک	توازن
+ −	اقل اعظم	قائم غیر قائم

۱۴۹ — مسئلہ۔ قائم اور غیر قائم توازن کے محل متبادلاً واقع ہوتے ہیں۔

ہم مان سکتے ہیں کہ صرف محدود قوتوں سے بحث کیجارہی ہے اور اس لیے تفاعل ک ہمیشہ محدود ہوگا، وہ کبھی بھی قیمتوں ک = ±∞ میں سے گذر نہیں سکتا۔ یہ تفاعل مسلسل ہونا چاہئے کیونکہ بموجب فرض وہ کام جو نظام کو کسی تشکیل میں رکھنے میں انجام پاتا ہے محدود قیمت کا ہونا چاہئے

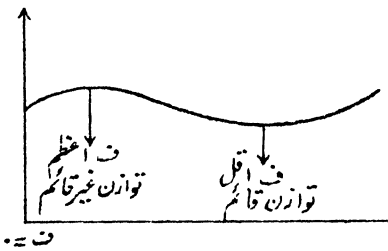
اور اس لیے کسی دی ہوئی تشکیل کے لئے توانائی بالقوہ کی صرف ایک قیمت ہونی چاہیئے۔ نیز توانائی بالقوہ کے تفرقی سر محدود ہونے چاہئیں کیونکہ ان سے ان قوتوں (دفعہ ۱۳۳) کی پیمائش ہوتی ہے جو کسی دی ہوئی تشکیل میں صرف محدود قیمتیں رکھ سکتی ہیں۔

پس اگر تفاعل ک کی ترسیم کھینچی جائے تو وہ ایسے حصوں پر مشتمل ہونی چاہیئے جنہیں ک متبادلاً بڑھے اور گھٹے۔ ایک حصہ سے جسمیں ک بڑھتا ہے اُس حصہ میں جسمیں ک گھٹتا ہے داخل ہونیکے لیے ہمیں ایک ایسے نقطہ میں سے گذرنا چاہیئے جس پر ک اعظم ہے' برخلاف ازیں اُس حصہ سے جس میں ک گھٹتا ہے اُس حصہ میں جس میں ک بڑھتا ہے داخل ہونے کے لیے ایک ایسے نقطہ میں سے گذرنا پڑے گا جس پر ک اقل ہے۔ اِس لیے ک کی اعظم اور اقل قیمتیں متبادلاً وقوع پذیر ہوتی ہیں یا دوسرے الفاظ میں قائم اور غیر قائم توازن کی تشکیلات متبادلاً واقع ہوتی ہیں۔ (۱۰۸)

۱۵۰۔ توازن کی اِن دو قسموں کی مثالیں اُن تمثیلات میں مل سکتی ہیں جو قبل ازیں بیان ہو چکی ہیں۔

۱۔ حراکہ جو پٹریوں پر حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ کسی محل میں مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہے اور فرض کرو کہ لا سے وہ فاصلے تعبیر ہوتے ہیں جو راستہ پر اتفاقاً پیمائش کئے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ انجن کی کل کمیت ك ہے۔ تب توانائی بالقوہ ك ج ف ہے۔ تشکیل لا = ۰ میں توازن کے لیے شرط ہے

$$\frac{\text{د}}{\text{د لا}}\ (\text{ك ج ف}) = ۰$$

یا $\frac{\text{د ف}}{\text{د لا}} = ۰$ جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ف کو اعظم ہونا چاہیئے یا اقل۔ صفحہ ۲۵۵ کی

جدول سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ف اقل ہے یعنی اگر مرکز ثقل اپنے زیر ترین نقطہ پر ہے تو توازن قائم ہوگا۔ اس لیے اگر حراکہ کو اس محل سے ذرا سا ہٹا دیا جائے تو وہ اس محل پر واپس لوٹ آئے گا۔ اگر ف اعظم ہو یعنی اگر مرکز ثقل اپنے بلند ترین نقطہ پر ہو تو توازن غیر قائم ہوگا۔ حراکہ اب پہاڑی کے چوٹی پر ہوگا اور چوٹی کے کسی ایک جانب ہٹانے پر پہاڑی کے نیچے لڑھکتا جائے گا۔

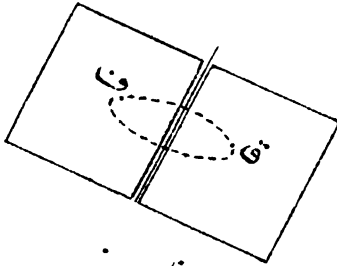
ف اعظم
توازن غیر قائم
ف اقل
توازن قائم
ف = ۰

شکل (۹۷)

نوٹ ۔ اگر حراکہ کے متحرک اجزاء مناسب طور پر "متوازن" نہیں ہیں تو مرکز ثقل ممکن ہے ہمیشہ پٹڑیوں کے اوپر ایک ہی ارتفاع پر نہ رہے اور اس لیے ف کی اعظم اور اقل قیمتیں ضروری نہیں کہ ان نقطوں پر واقع ہوں جہاں راستہ کی بلندی اعظم یا اقل ہے۔ مثلاً توازن کا ایک محل وقوع پذیر ہو سکتا ہے جہاں راستہ ہموار نہ ہو یا غیر قائم توازن کا محل ایک ایسے نقطہ پر واقع ہو سکتا ہے جس پر راستہ اپنے بلند ترین نقطہ پر ہو، ظاہر ہے کہ اس صورت میں پٹڑیوں کے اوپر مرکز ثقل کا ارتفاع اس نقطہ پر اقل ہے۔ اس لیے اگر انجن کو راستہ کے زیر تر نقطہ تک خفیف طور پر ہٹایا جائے اور پھر آزاد چھوڑ دیا جائے تو وہ خود بلند ترین نقطہ تک واپس لوٹے گا۔ یہاں اصول وہی ہے جو میکانیکی کھلونوں میں استعمال کیا جاتا ہے کیونکہ جب ان کو کسی مائل مستوی کے پائین میں ساکن رکھا جاتا ہے تو وہ آزاد چھوڑنے پر مستوی کے اوپر لڑھکنا شروع کرتے ہیں۔

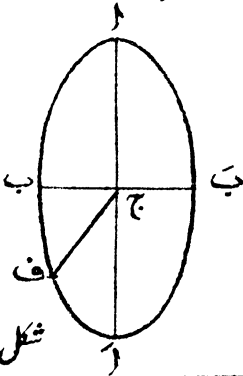
ہم دیکھتے ہیں کہ قائم اور غیر قائم توازن کے محل متبادلاً واقع ہونے چاہئیں جیسا کہ ہم نے دفعہ ۱۴۹ میں ثابت کیا ہے۔

۲ ۔ دروازہ جو قبضوں پر گھومے ۔ یہاں بھی توانائی بالقوہ لٹ ج ف ہے

جس میں ف کسی معیاری ہموار مستوی کے اوپر دروازے کے مرکز ثقل کا ارتفاع ہے۔ جب دروازہ اپنے قبضوں پر گھومتا ہے تو اس کا مرکز ثقل قبضوں کے خط کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ اگر یہ خط کامل طور پر انتصابی ہو تو مرکز ثقل سے مرتسم شدہ دائرہ کلاً ایک افقی مستوی میں واقع ہوتا ہے اور اس لیے دروازہ کا ہر محل توازن کا محل ہوتا ہے اور قائمیت یا غیر قائمیت کا سوال پیدا ہی نہیں ہوتا لیکن اگر قبضوں کا خط کامل طور پر انتصابی نہ ہو تو مذکورۂ بالا دائرہ ایک مائل مستوی میں واقع ہوگا۔ وہ نقطے جن پر مرکز ثقل کا ارتفاع معیاری افقی مستوی کے اوپر اعظم یا اقل ہے تعداد میں دو ہیں:

(۱) نقطہ ف جو دائرہ کا وہ بلند ترین نقطہ ہے جس پر توازن غیر قائم ہے۔

(۲) نقطہ ق جو دائرہ کا وہ زیر ترین نقطہ ہے جس پر توازن قائم ہے۔

شکل (۹۸)

۳۔ منکا جو تار پر پھسلے۔ ایک معین مسئلہ حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ منکا ف ایک ناقصی تار پر پھسلتا ہے جس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم اا' انتصابی ہے۔ فرض کرو کہ منکے پر صرف اس کا وزن اور راس تنی ہوئی ڈوری کا تناؤ عمل کرتے ہیں جس کا ایک سرا منکے سے اور دوسرا سرا ناقص کے مرکز سے بندھا ہے۔ فرض کرو کہ ناقص کے نیم محور ا، ب ہیں اور فرض کرو کہ ڈوری کا طبعی طول ل اور مقیاس لہ ہے جہاں ل، ب سے کم ہے اور اس لیے ڈوری ہمیشہ تنی ہوئی

شکل (۹۹)

رہتی ہے ۔ فرض کرو کہ منکے کا وزن و ہے ۔

پہلا کام کسی تشکیل میں توانائی بالقوہ کو محسوب کرنے کا ہے ۔ فرض کرو کہ تشکیل کی تعیین ناقص پر کے اس نقطہ کے خارج المرکز زاویہ فہ سے ہوتی ہے جو منکا اختیار کرتا ہے ۔ تب ناقص کے مرکز کے اوپر منکے کا ارتفاع ا جم فہ ہے اور اس لیے توانائی بالقوہ کا وہ حصہ جو تجاذبی قوتوں سے پیدا ہوتا ہے و ا جم فہ ہے۔ ڈوری کا طول ر مساوات

$$\text{ر}^2 = \text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ} \qquad (\text{ا})$$

سے حاصل ہوتا ہے ۔ وہ کام جو ڈوری کو طول ل سے طول ر تک تاننے میں انجام پاتا ہے حسب دفعہ (۱۱۳)

$$\frac{\text{لہ}}{2\,\text{ل}}\,(\text{ر} - \text{ل})^2$$

ہے ۔ اس کو توانائی بالقوہ کا وہ حصہ سمجھا جا سکتا ہے جو ڈوری کے تاننے سے پیدا ہوتا ہے ۔ اس لیے کل توانائی بالقوہ ہوگی

$$\text{ک} = \text{و}\,\text{ا}\,\text{جم}\,\text{فہ} + \frac{\text{لہ}}{2\,\text{ل}}\,(\text{ر} - \text{ل})^2 \qquad (\text{ب})$$

(۱۸۰) اب توازن کے محل، $\frac{\text{فرک}}{\text{فر فہ}} = 0$ سے یا

$$\text{و}\,\text{ا}\,\text{جب}\,\text{فہ} - \frac{\text{لہ}}{\text{ل}}\,(\text{ر} - \text{ل})\,\frac{\text{فرر}}{\text{فر فہ}} = 0$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔ اس میں مساوات (ا) سے ر کی قیمت درج کی جائے تو

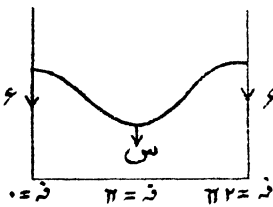
$$\text{و}\,\text{ا}\,\text{جب}\,\text{فہ} + \frac{\text{لہ}}{\text{ل}}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جب}\,\text{فہ}\,\text{جم}\,\text{فہ} - \frac{\text{لہ}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جب}\,\text{فہ}\,\text{جم}\,\text{فہ}}{\sqrt{\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}}} = 0$$

منطق بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اصلیں جب فہ = ۰ سے اور نیز

$$\left[\text{و}\,\text{ا} + \frac{\text{لہ}}{\text{ل}}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{جم}\,\text{فہ}\right]^2 (\text{ا}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} + \text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}) - \text{لہ}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ} = 0$$

یعنی $\left[و ا + \frac{له}{ل} (ا^2 - ب^2) جم فه \right]^2 \left[(ا^2 - ب^2) جم^2 فه + ب^2 \right] - له^2 (ا^2 - ب^2) جم^2 فه = ۰$ (ج)

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں آخری مساوات جم فہ میں چوتھے درجہ کی ہے۔

جب فہ = ۰ کی اصلیں فہ = ۰، π ہیں اور اس لیے ہمیشہ دو توازن کے محل ا، اَ پر ہیں جو محور اعظم کے سرے ہیں۔ مساوات (ج) چوتھے درجہ کی ہے اور اس لیے جم فہ میں اس کی حقیقی اصلوں کی تعداد ۰، ۲، یا ۴ ہو سکتی ہے۔ اس مساوات کو ہم نے اس مساوات کی طرفین کا مربع لیکر حاصل کیا ہے جو پوری ہونی چاہیئے تھی اور اس لیے ایسا کرنے سے ہم نے اصلی مساوات کی اصلوں کی تعداد کو دگنا کر دیا ہے۔ اس لیے جم فہ کی اصلی مساوات صرف ۰، ۱، یا ۲ حقیقی اصلوں سے پوری ہوگی۔ دوسرے الفاظ میں ا اور اَ کے درمیان تار کی کسی ایک جانب زیادہ سے زیادہ توازن کے دو محل ہو سکتے ہیں۔

جم فہ کی اصلوں کی اصلی قیمتیں معلوم کرنا اور پھر ان اصلوں کے جواب میں $\frac{ف^2 ک}{ف لا^2}$ کی قیمتوں کی علامتیں متعین کرنا ایک تکلیف دہ کام ہے۔ یہ سوال قائم اور غیر قائم تشکیلات کے عام نظریہ کو استعمال کرنے سے بہت سادہ ہو جاتا ہے۔

شکل (۱۰۰)

اگر ہم جملہ (ب) میں له = ۰ رکھیں تو اس صورت میں جس میں له بمقابلہ و کے لاانتہا چھوٹا ہے حسب ذیل توانائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے:

$$ک = و ا جم فہ$$

اس کی ترسیم شکل (۱۰۰) میں دکھائی گئی ہے۔ یہاں توازن کے صرف دو محل ہیں یعنی فہ = ۰ اور فہ = π جس میں سے پہلا (۶) غیر قائم ہے اور دوسرا (س) قائم۔

نیز اگر ہم جملہ (ب) میں و = ۰ رکھیں تو اس صورت میں جسمیں له بمقابلہ و کے

(۱۸۱)

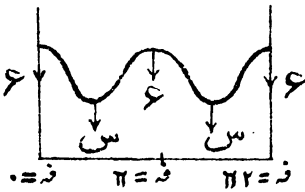
لا انتہا بڑا ہے توانائی بالقوہ حاصل ہوتی ہے

$$ک = \frac{لہ}{۲ل} (ر - ل)^۲$$

اور اس صورت میں ک کی ترسیم کو شکل (۱۰۱) میں دکھایا گیا ہے ۔ توازن کے چار محل

$$فہ = ۰،\ \frac{\pi}{۲}،\ \pi،\ \frac{۳\pi}{۲}$$

ہیں جو علی الترتیب غیر قائم، قائم، غیر قائم، قائم ہیں ۔

وہ عام صورت جس میں لہ، و کے ساتھ محدود نسبت رکھتا ہے متذکرہ صدر دو انتہائی صورتوں کے درمیان واقع ہے ۔ عام صورت میں ک کی ترسیم اشکال (۱۰۰) اور (۱۰۱) کی ترسیموں کو مرکب کرنے سے حاصل کی جا سکتی ہے ۔ فہ کی کسی قیمت کے متناظر معین معلوم کرنے کے لیے ہم ترسیموں (۱۰۰) اور (۱۰۱) کے نظیری معینوں کو مناسب مستقلات سے ضرب دیتے ہیں اور جمع کرتے ہیں ۔ اِن دو معینوں سے جملہ (ب) کی دو رقمیں جداگانہ ملتی ہیں اور اِن کا مجموعہ ک کی کل قیمت ہے ۔

شکل (۱۰۱)

اِس ہندسی عمل سے ظاہر ہے کہ تشکیل فہ = ۰ توازن کی غیر قائم تشکیل رہتی ہے ۔ تشکیل فہ = π بھی توازن کی تشکیل ہے لیکن وہ قائم یا غیر قائم ہو سکتی ہے ۔ اِن دو تشکیلات کے درمیان توازن کی ایک اور تشکیل ہو سکتی ہے جیسا کہ شکل (۱۰۱) میں یا یہ کہ توازن کی کوئی تشکیل ہی نہ ہو جیسا کہ شکل (۱۰۰) میں ۔ چونکہ دفعہ ۱۴۹ کی رو سے قائم اور غیر قائم تشکیلات متبادلاً واقع ہوتی ہیں اِس لیے ظاہر ہے کہ اگر تشکیل فہ = π قائم ہے تو اِس کے اور فہ = ۰ کے درمیان کوئی اور توازن کی تشکیل نہیں ہو سکتی ۔ لیکن اگر فہ = π غیر قائم ہے تو فہ = π اور فہ = ۰ کے درمیان توازن کی ایک تشکیل ہونی چاہیئے اور یہ قائم ہونی چاہیئے ۔

اس لیے تشکیل فہ = π کی قائمیت یا غیر قائمیت سے لہ کی کسی معلومہ قیمت کے لیے حل کی نوعیت معلوم ہوتی ہے۔ یہ قائمیت یا غیر قائمیت فہ = π پر $\frac{\text{جف}^2 \text{ک}}{\text{جف فہ}^2}$ کی علامت سے متعین ہوتی ہے۔ اب اس کی علامت معلوم کرنے کے لیے فہ = π سے قریب π − فہ = طہ رکھو اور طہ^2 سے چھوٹی رقموں کو نظر انداز کرو تو اس تقرب تک

$$\text{ر}^2 = \text{ا}^2 \text{جم}^2 \text{فہ} + \text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{فہ}$$
$$= \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\, \text{جب}^2 \text{طہ}$$
$$= \text{ا}^2 - (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\, \text{طہ}^2$$

اس لیے مساوات (ب) سے

$$\text{ک} = \text{و ا جم فہ} + \frac{\text{لہ}}{2\text{ل}} (\text{ر} - \text{ل})^2$$

$$= -\text{و ا}\left(1 - \tfrac{1}{2}\text{طہ}^2\right) + \frac{\text{لہ}}{2\text{ل}}\left[\text{ا}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}^2}\text{طہ}^2\right) - \text{ل}\right]^2$$

اس لیے
$$\frac{\text{جف}^2 \text{ک}}{\text{جف طہ}^2} = \text{و ا} - \frac{\text{لہ}(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)(\text{ا} - \text{ل})}{\text{ا ل}} \qquad (۱۸۲)$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فہ = π پر توازن قائم ہے یا غیر قائم بموجب اس کے کہ

$$\text{لہ} < \text{ یا } > \frac{\text{و ا}^2 \text{ل}}{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)(\text{ا} - \text{ل})}$$

خلاصہ یہ ہے کہ حسب ذیل دو صورتیں ہیں:

(۱) اگر لہ < $\frac{\text{و ا}^2 \text{ل}}{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)(\text{ا} - \text{ل})}$ تو توازن کے محل صرف فہ = ۰ اور فہ = π ہیں جو علی الترتیب غیر قائم اور قائم ہیں۔

(۲) اگر لہ > $\frac{\text{و ا}^2 \text{ل}}{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)(\text{ا} - \text{ل})}$ تو توازن کے محل فہ = ۰ اور

فہ = π میں جو دونوں غیر قائم ہیں اور نیز ان کے درمیان توازن کا ایک قائم محل ہے۔
یہ آخری محل مساوات (ج) سے معلوم ہوگا۔

فاصل اور تعدیلی توازن

۱۵۱ ۔ اگر توازن کے محل پر $\frac{\text{جف}^2 \text{ک}}{\text{جف لا}^2}$ صفر ہو تو توازن کو فاصل توازن کہتے ہیں۔ اب تک یہ بات منکشف نہیں ہوئی کہ جب کسی نظام کو فاصل توازن کے محل سے خفیف طور پر ہٹایا جاتا ہے تو کیا وقوع پذیر ہوتا ہے۔
توازن کے کسی محل کے قریب ک کی قیمت کو بالعموم شکل (دیکھو مساوات (۴۱))

$$\text{ک} = \text{ک}_{\text{ف}} + \frac{1}{2}\text{لا}^2\left(\frac{\text{جف}^2\text{ک}}{\text{جف لا}^2}\right)_{\text{ف}} + \frac{1}{6}\text{لا}^3\left(\frac{\text{جف}^3\text{ک}}{\text{جف لا}^3}\right)_{\text{ف}} + \frac{1}{24}\text{لا}^4\left(\frac{\text{جف}^4\text{ک}}{\text{جف لا}^4}\right)_{\text{ف}} + \cdots\cdots \quad (۴۳)$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

اگر $\frac{\text{جف}^2 \text{ک}}{\text{جف لا}^2}$ ف پر معدوم ہو تو ک ۔ $\text{ک}_{\text{ف}}$ کی قیمت میں سب سے اہم رقم وہ ہے جس میں لا^3 ہے۔ اس لیے

$$\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}} = \frac{1}{6}\text{لا}^3\left(\frac{\text{جف}^3\text{ک}}{\text{جف لا}^3}\right)_{\text{ف}}$$

ک ۔ $\text{ک}_{\text{ف}}$ علامت بدلتا ہے جبکہ وہ لا = ۰ میں سے گزرتا ہے جو توازن کی تشکیل ہے اور اس لیے ک کی ترسیم شکل (۱۰۲) جیسی ہے جس میں ایک افقی مماس ہے اور نقطہ ف انعطاف کا نقطہ ہے۔ ایک جانب توانائی بالقوہ ف پر کی توانائی بالقوہ سے کم ہے اور دوسری جانب زیادہ۔ (۱۸۲)

فرض کرو کہ ف کی ان دو جانبوں پر دو متصلہ تشکیلات ق، ق' ہیں۔ اگر نظام کو ق پر رکھا جائے تو اسے اس طرح حرکت کرنا چاہیے کہ توانائی بالقوہ گھٹے اور اس لیے اس کو ف سے دور حرکت کرنا چاہیے۔ اگر نظام کو ق' پر

رکھا جائے تو اُس کو اُسی سبب سے اولاً ف کی جانب حرکت کرنا چاہئیے لیکن وہ ف سے گذر کر پرے حرکت کرے گا اور ف سے پرے حرکت کرنا جاری رکھے گا کیونکہ وہ ساکن نہیں ہو سکتا تا آنکہ اس کی توانائی بالقوہ پھر ق پر کی توانائی بالقوہ کے مساوی نہ ہو جائے اور یہ ف کے قریب واقع نہیں ہو سکتا۔ اس لیے اگر نظام ف سے قریب کسی محل سے چلے تو وہ بالآخر ف سے دُور حرکت کرنے لگے گا۔ دوسرے الفاظ میں توازن غیر قائم ہے۔

پس اگر ف پر $\frac{\text{جف}^{۲}\text{ک}}{\text{جف لا}^{۲}} = ۰$ تو توازن بالعموم غیر قائم ہوتا ہے۔

لیکن وہ صورت مستثنیٰ ہوگی جبکہ $\frac{\text{جف}^{۳}\text{ک}}{\text{جف لا}^{۳}} = ۰$ کیونکہ اس صورت میں

$$\text{ک} - \text{ک}_{\text{ف}} = \frac{۱}{۲۴}\,\text{لا}^{۴}\left(\frac{\text{جف}^{۴}\text{ک}}{\text{جف لا}^{۴}}\right)_{\text{ف}}$$

اس صورت پر حسب دفعہ ۱۴۸ بحث کی جا سکتی ہے چنانچہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ $\left(\frac{\text{جف}^{۴}\text{ک}}{\text{جف لا}^{۴}}\right)_{\text{ف}}$ مثبت یا منفی ہو۔

۱۵۲۔ اس سے اعلیٰ تر درجوں کی نادر صورتوں پر اسی طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے چنانچہ ہمیں حسب ذیل عام قاعدے حاصل ہوتے ہیں:

اگر تفرقی سروں میں سے وہ پہلا تفرقی سر جو معدوم نہیں ہوتا طاق رتبہ کا ہے تو توازن غیر قائم ہوتا ہے۔

اگر تفرقی سروں میں سے وہ پہلا تفرقی سر جو معدوم نہیں ہوتا جفت رتبہ کا ہے تو توازن قائم یا غیر قائم ہوتا ہے بموجب اسکے کہ اس کی علامت مثبت یا منفی ہے۔

یہ ممکن ہے کہ تمام تفرقی سر معدوم ہوں، اِس صورت میں اس مسئلہ پر دوسرے طریقوں سے بحث کی جا سکتی ہے۔

مثالاً اگر توانائی بالقوہ

ک = لا^۲ تو^(۱/۲لا)

(۱۸۴)

شکل (۱۰۲)

کی شکل کی ہو تو تشکیل لا = ۰ میں تمام تفرقی سر معدوم ہوتے ہیں۔ تفاعل ک کی ترسیم کھینچنے پر معلوم ہوگا کہ توازن قائم ہے۔

یہ ہو سکتا ہے کہ ک کے تمام تفرقی سر اِس وجہ سے معدوم ہوں کہ اُس پورے علاقہ میں جو زیرِ بحث تشکیل کے گرد ہے ک مستقل ہے۔ اگر ایسا ہے تو نظام کو ہٹایا جا سکتا ہے اور کوئی قوت نہیں ہوگی جو اس کو اِس نئی تشکیل سے حرکت دے۔ ہر تشکیل توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس قسم کے توازن کو **تعدیلی توازن** کہتے ہیں۔

تعدیلی توازن کی ایک صورت مثال ۲ صفحہ ۲۵۸ میں واقع ہو چکی ہے، دروازہ جو قبضوں کے انتصابی خط کے گرد آزادانہ گھوم سکے۔ دوسری صورت ایک کرہ کی ہے جو افقی مستوی پر لڑھکتا ہو۔

نظامات جنکو آزادی کے مختلف درجے حاصل ہوں

۱۵۳۔ اب تک ہم نے صرف اُن نظامات پر بحث کی ہے جو تشکیلات کے صرف ایک سلسلہ میں سے حرکت کرنے پر مجبور تھے یعنی نظامات جن کو صرف آزادی کا ایک درجہ حاصل تھا۔ اُس نظام کی قائمیت یا غیر قائمیت متعین کرنے کا مسئلہ جس کو آزادی کے ایک سے زیادہ درجے حاصل ہوں زیادہ پیچیدہ ہے۔

اگر توازن کے محل میں توانائی بالقوہ مطلقاً اقل ہے اور اس لیے ہر ممکن حرکت سے توانائی بالقوہ میں اضافہ ہو جاتا ہے تو یہ توازن قائم ہوگا۔ اسکو اُسی استدلال سے ثابت کیا جا سکتا ہے جو اُس صورت میں استعمال کیا گیا تھا

جس میں آزادی کا صرف ایک درجہ حاصل تھا۔
اگر توانائی بالقوہ مطلقاً اقل نہیں ہے یعنی اگر ایسے ہٹاؤ ممکن ہیں جس میں توانائی بالقوہ گھٹتی ہے جبکہ نظام توازن کے محل سے حرکت کرتا ہے تو یہ تشکیل غیر قائم توازن کی تشکیل ہوگی۔ اس کو آئندہ ثابت کیا جائیگا کیونکہ اس باب کے طریقوں سے اسے ثابت نہیں کیا جا سکتا اور اس لئے ہم اس کو آئندہ کے لئے چھوڑتے ہیں (بارھواں باب)۔

عام مثالیں

(۱۸۵)

۱۔ ثابت کرو کہ ایک انجن کی اسپی طاقت جو س میل فی گھنٹہ کی چال سے ر پاؤنڈ کی مزاحمت پر غالب آتا ہے حسب ذیل ہے:

ر س ÷ ۳۷۵

۲۔ ایک ٹرین معہ حراکہ (انجن) ۵۰۰ ٹن وزنی ہے۔ اس کو ۳۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں شرح سے ہمواری پر متحرک رکھا گیا ہے، ہوا کی مزاحمت، رگڑ وغیرہ ۴۰ پونڈ فی ٹن ہیں۔ انجن کی اسپی طاقت معلوم کرو۔
اس اسپی طاقت میں کتنا اضافہ ہونا چاہئیے کہ اس کی شرح تو وہی رہے لیکن اس کے ساتھ ہی پٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی اس طور پر اوپر اٹھایا جائے کہ طے شدہ فاصلہ کے ہر فٹ پر اٹھائے ہوے پانی کی مقدار ۲۰ پونڈ ہو اور جس ارتفاع تک پانی اٹھایا گیا ہے وہ ۱۰ فٹ ہو۔ وہ توانائی بالحرکت جو پٹریوں کے درمیانی حصہ کا پانی حاصل کرتا ہے اور وہ توانائی بالحرکت جو اٹھائے ہوئے پانی کی (بلحاظ ٹیانک کے) ہے نظر انداز کردی گئی ہے۔

۳۔ ایک مخروطی پہاڑی کے رخ ایسی شکل کے ہیں کہ ایک معلومہ کمیت ان پر بغیر پھسلے عین ٹھیر سکتی ہے۔ ایک شخص چاہتا ہے کہ اس کمیت کو پہاڑی کے دامن کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک جو قبل الذکر نقطے کے متقاطر ہے حرکت دے۔ ثابت کرو کہ کمیت کو پہاڑی کے اوپر کھینچنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ اُس کام سے جو اس کو پہاڑی کے دامن کے گرد کھینچنے میں کرنا پڑتا ہے

نسبت ۲ : π میں کم ہے ۔

۴ ۔ ثابت کرو کہ وہ کام جو ایک شخص ایک وزن کو پہاڑی کے اوپر ایک معلوم نقطہ ا سے چوٹی ب تک کھینچنے میں انجام دیتا ہے صرف ا اور ب کے مقامات پر منحصر ہوتا ہے اور پہاڑی کی شکل پر منحصر نہیں ہوتا بشرطیکہ وہ ہمیشہ ا اور ب میں سے گذرنے والے انتصابی مستوی میں وزن کو کھینچے ۔

۵ ۔ ایک لچکدار رسی کے دو سروں کو شکل V کے لکڑی کے ایک ٹکڑے کی دو شاخوں سے باندھ کر ایک منجنیق بنائی گئی ہے، رسی کا طبعی طول ا ہے اور لچک کا مقیاس لہ ہے اور لکڑی کی شاخیں ایک دوسرے سے فاصلہ ل پر ہیں اور ل، ا سے بڑا ہے منجنیق کے وسطی نقطہ پر کمیت ک کا ایک پتھر رکھا گیا اور اسے پیچھے کی جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ رسی کا طول تن کر اپنے طبعی طول کا دگنا ہو گیا ۔ اب اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو معلوم کرو کہ وہ کس رفتار سے منجنیق سے نکلے گا ۔

۶ ۔ مثال ۵ میں اگر پتھر کو انتصاباً اوپر وار پھینکا جائے تو وہ ساکن ہونے سے بیشتر کتنی بلندی تک چڑھے گا ۔

۷ ۔ کمیت ک کا ایک ہار منکوں سے بنایا گیا ہے جو ایک تاگے میں جس کی لچک کا مقیاس لہ ہے پروئے گئے ہیں ۔ اس کو ایک چکنے قائم مستدیر مخروط کی سطح پر جس کا زاویہ راس ۲ عہ اور محور انتصابی ہے اس طرح سہارا گیا ہے کہ ہار ایک افقی مستوی میں ہے اور تاگا تنا ہوا نہیں ہے ۔ اگر ہار کو چھوڑ دیا جائے تو وہ ساکن ہونے سے بیشتر مخروط کے نیچے کتنا پھسلیگا ۔

۸ ۔ ایک اڑ پہیہ کا نصف قطر ۲ فٹ ۶ انچ ہے اور آروں وغیرہ کا وزن کور (Rim) کے مقابلہ میں نظر انداز کیا جا سکتا ہے ۔ پہیہ ایک ثابت محور کے گرد فی منٹ ۰ ۲۵ گردشوں کی شرح سے گھوم رہا ہے محور کا قطر ۳ انچ ہے اور پہیہ اور محور کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{۲۰}$ ہے ۔ اگر اس کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو رکنے سے قبل وہ کتنی گردشیں کرے گا ۔

۹ ۔ ایک مکڑی چھت سے ایک تاگے کے ذریعہ جس کی لچک کا مقیاس

(۱۸۶)

اُس کے وزن کے مساوی ہے لٹک رہی ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ چھت تک اتنا کام کر کے چڑھ سکتی ہے جو اُس کام کا صرف تین چوتھائی ہے جو مطلوب ہوتا اگر تاگا لچکدار نہ ہوتا ۔

۱۰ ۔ ایک مہین تاگے کے دو سروں سے دو مساوی وزن ف باندھ کر اِس کو دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے ۲ ا فاصلہ پر ہیں لٹکایا گیا ہے ۔ پھر کھونٹیوں کے درمیان تاگے کے حصہ کے وسطی نقطہ پر کمیت ق باندھ کر اِس کو جاذبہ کے تحت نیچے اترنے چھوڑ دیا گیا ۔ ثابت کرو کہ اِس کی رفتار گہرائی لا تک گرنے کے بعد حسب ذیل ہوگی :

$$\left\{\frac{\text{٢ ج}\,(\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2})\left(\text{ق لا} + \text{٢ ف ا} - \text{٢ ف}\sqrt{\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2}}\right)}{\text{ق}\,(\text{لا}^{2}+\text{ا}^{2}) + \text{٢ ف لا}^{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

۱۱ ۔ اگر یہ تسلیم کیا جائے کہ زمین کی بیرونی جانب کسی جسم پر زمین کی کشش اُس فاصلہ کے بالعکس متناسب ہے جو زمین کے مرکز اور جسم کے درمیان ہے تو معلوم کرو کہ زمین کی سطح سے ایک گولی کو انتصاباً اوپر وار کس رفتار سے فائر کرنا چاہیے کہ وہ کبھی زمین پر واپس نہ آسکے ۔

۱۲ ۔ ایک بھاپ ہتھوڑی جس کا وزن ۳۰ ٹن ہے کچھ تو اپنے وزن سے اور کچھ اُس بھاپ کے دباؤ سے نیچے دبائی جاتی ہے جو ایک انتصابی اسطوانہ میں ایک فشارہ پر جو ہتھوڑی کے ساتھ حرکت کرتا ہے عمل کرتا ہے ۔ فشارہ کا رقبہ چار مربع فٹ ہے اور بھاپ کا دباؤ ۲۲۵ پونڈ فی انچ ہے ۔ اگر ہتھوڑی کو اپنے بلاک سے ۲ فٹ اوپر اٹھایا جائے اور چھوڑ دیا جائے تو وہ رفتار معلوم کرو جس کے ساتھ وہ بلاک سے ٹکرائے گی ۔

۱۳ ۔ طول ل کے ایک یکساں ڈنڈے کے سِروں سے طول ا کی ایک ڈوری باندھی گئی ہے جو ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ ڈنڈا صرف افقی یا انتصابی محل میں لٹک سکتا ہے ، اِن محلوں کی قائمیت یا غیر قائمیت کا امتحان کرو ۔

۱۴ ۔ دو مساوی یکساں ڈنڈوں کو استوار طریقہ سے انگریزی حرف T کی شکل میں جوڑا گیا ہے اور پھر اِن کو نصف قطر ا کے ایک چکنے مستدیر اسطوانے پر سوار کیا گیا ہے

ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو جو توازن کی قائمیت کے مطابق ہو اگر ڈنڈے ایک انتصابی مُستوی میں جو اسطوانے کے طول پر عمود ہے رہنے کے لیے مقید ہوں ۔

۱۵ ۔ ایک پتھر کا مکعب جس کے کنارے کا طول ا ہے قطر ب کے ایک کھُردرے دائری کندے پر متناظراً ٹکا ہوا ہے اور اس کا قاعدہ کندے پر افقاً ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ ب > یا < ا ۔

۱۶ ۔ ایک جھونے والا پتھر ایک ثابت پتھر پر ٹکا ہوا ہے ، تماس کھُردرا ہے اور نقطہ تماس پر کا مشترک عماد انتصابی ہے ۔ اگر نقطہ تماس پر ان پتھروں کی سطحوں کے نصف قطر انحنا غہ اور غہَ ہوں اور اگر حرکت پذیر پتھر کے مرکز ثقل کا ارتفاع ف ہو تو ثابت کرو کہ جھونے والے پتھر کا توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{1}{ف} > یا < \frac{1}{غہ} + \frac{1}{غہَ}$$

(۱۸۷) ۱۷ ۔ طول ل اور وزن و کی ایک سیڑھی ایک کھُردرے فرش پر انتصابی محل میں اس طرح کھڑی ہے کہ ایک لچکدار ڈوری اس کے سب سے اونچے نقطہ سے اور چھت کے ایک ایسے نقطہ سے بندھی ہے جس کا ارتفاع فرش کے اوپر ب ہے اور ڈوری کا تناؤ ت ہے ۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہے بموجب اس کے کہ

$$ت > یا < \frac{و(ب-ل)}{۲ب}$$

۱۸ ۔ اگر مثال ۱۷ میں تناؤ و(ب-ل) | ۲ب کے مساوی ہو تو معلوم کرو کہ توازن قائم ہے یا غیر قائم ۔

۱۹ ۔ اگر مثال ۱۴ میں ڈنڈے فاصل طول کے ہوں جو قائمیت کو غیر قائمیت سے منفصل کرتا ہے تو ثابت کرو کہ توازن تعدیلی ہے اور اس لیے ڈنڈے بعض خاص حدود کے اندر کسی محل میں اُس مُستوی میں ساکن رہ سکتے ہیں جو اسطوانہ کے محور پر عمود ہے ۔

۲۰ ۔ ثابت کرو کہ مثال ماسبق کے ڈنڈے اُن ہٹاؤں کے لحاظ سے قائم

توازن میں ہیں جن میں ڈنڈوں کا مُستوی ایک انتصابی محور کے گرد گھومتا ہے،
اور وہ جفت معلوم کرو جو ڈنڈوں کو ایسے محل میں رکھنے کے لیے مطلوب ہے
جس میں مُستوی، اسطوانے کے محور کے ساتھ کوئی معلومہ زاویہ طہ بنائے۔

۲۱۔ مثال ماسبق میں ڈنڈوں کا وہ چھوٹے سے چھوٹا طول معلوم کرو کہ تمام
ممکن ہٹاؤں کے لیے توازن قائم ہو سکے۔

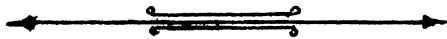
۲۲۔ سخت اُبلے ہوئے انڈے کے چپٹے اور نوکدار بیروں پر نصف قطر
انحنا علی الترتیب ا اور ب ہیں اور انڈے کو ایک کھردرے افقی سطح پر اس کے
چپٹے سرے کے بل عین متوازن کھڑا کیا جا سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کو اس کے
نوکدار سرے پر ایک نیم کروی برتن کے اندر جس کا نصف قطر

$$\frac{ب\,(ج - ا)}{ج - ب - ا}$$

سے کم ہو متوازن کھڑا کیا جا سکتا ہے جہاں ج انڈے کے طول ترین محور کا طول
ہے۔ اگر برتن کا نصف قطر فاصل طول کے عین مساوی ہو تو معلوم کرو کہ توازن
قائم ہو گا یا غیر قائم۔

۲۳۔ تین متساوی الفصل چکنی کھونٹیاں ا، ب، ج ایک ہی افقی
خط میں ہیں اور ایک وزندار یکساں ڈوری کے سرے ا اور ج سے بندھے
ہیں اور ڈوری کو ب پر حلقہ بناتے ہوئے گذارا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب
زنجیرے اب، ب ج نامساوی ہوں تو یہ ہو سکتا ہے کہ توازن کا کوئی محل
ہو یا نہ ہو اور اگر ایسا کوئی محل ہے تو یہ توازن قائم ہو گا۔

نیز ثابت کرو کہ توازن کا وہ محل جس میں ڈوری کا وسطی نقطہ ب پر ہے
غیر قائم یا قائم ہے بموجب اس کے کہ توازن کا غیر متشاکل محل موجود یا غیر موجود ہو۔

(۱۸۸)

آٹھواں باب

مستقل قوتوں کے تحت ذرہ کی حرکت

۱۵۴ ـ کسی واحد ذرہ کی حرکت کی سادہ ترین مثال اُس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ ذرہ صرف مستقل قوتوں کے زیر عمل ہو اور ایک خط مستقیم میں حرکت کرے ـ

اگر ذرہ کی حرکت کی سمت میں قوت کا جزو ترکیبی ف ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے اسراع ع مساوات

ف = ک ع

سے حاصل ہوگا جہاں ک، ذرہ کی کمیت ہے ـ چونکہ بموجب فرض قوتیں مستقل ہیں اسراع ع بھی مستقل ہے ـ

فرض کرو کہ ذرہ رفتار ۶ سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مستقل اسراع ع کے ساتھ حرکت کرتا ہے ـ وقت ت میں رفتار میں اضافہ ع ت ہے اور اس لیے وقت ت کے بعد کل رفتار ۶ + ع ت ہے ـ اس رفتار کو و سے تعبیر کرو تو

و = ۶ + ع ت . . . . (۴۴)

تعریف کی بموجب و = $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$ جہاں س، وہ فاصلہ ہے جو حرکت کی ابتدا سے طے ہوا ہے ـ اس لیے

$$\frac{\text{ذ س}}{\text{ذ ت}} = \text{ء} + \text{ع ت}$$

اِس مساوات سے کسی لمحہ پر س کے اضافہ کی شرح معلوم ہوتی ہے۔اس کا تکمل کرنے سے

$$\text{س} = \text{ء ت} + \tfrac{1}{2}\,\text{ع ت}^{2} \qquad (۴۵)$$

تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے کیونکہ وقت ت = ۰ پر فاصلہ طے شدہ (حسب تعریف) س صفر ہونا چاہیئے۔

مساوات (۴۴) سے ء = و − ع ت اور اس لیے مساوات (۴۵) لکھی جا سکتی ہے

$$\text{س} = \text{و ت} - \tfrac{1}{2}\,\text{ع ت}^{2} \qquad (۴۶)$$

اِس مساوات سے وقت ت میں طے شدہ فاصلہ معلوم ہوتا ہے (۱۸۹)
جبکہ رفتار و معلوم ہو جہاں و فاصلہ طے شدہ کے ختم پر ذرہ کی رفتار ہے۔

مساواتوں (۴۵) اور (۴۶) کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{س} = \tfrac{1}{2}\,(\text{ء} + \text{و})\,\text{ت} \qquad (۴۷)$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ فاصلہ طے شدہ، ء ت اور و ت کا اوسط حسابی ہے، ء ت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی ابتدائی رفتار ء پورے وقت ت میں قائم رکھتا اور و ت وہ فاصلہ ہے جو طے ہوتا اگر ذرہ اپنی آخری رفتار و پورے وقت ت میں قائم رکھتا۔

مساوات (۴۴) کو شکل

$$\text{ع ت} = (\text{و} - \text{ء})$$

میں رکھو اور ت کو اس مساوات اور مساوات (۴۷) سے ساقط کرو تو حاصل ہوگا

$$\text{۲ ع س} = \text{و}^{2} - \text{ء}^{2} \qquad (۴۸)$$

یہ وہ مساوات ہے جو طے شدہ فاصلہ کو ابتدائی اور آخری رفتاروں کے ساتھ مربوط کرتی ہے۔

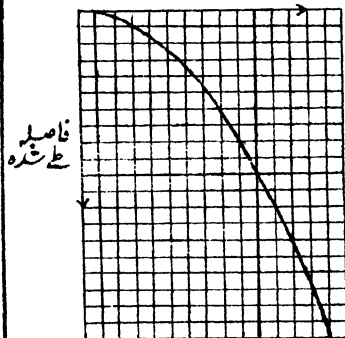
یہ آخری مساوات توانائی کی مساوات سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔ چونکہ ذرہ پر جو کام ہوا ہے وہ اس کی توانائی بالحرکت کی تبدیلی کے مساوی ہے اس لیے

$$ف س = \frac{1}{2} ک و^2 - \frac{1}{2} ک ع^2$$

اور چونکہ ف = ک ء اس لیے مساوات (۴۸) فوراً حاصل ہو جاتی ہے۔

جسم جو جاذبہ کے تحت گرے

۱۵۵ — ان مساواتوں کا سادہ ترین اطلاق اس صورت پر ہوتا ہے جبکہ کوئی جسم جاذبہ کے زیر اثر آزادانہ گر رہا ہو۔ اس صورت میں اسراع ج ہے اگر جسم سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو ہم ع = ۰ رکھتے ہیں اور س کو انتصاباً نیچے وار پیمائش کرتے ہیں۔ مساوات (۴۵) سے معلوم ہوگا کہ وقت ت کے ختم پر جسم نے فاصلہ $\frac{1}{2}$ ج $ت^2$ طے کیا ہے اور اس کی رفتار ج ت ہے۔ فاصلہ ف تک گرنے پر اس کی رفتار حسب مساوات (۴۸) $\sqrt{۲ ج ف}$ کے مساوی ہے۔ اس کو بالعموم یوں بیان کرتے ہیں کہ وہ "رفتار بوجہ ارتفاع ف" ہے۔

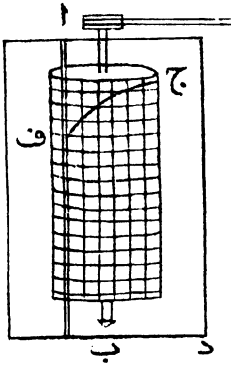
وقت

فاصلہ طے شدہ

شکل (۱۰۳)

ہم دیکھتے ہیں کہ طے شدہ فاصلہ اس وقت کے مربع کے متناسب ہے جس میں جسم گرتا رہا ہے۔ شکل (۱۰۳) میں وقت کو افقاً پیمائش کیا گیا ہے اور فاصلہ طے شدہ کو انتصاباً۔ جلی منحنی سے فاصلہ طے شدہ کی ترسیمی تعبیر حاصل ہوتی ہے۔ افقی فاصلہ کو لا سے اور انتصابی فاصلہ کو ما سے تعبیر کیا جائے تو لا = ت اور ما = $\frac{1}{2}$ ج $ت^2$ اور

اور اس لیے

$$ما = \frac{1}{2} ج لا^2$$

۱۵۶ – یہ ایک قطع مکافی کی مساوات ہے۔ اس ترسیم کو تجربتاً اس طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جو مارن (Morin) کا طریقہ کہلاتا ہے۔ وزن ف ایک سوراخ میں جو ایک ڈنڈے ا ب میں بنا ہوا ہوتا ہے انتصاباً گرنے میں آزاد ہوتا ہے اور یہ انتظام کیا جاتا ہے کہ جب وہ گرتا ہے تو اس سے لگی ہوئی ایک پنسل ڈھول ج د پر جس میں کاغذ لگا ہوا ہوتا ہے نشان ڈالتی جاتی ہے۔ ڈھول کو یکساں طور پر گھمایا جاتا ہے۔ کاغذ کو ڈھول سے جدا کر لینے پر شکل (۱۰۳) کی ترسیم حاصل ہوتی ہے کیونکہ افقی فاصلہ وقت کے متناسب ہوتا ہے اور انتصابی فاصلہ وہ فاصلہ ہوتا ہے جس میں سے وزن گرتا ہے۔ یہ واقعہ کہ اس طریقہ سے حاصل شدہ منحنی ٹھیک طور پر مکافی ہوتا ہے اس حقیقت کا تجربی ثبوت ہے کہ جاذبہ کے تحت حرکت **یکساں** اسراع کی حرکت ہوتی ہے۔

شکل (۱۰۴)

۱۵۷ – اگر جسم کو انتصاباً اوپر وار رفتار ع سے پھینکا جائے تو فاصلہ س کی پیمائش انتصاباً اوپر وار ہو سکتی ہے اور اس سمت میں اسراع – ج ہوگا۔ چنانچہ حاصل ہوگا

$$س = ع ت - \frac{1}{2} ج ت^2 ،$$

$$و = ع - ج ت ،$$

$$۲ ج س = ع^2 - و^2$$

جہاں س وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں اوپر وار طے ہوا ہے اور و اوپر وار

رفتار ہے پہلی مساوات سے ہم دیکھتے ہیں کہ س = ۰ نہ صرف اس وقت جبکہ ت = ۰ بلکہ اس وقت بھی جبکہ ت = $\frac{۲ع}{ج}$ ۔ اس لیے ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر وقت $\frac{۲ع}{ج}$ کے بعد واپس پہنچتا ہے ۔جب س = ۰ تو تیسری مساوات سے $ع^۲ = و^۲$ حاصل ہوتا ہے اس لیے جب ذرہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آتا ہے تو اس کی رفتار وہی ہوتی ہے جو یہاں سے نکلتے وقت اس کی تھی ۔ صریحاً ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ توانائی بالقوہ وہی ہوتی ہے اور اسلیے توانائی بالحرکت بھی وہی ۔

مثالیں

۱۔ اگر ایک اکسپرس ٹرین کو دو حصوں میں جدا کر کے نصف اول کو ۵ منٹ قبل چلا دیا گیا ہو اور ٹرین ایک میل تک مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے کے بعد اپنی اعظم رفتار ۴۸ میل فی گھنٹہ حاصل کرے تو ثابت کرو کہ یہ دو نصف حصے ایک دوسرے سے ۴ میل کے فاصلہ سے حرکت کریں گے لیکن نصف اول نصف دوم کے نکلنے سے پیشتر ۳ میل جا چکا ہوگا ۔

۲ ۔ ایک ٹرین دوسری ٹرین سے جو متوازی پٹڑیوں پر دوڑ رہی ہے گذر جاتی ہے، اول الذکر کی رفتار ۴۵ میل فی گھنٹہ اور اسراع ایک فٹ فی ثانیہ ہے، دوسری کی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ اور اسراع ۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ ہے ۔ یہ دوسری ٹرین پھر کب پہلی ٹرین کو ملا لے گی اور اس اثناء میں دونوں کتنا فاصلہ طے کر چکی ہوں گی ۔

۳ ۔ ایک جسم کو ایک غبارے سے جو زمین سے ۷۰ فٹ اونچا ہے گرایا گیا ہے ۔ اس کی رفتار زمین پر پہنچنے پر معلوم کرو اگر غبارہ ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے (ا) چڑھ رہا ہو (ب) اتر رہا ہو ۔

۴ ۔ ایک پتھر کو ایک کنویں میں چھوڑا گیا تو پانی سے ٹکرانے کی آواز ۹ ثانیہ بعد

کنوئیں کے سرے پر سنائی دی۔ کنوئیں کی گہرائی معلوم کرو اگر آواز کی رفتار ۱۱۰۰ فٹ فی ثانیہ ہو۔

۵۔ ایک آلہ بار بردار ۵ فٹ فی ثانیہ کے اسراع سے نیچے اترتا ہے یہاں تک کہ اس کی رفتار ۳۰ فٹ فی ثانیہ ہو جاتی ہے اور اس کے بعد اس کی رفتار مستقل رہتی ہے۔ اترنا شروع کرنے کے ۶ ثانیہ بعد ایک پتھر اس نقطہ سے جہاں سے وہ چلا تھا اس پر گرایا جاتا ہے۔ پتھر کسقدر جلد اس سے جا لگے گا۔

۶۔ ایک بازیگر تین گولوں کو ایک ہاتھ سے اس طرح اچھالتا ہے کہ کسی آن دو گولے ہوا میں رہتے ہیں اور ایک اس کے ہاتھ میں۔ اگر ہر گولہ ۴ فٹ تک اونچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں ایک گولا اس کے ہاتھ میں رہتا ہے $\frac{1}{2}$ ثانیہ ہے۔

(۱۹۲) ۷۔ یہ مشاہدہ کیا گیا کہ ایک جسم جہاز کے دروازہ کے راستہ سے اس کے پیٹے کی تہ تک گرنے میں جو گ فٹ گہرا ہے ت ثانئے لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ فاصلہ

$$\frac{1}{2}ج\left(\frac{گ}{ج\,ت}+\frac{1}{2}ت\right)^2 \text{ فٹ}$$

میں سے گرتا ہے اور رفتار

$$\frac{گ}{ت}+\frac{1}{2}ج\,ت \text{ فٹ فی ثانیہ}$$

سے تہ پر ٹکراتا ہے۔

۸۔ ۱۲ فٹ لمبی زنجیر اپنے اوپر کے سرے سے لٹک رہی ہے۔ اگر اس سرے کو چھوڑ دیا جائے تو وہ وقت معلوم کرو جو زنجیر ایک نقطہ سے جو ابتدائی محل کے بلند ترین نقطہ سے ۶۰ فٹ نیچے ہے گذرنے میں لے گی۔

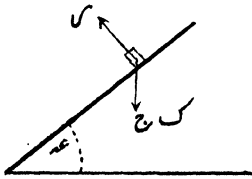
۹۔ ایک جسم جس کی کمیت ۵ پونڈ ہے اور جو ۱۶۰ فٹ فی ثانیہ کی چال سے حرکت کر رہا ہے دفعتاً ایک مستقل مزاحمت کے مقابل ہوتا ہے جو $\frac{1}{4}$ پونڈ وزن کے مساوی ہے، یہ مزاحمت اس وقت تک رہتی ہے کہ

اس کی رفتار ۹۶ فٹ ہو جاتی ہے۔ کتنی دیر تک اور کتنے فاصلہ تک مزاحمت عمل کرتی ہے۔

۱۰۔ مال کے دو ڈبے باہم جوڑے گئے ہیں اور انہیں افقی پٹڑیوں پر یکساں قوت سے کھینچا گیا ہے چنانچہ وہ سکون سے حرکت کر کے پہلے دس ثانیوں میں ۱۰۰ فٹ کا فاصلہ طے کرتے ہیں۔ اس کے بعد پچھلے ڈبے کو جدا کیا گیا تو معلوم ہوا کہ دوسرے دس ثانیوں میں ان دو ڈبوں کے درمیان فاصلہ ۱۵۰ فٹ ہے۔ ڈبوں کی کمیتوں کا مقابلہ کرو جبکہ ہوا وغیرہ کی کل مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہو۔

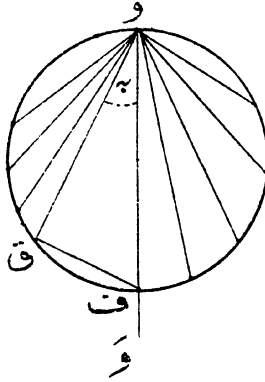
۱۱۔ ایک غبارہ جس کا وزن و ہے اسراع ع سے چڑھ رہا ہے۔ اگر اس میں سے وزن وَ کی ریت نکال لی جائے تو غبارے کے اسراع میں اضافہ معلوم کرو جبکہ ہوا کی مزاحمت اور ریت کا تیراؤ نظر انداز کئے گئے ہوں۔

مائل مستوی پر حرکت

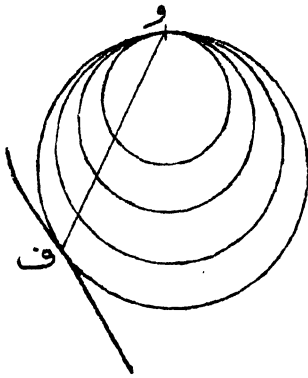
۱۵۸۔ فرض کرو کہ ہم ایک ذرہ کو ایک مائل مستوی پر نیچے پھسلنے دیتے ہیں جبکہ ان دو کے درمیان تماس کامل چکنا تسلیم کر لیا گیا ہو۔ اگر ذرہ کی کمیت ک ہے تو اس پر عمل کرنے والی قوتیں دو ہیں، اس کا وزن ک ج اور تعامل ر جو مستوی پر عمود ہے۔ وزن کا جزو ترکیبی مستوی کے نیچے وار ک ج جیب عہ ہے اور اس لیے ذرہ یکساں اسراع ج جیب عہ سے حرکت کرتا ہے۔

شکل (۱۰۵)

وقت ت میں جو فاصلہ طے ہوتا ہے اس کو معمولی ضابطوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر ذرہ حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرے تو وقت ت میں وہ فاصلہ $\frac{1}{2}$ ج جیب عہ × ت^2 طے کرے گا۔

۱۵۹۔ فرض کرو کہ نقطہ و سے بہت سے چکنے تار جن میں چکنے منکے آزادانہ

(۱۹۳) پھسل سکتے ہیں لگائے گئے ہیں۔فرض کروکہ یہ تار سمت انتصابی کے ساتھ تمام ممکن زاوئے بناتے ہیں اوران میں سے ایک تار و وَ انتصابی ہے۔ خیال کروکہ سب منکے نقطہ و پر جمع ہیں اورایک ساتھ چھوڑے گئے ہیں۔ وقت ت کے بعد فرض کروکہ وہ منکا جو انتصاباً گررہا ہے نقطہ ف پر ہے اوروہ منکا جو اُس تار پر پھسلتا ہے جو انتصابی سے زاویہ ہ بناتا ہے نقطہ ق پر ہے۔ یہ دوسرا منکا اسراع ج جم ہ سے حرکت کرتا ہے۔

شکل (۱۰۶)

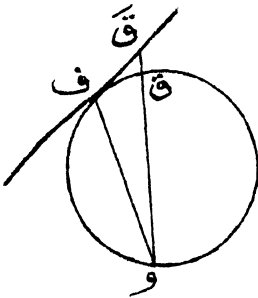
پس و ف = $\frac{1}{2}$ ج ت^2 اور و ق = $\frac{1}{2}$ ج جم ہ × ت^2، اس لیے و ق = و ف جم ہ اوراس لیے و ق ف قائمہ زاویہ ہے۔اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ق اُس کرہ پر ہے جس کو قطر و ف پر بنایا گیا ہواور صریحاً یہ ہر دیگر منکے کے لیے دُرست ہے۔اِس طرح کسی لمحہ پر تمام منکے اُس کرہ پر ہونگے جس کا بلند ترین نقطہ و ہےاور جس کا زیر ترین نقطہ و کے نیچے $\frac{1}{2}$ ج ت^2 فاصلہ پر ہے۔پس جب حرکت جاری رہتی ہے تو منکے ایک کرہ بناتے ہوئے نظر آئیں گے جو جسامت میں مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس کا بلند ترین نقطہ و پر ساکن رہے گا اور زیر ترین نقطہ جاذبہ کے تحت آزادانہ گرتا ہوا معلوم ہوگا۔

۱۶۰ — اِس خیالی تجربہ سے ایک عملی مسئلہ کو حل کرنے کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔فرض کروکہ ہم ایک چکنے مستوی یا تار کو ایسے محل میں رکھنا چاہتے ہیں کہ ایک ذرہ ایک ثابت نقطہ و سے مستوی یا تار پر نیچے گذرتے ہوئے ایک معلومہ ثابت سطح تک کم سے کم ممکن وقت میں پہنچ جائے۔فرض کروکہ

ہم تاروں اور منکوں کے آلہ کو و پر رکھتے ہیں اور منکوں کو ایک ساتھ چھوڑتے ہیں اور اس کرہ کی جسامت کا اضافہ مشاہدہ کرتے ہیں جو منکوں سے بنتا ہے۔ جوں ہی کرہ ایسی جسامت اختیار کرتا ہے کہ وہ ثابت سطح کو کسی نقطہ ف پر مس کرنے لگتا ہے منکوں میں سے ایک منکا اس سطح پر پہنچ چکتا ہے اور مزید برین دوسرے

شکل (۱۰۷)

(۱۹۴)

منکوں کی بہ نسبت کم وقت میں پہنچ جاتا ہے۔ اس لیے اس نے و سے سطح تک وہ راستہ اختیار کیا ہے جس پر سے وہ سطح تک جلد سے جلد پہنچ جاتا ہے۔ یہ راستہ و ف ہے اور اب ہم اس راستہ کا تعین بغیر تجربہ کی تکمیل کے کر سکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ وہ کرہ جس کا بلند ترین نقطہ و ہے اور جو ف میں سے گذرتا ہے سطح کو ف پر مس کرنا چاہیئے۔

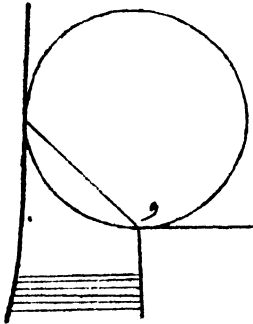
اسی طرح اگر ہم وہ اقل وقت معلوم کرنا چاہیں جس میں ذرہ ایک سطح سے اس کے نیچے کے ایک ثابت نقطہ و تک حرکت کرتا ہے تو ایک ایسا کرہ معلوم کرنا ہوگا جو سطح کو نقطہ ف پر مس کرے اور اس کا زیریں ترین نقطہ و ہو۔ تب و ف مطلوبہ راستہ ہوگا۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ اس کرہ کے ان تمام وتروں پر سے گذرنے میں جو و میں سے کھینچے گئے ہوں جو وقت صرف ہوتا ہے ایک ہی ہے اس لئے ف و پر سے

شکل (۱۰۸)

گذرنے میں جو وقت صرف ہوگا وہ اُس وقت کے مساوی ہے جو کسی وتر
ق و پر سے گذرنے میں صرف ہوتا ہے اور اس لیے یہ وقت اُس وقت
سے کم ہے جو سطح سے ق تک پورے راستہ قَ و پر سے گذرنے میں
لگتا ہے کیونکہ ق و اِس راستہ کا ایک حصہ ہے۔

توضیحی مثال

ایک جہاز اپنے چبوترے سے کچھ فاصلہ پر کھڑا ہے
اور جہاز کے رُخ کے کسی نقطہ پر چبوترے سے ایک تختہ
اس طرح رکھنا مطلوب ہے کہ تختہ پر جہاز سے چبوترے تک
پھسلنے کا وقت حتی الامکان کم سے کم ہو۔

صریحاً تختہ کا نچلا سِرا چبوترے کے قریب ترین نقطہ و پر ٹکنا چاہئے اور مسئلہ کا
حل اس مسئلہ پر منحصر ہو جاتا ہے کہ ایک کرہ کھینچا جائے جس کا زیر ترین نقطہ و ہو اور
وہ جہاز کے رُخ کو مس کرے۔ یہ تسلیم
کرکے کہ جہاز کا رُخ انتصابی ہے تختہ کے
سروں پر کرہ کے مماس افقی اور انتصابی
ہونے چاہئیں اور اس لیے تختہ کو اس طرح
رکھنا چاہیئے کہ وہ سمت انتصابی کے ساتھ
۴۵° کا زاویہ بنائے۔

(۱۹۵)

شکل (۱۰۹)

مثالیں

۱۔ ایک جسم کو مائل مستوی پر جس کا زاویہ میلان ۴۵° ہے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے
پھینکا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ وہ مستوی کے اوپر کتنی دور جائے گا اور اوپر جانے میں
کتنا وقت لگے گا۔

۲ ۔ دو ذرّے ایک دوہرے مائل مستوی کے دو رخوں پر جن کے میلان

ع اور ب ہیں نیچے پھسلتے ہیں مستوی کے قاعدے تک پہنچنے میں جو اوقات وہ لیتے ہیں اُن کا مقابلہ کرو اور نیز اُنکی رفتاروں کا مقابلہ بھی کرو۔

۳۔ طول ل اور ارتفاع ف کے ایک مائل مستوی پر اس کی چوٹی سے ایک جسم نیچے پھینکا گیا ہے اور اُسی آن ایک دوسرے ذرہ کو انتصاباً نیچے گرنیکے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر دونوں ذرّے قاعدہ سے ایک ہی وقت ٹکرائیں تو ثابت کرو کہ پہلے ذرہ کی رفتار پھینکتے وقت

$$\frac{ل^2 - ف^2}{ل}\sqrt{\frac{ج}{2ف}}$$

ہونی چاہیے۔

۴۔ ایک ثابت نقطے سے ایک دائرہ تک جو اُسی مستوی میں ہے سریع ترین اُتار کا خط معلوم کرنے کے لیے عمل دریافت کرو۔

۵۔ ذرّے متعدد تاروں پر جو ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں نیچے پھسل رہے ہیں، اِن ذروں نے اس نقطہ سے حالت سکون سے ایک ساتھ حرکت شروع کی تھی۔ ثابت کرو کہ کسی لمحہ پر اِن کی رفتاروں میں وہی نسبت ہے جو اِن کے طے کردہ فاصلوں میں ہے۔

۶۔ ریل کا ایک ڈبہ ایک سطح مائل پر جس کا میلان ۲۵۰ میں ۱ ہے ۱۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے نیچے حرکت کرتا ہے اور سطح کے پائیں پر پہنچنے کے بعد ہموار سطح پر حرکت جاری رکھتا ہے۔ معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی دور حرکت کر سکے گا جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ مزاحمت مستقل ہے اور حرکت کی ہر منزل میں وہی ہے۔

۷۔ اگر ایک موٹر گاڑی جو ۱۰۰ کیلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہو ۲۰۰ میٹر کے فاصلہ میں رد کی جا سکے تو ثابت کرو کہ بریک گاڑی کو تقریباً ۵ میں ۱ میلان پر ٹھیرا سکتے ہیں۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جس میں گاڑی کو ساکن کیا جا سکتا ہے۔

۸۔ ۱۲ ٹن وزنی ڈبہ ایک ٹرین سے جو ۲۵۰ میں ۱ میلان پر نیچے ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دوڑ رہی ہے الگ ہو جاتا ہے۔ رگڑ کی مزاحمت ۴۰ پونڈ وزن

فی ٹن ہے ۔ معلوم کرو کہ ڈبہ ساکن ہونے سے پیشتر کتنی دُور جائے گا ۔

۹ ۔ حراکہ کی کھینچ ایک ٹرین کی حرکت پر معمولی مزاحمتوں کے مقابلہ میں اسکے کُل وزن کا $\frac{1}{5}$ بڑی ہے، اور جب بریک پوری طرح ڈالے جاتے ہیں تو کُل مزاحمت اسکے وزن کا $\frac{1}{15}$ واں حصہ ہوتی ہے ۔ وہ کم سے کم وقت معلوم کرو جس میں ٹرین ہموار سطح پر دو اسٹیشنوں کے درمیان جن کا درمیانی فاصلہ تین میل ہے اور جہاں گاڑی ٹھیرتی ہے سفر کر سکتی ہے ۔

۱۰ ۔ مثال ماسبق میں وقت معلوم کرو اگر راستہ ۱۰۰ میں ۱ میلان پر ہو ۔

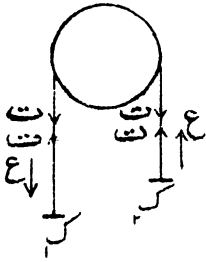
ایٹوڈ کی مشین

۱۶۱ ۔ اگر کوئی جسم جاذبہ کے تحت آزادانہ گر رہا ہو تو راست مشاہدات سے اُس اسراع کو پیمائش کرنا مشکل ہوتا ہے جو جاذبہ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے کیونکہ یا تو وہ فاصلہ جس میں سے جسم گرا ہے بہت بڑا ہونا چاہیئے یا گرنے کا وقت بہت کم ہونا چاہیئے ۔ یہ مشکلیں کچھ حد تک اُس مشین سے رفع ہوتی ہیں جو ایٹوڈ کی تجویز کردہ ہے ۔

(۱۹۶) اگر ایک ڈوری کو جس کے سروں سے دو مساوی اوزان بندھے ہوں ایک چکنی انتصابی چرخی پر اس طرح رکھا جائے کہ اوزان آزادانہ لٹکیں تو یہ ظاہر ہے کہ توازن ہوگا ۔ اگر اوزان نامساوی ہوں تو توازن موجود نہیں ہو سکتا ۔ ایٹوڈ کی مشین میں ان اوزان کے درمیان فرق کم رکھا جاتا ہے، اس لئے حرکت سُست ہوتی ہے اور اس کی پیمائش آسانی سے کی جا سکتی ہے ۔

فرض کرو کہ اوزان کی کمیتیں $ک_1$، $ک_2$ ہیں جن میں سے $ک_1$ بڑا ہے ۔

فرض کرو کہ جب اِن اوزان کو آزاد چھوڑ دیا جاتا ہے تو $ک_1$ اسراع ع سے نیچے اُترتا ہے ۔ ڈوری کو ناامتداد پذیر سمجھنے سے $ک_2$ کو اسراع ع سے اوپر چڑھنا چاہیئے ۔

فرض کرو کہ ڈوری غیر وزنی ہے اور اس لیے اس کے کسی عنصر کی کمیت کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے ۔ پس حرکت کے دوسرے قانون سے

معلوم ہوتا ہے کہ ڈوری کے کسی عنصر پر عمل کرنے والی حاصل قوت معدوم ہونی چاہئے۔ اس لیے ڈوری پر عمل کرنے والی قوتیں توازن میں ہونی چاہئیں (اگرچہ کہ ڈوری ساکن نہیں ہے) اور اس لیے حسب دفعہ (۵۴) تمام نقطوں پر تناؤ وہی ہونا چاہئے، فرض کرو کہ یہ تناؤ ت ہے۔

شکل (۱۱۰)

کمیتوں ک$_1$، ک$_2$ میں سے ہر ایک پر عمل کرنے والی قوتیں اس کے وزن پر جو نیچے وار عمل کرتا ہے اور ڈوری کے تناؤ پر جو اوپر وار عمل کرتا ہے مشتمل ہیں۔ اس لیے ان دو کمیتوں پر نیچے وار حاصل قوتیں علی الترتیب ک$_1$ ج ـ ت اور ک$_2$ ج ـ ت ہیں۔ پس حرکت کی مساواتیں ہیں

ک$_1$ ج ـ ت = ک$_1$ ع

ک$_2$ ج ـ ت = ـ ک$_2$ ع

اگر ت کو ساقط کیا جائے تو

$$ع = \frac{ک_1 - ک_2}{ک_1 + ک_2} ج \quad (۴۹)$$

جس سے اسراع معلوم ہوتا ہے۔ اگر ع کو ساقط کیا جائے تو ت کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$ت = \frac{۲ ک_1 ک_2}{ک_1 + ک_2} ج \quad (۵۰)$$

یہ ظاہر ہے کہ اگر ک$_1$ تقریباً ک$_2$ کے مساوی ہو تو اسراع چھوٹا ہو گا۔ مثلاً اگر اوزان ۱۰۰ اور ۱۰۱ گرام ہوں تو

$$ع = \frac{۱}{۲۰۱} ج = ۱۶ء، فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ$$

اتنا چھوٹا اسراع آسانی سے پیمائش کیا جا سکتا ہے کیونکہ زیادہ وزنی کمیت (۱۹۷)
۱۰ ثانیوں میں صرف ۸ فٹ نیچے اُترے گی۔ عملاً یہ دشواری پیدا ہوتی ہے کہ اگر وزنوں کے فرق کو بہت چھوٹا کر دیا جائے تو چرخی پر عمل کرنے والی قوتیں اس قدر برابر متوازن ہوتی ہیں کہ ان کا فرق سہاروں کی رگڑ وغیرہ پر غالب آنے کے لیے کافی نہیں ہوتا۔

متحرک فریم کے حوالے سے حرکت

۱۶۲ — ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲۵) کہ حرکت کا دوسرا قانون درست رہتا ہے جبکہ حرکت کو ایک ایسے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا گیا ہو جو ساکن نہیں ہے بلکہ ایکساں رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اب اِس قانون میں ترمیم کرنا آسان ہے جبکہ حوالے کا فریم ایک معلومہ اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ حوالے کے فریم کا اسراع عہ ہے اور فرض کرو کہ اس اسراع عہ کی سمت میں ایک متحرک ذرہ کے اسراع کا جزو ترکیبی ع ہے اور فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا جزو ترکیبی اِس سمت میں ف ہے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے

$$ف = ک\,عَ \qquad (۵۱)$$

جہاں عَ وہ ترکیبی اسراع ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے لیکن اِس اسراع عَ کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے جن میں سے ایک ذرہ کا اسراع ع ہے جو متحرک حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے اور دوسرا اس فریم کا اسراع عہ ہے جو ساکن حوالے کے فریم کے لحاظ سے ہے۔ چونکہ یہ سب اسراع ایک ہی سمت میں ہیں اس لیے عَ = ع + عہ اور اسلیے مساوات (۵۱) ہو جاتی ہے

$$ف = ک\,(ع + عہ)$$

اِس کو ہم شکل

$$ف - ک\,عہ = ک\,ع \qquad (۵۲)$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ حرکت وہی ہے گویا کہ فریم ساکن ہے بشرطیکہ ہم خیال کریں کہ قوت ف کو بقدر ک عہ کے گھٹا دیا گیا ہے۔

اِس نتیجہ کی طبیعی توجیہ آسانی سے کی جا سکتی ہے۔ قوت ف کا ایک حصہ جو ک عہ کے مساوی ہے ذرہ کو متحرک حوالے کے فریم کی حرکت کے ساتھ متحرک کرنے میں صرف ہوتا ہے۔ صرف مابقی حصہ ف ۔ ک عہ ہی ہے جو متحرک فریم کے لحاظ سے اسراع پیدا کرنے میں کارآمد ہے۔

۱۶۳ ۔ فریم جو انتصابی اسراع کے ساتھ حرکت کرے۔ (۱۹۸)

اگر حوالے کا فریم اسراع عہ کے ساتھ نیچے وار انتصاباً حرکت کرے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس فریم کے لحاظ سے اسراعوں کو پیمائش کرنے سے پیشتر کمیت ک کے ہر ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کے انتصابی جزو ترکیبی کو بقدر ک عہ کے تخفیف شدہ سمجھنا چاہئے۔ خواہ کوئی قوتیں عمل کریں اِن میں ذروں کے اوزان ک ج وغیرہ ضرور ہوں گے۔ ہم بہ آسانی تخفیف ک عہ کو ان سے وضع کردہ فرض کر سکتے ہیں چنانچہ کسی ذرہ کے وزن کو ک ج لینے کی بجائے ک (ج ۔ عہ) لینا ہوگا۔

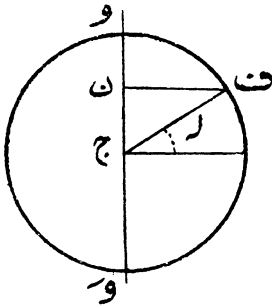
اِس طرح حوالے کے فریم کے اسراع کی رعایت یہ فرض کرکے رکھی جا سکتی ہے کہ اسراع بوجہ جاذبہ ج کی بجائے ج ۔ عہ میں تخفیف ہوا ہے۔

مثلاً اگر ایٹوڈ کی مشین کو آلہ باربردار میں رکھا جائے تو اُس آن جس پر آلہ کا اسراع اوپر وار عہ ہو کمیتوں کا اسراع مشین کے لحاظ سے (مقابلہ کرو مساوات ۹۴ کے ساتھ)

$$ع = \frac{ک_۲ - ک_۱}{ک_۱ + ک_۲} (ج + عہ)$$

ہوگا اور ڈوری کا تناؤ (دیکھو مساوات (۵۰))

$$ت = \frac{۲ک_۱ ک_۲}{ک_۱ + ک_۲} (ج + ع)$$ ہوگا۔

۱۶۴۔ ج کی قیمت پر زمین کی گردش کا اثر۔ ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۲۵) کہ حوالے کا فریم جو زمین کی سطح کے لحاظ سے ثابت ہو زمین کے محور کے گرد اس کی گردش کے باعث ایک اسراع رکھتا ہے۔

فرض کرو کہ زمین کا محور و وَ ہے اور فرض کرو کہ زمین کی سطح پر عرض بلد له میں کوئی نقطہ ف ہے۔ زمین کو نصف قطر ا کا ایک کرہ سمجھنے سے نقطہ ف، نصف قطر ا جم له کا ایک دائرہ مرتسم کریگا

شکل (۱۱۱)

جس کا مرکز زمین کے محور پر نقطہ ن ہوگا۔ اگر و وہ رفتار ہو جس سے نقطہ ف یہ دائرہ مرتسم کرتا ہے تو ف کا اسراع حسب دفعہ ۱۲، $\frac{و^۲}{ا جم له}$ دائرہ کے مرکز کی جانب ہوگا یعنی ف ن کی سمت میں۔

فرض کرو کہ زمین کی زاوئی رفتار سه ہے یعنی فرض کرو کہ وہ فی اکائی وقت سه نیم قطری زاوئے میں سے گردش کرتی ہے۔ اب جس وقت میں ف ایک مکمل دائرہ مرتسم کرتا ہے اسی وقت میں زمین ایک مکمل گردش کرلیتی ہے یعنی $\frac{۲\pi}{سه}$، یہ وقت $\frac{۲\pi ا جم له}{و}$ کے بھی مساوی ہے۔ اس لیے (۱۹۹)

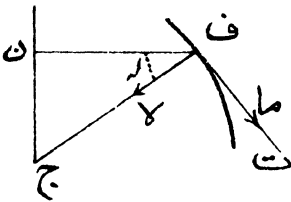
$$و = ا\ سه\ جم\ له$$

اب حوالے کے فریم کا اسراع سمت ف ن میں

$$= \frac{و^۲}{ا جم له} = سه^۲\ ا\ جم\ له$$

ہے۔ اِس لیے اُس فریم کے حوالے سے جو ف کے ساتھ حرکت کر رہا ہے کسی ذرہ کی حرکت کو محسوب کیا جا سکتا ہے گویا کہ حوالے کا فریم ساکن ہے بشرطیکہ سمت ف ن میں قوت کے جزو ترکیبی کو بقدر ک سہ^{2} ا جم لہ کے گھٹا دیا گیا ہو۔

پس کُل قوت عاملہ، اُن قوتوں پر جو فی الواقعی عمل کرتی ہیں اور ایک قوت ک سہ^{2} ا جم لہ پر جو سمت ن ف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جائے مشتمل سمجھی جا سکتی ہے۔ اِس آخری قوت کو زمین کی کشش کے ساتھ مرکب کرنے سے ایک قوت حاصل ہو گی جس کو ہم ف پر جاذبہ کی ظاہری قوت کہہ سکتے ہیں۔ اِس طرح حوالے کے فریم کی حرکت کی رعایت زمین کی اصلی کشش کی بجائے جاذبہ کی ظاہری قوت کو استعمال کرنے سے رکھی جا سکتی ہے۔ یہی وہ ظاہری جاذبہ ہے جو تجربی طور پر متعین ہوتا ہے اور ہمیشہ کسی نقطہ پر ذرہ کے وزن سے یہی جاذبہ مُراد لیا جاتا ہے۔

نقطہ ف پر کسی جسم کا ظاہری وزن معلوم کرنے کے لیے اس کے اصلی وزن (فرض کرو) ک ج کو ایک قوت ک سہ^{2} ع جم لہ کے ساتھ جو ن ف پر عمل کرتی ہے مرکب کرنا ہو گا۔ فرض کرو کہ اِس آخری قوت کو سمتوں ف ج اور ف ت میں اجزائے ترکیبی ک سہ^{2} ا جم^{2} لہ، ک سہ^{2} ا جم لہ جب لہ میں تحلیل کیا گیا ہے جہاں ف ت، نقطہ ف پر مماس ہے۔

شکل (۱۱۲)

سمت ف ج میں عمل کرنے والی قوت ک ج کے ساتھ مرکب کرنے سے ظاہری وزن کے اجزائے ترکیبی لا، ما علی الترتیب سمتوں ف ج، ف ت میں حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں

لا = ک (ج − سہ^{2} ا جم^{2} لہ) (۵۳)

ما = ک سہ^{2} ا جم لہ جب لہ (۵۴)

(۲۰۰) مربع لینے اور جمع کرنے اور ظاہری وزن کو حسب معمول ک ج سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ک^۲ج^۲ = لا^۲ + ما^۲ = ک^۲ (ج^۲ - ۲ سہ^۲ ا ج جم^۲ لہ + سہ^۴ ا^۲ جم^۲ لہ)

(۵۵)

زمین کے قطر کو ۷۹۲۰ میل اور ج کی قیمت کو (جو قطب شمالی پر اسراع بوجہ جاذبہ عرض ہے) ۳۲٫۲۵ لینے سے آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{سہ}^2\,\text{ا}}{\text{ج}} = \frac{1}{290}\text{، تقریباً}$$

اس کا مربع اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کو پہلے تقرب کی حد تک نظرانداز کیا جا سکتا ہے اور مساوات (۵۵) کو شکل

ج = ج - سہ^۲ ا جم^۲ لہ

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اس طرح عرض بلد لہ میں ظاہری وزن اصلی وزن سے بقدر ک سہ^۲ ا جم^۲ لہ کے کم ہوتا ہے یا تقریباً کل وزن کا $\frac{1}{290}$ جم^۲ لہ کے کم ہوتا ہے۔

ظاہری وزن نصف قطر ج ف پر عمل نہیں کرتا۔ اگر ہم اس کو نصف قطر کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہوئی سمت میں عمل کرتا ہوا فرض کریں تو مساواتوں (۵۳) اور (۵۴) سے حاصل ہوگا

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{سہ}^2\,\text{ا جم لہ جب لہ}}{\text{ج} - \text{سہ}^2\,\text{ا جم}^2\,\text{لہ}}$$

$$= \frac{1}{290}\ \text{جم لہ جب لہ، تقریباً}$$

اس سے کسی نقطہ پر زمین کے نصف قطر سے خط شاقول کا انحراف حاصل ہوگا۔

متحرک اجسام کے درمیان رگڑ کے تعاملات

۱۶۵ — تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ ربط

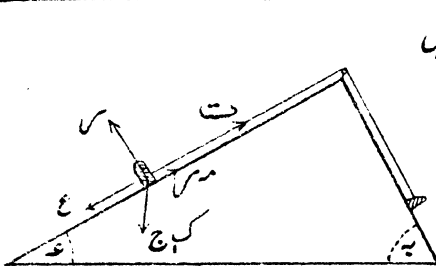
ف = مہ ر

(جس میں **ف** اور ر، دو اجسام کے درمیان تعامل کے مماسی اور عمادی اجزائے ترکیبی ہیں) بڑی حد تک درست رہتا ہے جبکہ اجسام ایک دوسرے پر سے پھسل رہے ہوں۔ رگڑ کی قدر مہ کی قیمت بالکل وہی نہیں ہوتی ہے جو اجسام کے ساکن ہونے کی صورت میں ہوا کرتی ہے بلکہ حرکت کی صورت میں مہ کی قیمت ہمیشہ قدرے بڑی ہوتی ہے۔

دو جسموں کے درمیان رگڑ جبکہ اجسام ایک دوسرے پر پھسل رہے ہوں حرکی رگڑ کہلاتی ہے، لیکن اگر اجسام ساکن ہوں تو اس کو سکونی رگڑ کہتے ہیں۔

توضیحی مثالیں

ا۔ کمیتیوں ک۱ اور ک۲ کے دو ذرّے، زاویوں عہ اور یہ کے دو مائل مستویوں پر جو ایک دوسرے سے جُڑے ہوئے ہیں رکھے ہیں اور وہ ایک ڈوری کے ذریعہ مربوط ہیں جو مستویوں کے سرے پر کی ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے۔ اگر ذرّوں اور مستویوں کے درمیان رگڑ کی قدریں مہ۱، مہ۲ ہوں تو حاصل حرکت معلوم کرو۔

اگر حرکت فی الواقعی وقوع پذیر ہوتی ہے تو ایک ذرہ ک۱ (فرض کرو) کو اپنے مستوی پر نیچے وار حرکت کرنی چاہئے اور دوسرے ک۲ کو اوپر وار۔ چونکہ ڈوری ناامتداد پذیر ہے اس لیے ہر ایک ذرہ کا اسراع وہی ہوگا، فرض کرو کہ یہ اسراع سمت حرکت میں ع ہے۔

پہلے ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں حسب ذیل ہیں:

(ا) اس کا وزن ک۱ ج انتصاباً نیچے وار،

(ب) ڈوری کا تناؤ ت مستوی کے اوپر وار،

(ج) مستوی کا تعامل۔ فرض کرو کہ اس کو مستوی کے عمود دار اور مستوی کے اوپر وار سمت میں اجزاء ر اور مہ ر میں تحلیل کیا گیا ہے۔

شکل (۱۱۳)

چونکہ مستوی کے عماد کی سمت میں ذرہ ک۱ کا کوئی اسراع نہیں ہے اس لئے حاصل قوت کا جزو ترکیبی اس سمت میں صفر ہونا چاہئے۔ پس اس سمت میں تحلیل کرنے سے

ر − ک۱ ج جم عہ = ۰

مستوی کے نیچے وار تحلیل کرنے سے

ک۱ ج جب عہ − مہ ر − ت = ک۱ ع

اور اگر ہم نا معلوم تعامل ر کو ساقط کریں تو

ک۱ ج (جب عہ − مہ جم عہ) − ت = ک۱ ع　　　(ا)

اسی طرح کی مساوات دوسرے ذرہ کی حرکت کے لیے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یعنی

ک۲ ج (جب بہ + مہ جم بہ) − ت = −ک۲ ع　　　(ب)

ع کے لیے ان مساواتوں (ا) اور (ب) کو حل کرنے سے اسراع حاصل ہوتا ہے

ع = [ک۱ (جب عہ − مہ جم عہ) − ک۲ (جب بہ + مہ جم بہ)] / (ک۱ + ک۲) ج　　　(ج)

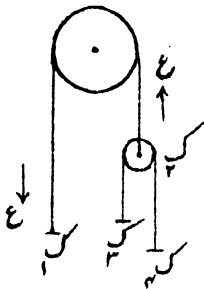
اگر ع کی یہ قیمت منفی نکلے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اسراع اس سمت میں نہیں ہو سکتا

جس میں حرکت کا واقع ہونا ہم نے فرض کیا ہے ۔

اگر نظام سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے تو مفروضہ سمت میں حرکت ناممکن معلوم ہوتی ہے اور ہمیں اس کا امتحان کرنا چاہئے کہ آیا مخالف سمت میں حرکت ممکن ہے ۔ اگر یہ بھی ناممکن معلوم ہو جائے تو نظام ساکن رہے گا ۔

(۲۰۲) لیکن اگر سمت مفروضہ میں نظام متحرک ہوا ہے تو مساوات (ج) سے حاصل شدہ اسراع عمل میں آجائے گا اور وہ مثبت ہوگا تو رفتار میں اضافہ ہوگا اور منفی ہوگا تو رفتار گھٹیگی ۔ اِس آخری صورت میں نظام کسی وقت ساکن ہو جائے گا اور پھر ہمیں امتحان کرنا چاہئے کہ آیا وہ سمت مخالف میں حرکت کرنا شروع کرے گا یا نہیں ۔

۲ ۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے کمیت $ک_۱$ کا ایک وزن بندھا ہے ۔ دوسرے سرے پر کمیت $ک_۲$ کی ایک چرخی لگی ہوئی ہے جس پر سے ایک ڈوری گذرتی ہے جس کے سروں سے کمیتیں $ک_۳$، $ک_۴$ لٹک رہی ہیں ۔ حرکت معلوم کرو ۔

فرض کرو کہ کمیت $ک_۱$ کا اسراع ع ہے جس کو نیچے وار پیمائش کیا گیا ہے۔

تب $ک_۲$ کا اسراع اوپر وار ع ہونا چاہئے۔

کمیتیں $ک_۳$، $ک_۴$ سے خود ایک ایٹوڈ کی مشین کا نظام حاصل ہوگا جو کل کا کل اسراع ع سے اوپر وار حرکت کرے گا ۔ پس اِس مشین کی ڈوری کا تناؤ $ت_۱$ (فرض کرو) حسب ذیل ہے (دیکھو دفعہ ۱۶۳) :

$$ت_۱ = \frac{۲ ک_۳ ک_۴}{ک_۳ + ک_۴} (ج + ع)، \quad (۱)$$

شکل (۱۱۴)

اگر اس ڈوری کے تناؤ کو جو $ک_۲$ اور $ک_۱$ کو ملاتی ہے $ت_۲$ سے تعبیر کریں تو

$ک_۲$ کے لئے حرکت کی حسب ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے :

$$ت_۲ - ک_۲ ج - ۲ ت_۱ = ک_۲ ع \qquad (ب)$$

اور $ک_۱$ کے لئے حرکت کی مساوات ہے

$$ک_۱ ج - ت_۲ = ک_۱ ع \qquad (ج)$$

مساواتوں (ا)، (ب)، (ج) سے $ت_۱$ اور $ت_۲$ کو ساقط کرنے سے اسراع ع کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$ع = \frac{ک_۱ - ک_۲ - \frac{۴ ک_۳ ک_۴}{ک_۳ + ک_۴}}{ک_۱ + ک_۲ + \frac{۴ ک_۳ ک_۴}{ک_۳ + ک_۴}} ج$$

کمیتوں $ک_۳$، $ک_۴$ کے اسراع بلحاظ $ک_۲$ کے دفعہ ۱۶۳ کی رو سے حسب ذیل معلوم ہوتے ہیں :-

$$\pm \frac{ک_۳ - ک_۴}{ک_۳ + ک_۴} (ج + ع)$$

۳ــــ ایک افقی دائرہ پر مساوی فاصلوں سے ن چھوٹے چکنے چھلّے ثبت کردئے گئے ہیں اور ان حلقوں میں سے ایک بے سرا تاگا بالترتیب گذرتا ہے۔ اگر چھلّوں کے ہر متصلہ زوج کے درمیانی حصہ سے تاگے سے علی الترتیب کمیتوں ف، ق، ر... کی ن چرخیاں سہاری گئی ہوں اور ڈوری کے وہ حصے جو چرخیوں کو مس نہیں کرتے انتصابی ہوں تو ثابت کرو کہ چرخی ف کا اسراع

$$\frac{\frac{۱ - ن}{ف} + \frac{۱}{ق} + \frac{۱}{ر} + \cdots}{\frac{۱}{ف} + \frac{۱}{ق} + \frac{۱}{ر} + \cdots} ج$$

کے ساتھ نیچے اُترے گی

(۲۰۳) ڈوری کا تناؤ اپنے پورے طول پر وہی ہونا چاہیئے' فرض کرو کہ یہ تناؤ ت ہے۔ اگر چرخیوں کے اسراع سب کے سب نیچے وار پیمائش شدہ $\text{ع}_{\text{ف}}$، $\text{ع}_{\text{ق}}$، ..... ہوں تو حسب ذیل نمونے کی حرکت کی مساواتیں حاصل ہونگی

$$\text{ف ج} - ۲\,\text{ت} = \text{ف}\,\text{ع}_{\text{ف}} \qquad (۱)$$

اور اس نمونے کی مساوات ہر چرخی کے لیے ایک ہوگی۔ اِن مساواتوں میں نامعلوم مقدار ت اور ن نامعلوم مقداریں $\text{ع}_{\text{ف}}$، $\text{ع}_{\text{ق}}$، ..... داخل ہوتی ہیں۔ اس طرح نامعلوم مقداروں کی تعداد ن + ۱ ہے اور ان میں صرف ن مساواتیں ابتک حاصل ہوئی ہیں۔ اِس لیے ایک اور مساوات چاہیئے اور یہ مساوات اِس امر سے حاصل ہوتی ہے کہ اسراع $\text{ع}_{\text{ف}}$، $\text{ع}_{\text{ق}}$، ..... غیر تابع نہیں ہو سکتے کیونکہ ڈوری کا طول غیر متغیر رہنا چاہیئے۔

فرض کرو کہ افقی دائرہ کے نیچے ف، ق، ..... کی گہرائیاں $\text{گ}_{\text{ف}}$، $\text{گ}_{\text{ق}}$، ..... سے تعبیر ہوتی ہیں تو

$$\text{گ}_{\text{ف}} + \text{گ}_{\text{ق}} + \ldots\ldots$$

کو پوری حرکت میں مستقل ہونا چاہیئے۔ اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{ع}_{\text{ف}} + \text{ع}_{\text{ق}} + \ldots\ldots = ۰$$

شکل (۱۱۵)

اب مساوات (۱) سے $\text{ع}_{\text{ف}}$، $\text{ع}_{\text{ق}}$، ..... کی قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left(\text{ج} - \frac{۲\,\text{ت}}{\text{ف}}\right) + \left(\text{ج} - \frac{۲\,\text{ت}}{\text{ق}}\right) + \ldots = ۰$$

اِس لیے

$$۲\,\text{ت} = \frac{\text{ن ج}}{\frac{۱}{\text{ف}} + \frac{۱}{\text{ق}} + \ldots}$$

اور مساوات (ل) میں ۲ ت کی بجائے یہ قیمت درج کرنے پر ع ن کی مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے ۔

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ ایٹوڈ کی مشین میں ڈوری کا تناؤ اس سے لٹکی ہوئی دو کمیتوں کے اوزان کے درمیان ہوتا ہے ۔ نیز ثابت کرو کہ یہ تناؤ ان وزنوں میں سے بڑے کی بہ نسبت چھوٹے سے قریب تر ہوتا ہے ۔

۲۔ ۱۶ اور ۱۴ اونس کے دو وزن ایک ناامتداد پذیر ڈوری کے ذریعہ ملحق ہیں جو ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے ۔ اوزان ڈوری سے انتصاباً لٹکتے ہیں اور اور ڈوری کو ایک نقطہ پر ثابت کر دیا گیا ہے تاکہ کوئی حرکت وقوع پذیر نہ ہو سکے ۔ اگر اچانک ڈوری کو چھوڑ دیا جائے تو چرخی پر کے دباؤ میں جو تبدیلی ہوگی اس کو معلوم کرو ۔

۳۔ ایک ڈوری ایک چکنے میز پر سے اس کے مقابل کے کناروں کے علی القوائم گذرتی ہے اور اس کے سروں سے دو کمیتیں ف اور ق انتصاباً لٹکتی ہیں ۔ اگر ڈوری کے اس حصہ پر جو میز پر ہے ایک کمیت ک لگا دی جائے تو ثابت کرو کہ نظام کا اسراع حسب ذیل ہوگا :

$$\frac{ف - ق}{ف + ق + ک} ج$$

۴۔ ایک ڈوری کے دو سروں سے دو کمیتیں ک، ک' باندھی گئی ہیں (۲۰۴) اور ڈوری کو ایک کھونٹی پر سے گذارا گیا ہے جیسا کہ ایٹوڈ کی مشین میں کیا جاتا ہے کھونٹی چکنی نہیں ہے اور اس میں اور ڈوری کے درمیان رگڑ کا زاویہ مہ ہے ۔ حرکت معلوم کرو ۔

۵۔ مثال ۳ میں فرض کرو کہ میز اور وزن ک کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے اور میز اور ڈوری کے درمیان مہ' ہے ۔ حرکت معلوم کرو ۔

۶۔ ایک رسی ایک چکنی چرخی پر سے لٹک رہی ہے ۔ وہ ایکساں اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ ایک شخص کو جس کا وزن ۱۰ اسٹون ہے رسی کے ایک سرے پر

چڑھنا پڑے گا تاکہ رسی جس کے دوسرے سرے سے ۱۲ اسٹون کا وزن بندھا ہے ساکن رہے۔

۷۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری کے ایک سرے سے ایک بندر بندھا ہوا ہے اور دوسرے سرے پر اتنا وزن بندھا ہوا ہے جو ٹھیک بندر کے وزن کے مساوی ہے اور چرخی سے ٹھیک اتنے ہی نیچے ہے۔ بندر دفعتاً اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ کون تیز تر چڑھیگا بندر یا وزن۔

۸۔ ۱ پونڈ اور ۲ پونڈ کے وزن جو انتصابی ڈوریوں سے لٹک رہے ہیں پہیئے اور محور پر متوازن ہیں۔ اگر ایک پونڈ کی کمیت کا اضافہ چھوٹے وزن میں کردیا جائے تو وہ اسراع معلوم کرو جس سے وہ نیچے اترنے لگیگا، نیز ہر ڈوری کا تناؤ دریافت کرو۔ (پہیئے اور محور کا جمود نظر انداز کردیا جائے)۔

۹۔ ۵ پونڈ کی ایک کمیت ایک چکنے مستوی پر جس کا میلان افق کے ساتھ ۳۰° ہے ٹکی ہوئی ہے اور اس سے ایک مہین تاگا بندھا ہے جو مستوی کی چوٹی پر کی ایک چرخی پر سے گذرتا ہے جس کے دوسرے سرے سے ۳ پونڈ کی کمیت انتصاباً لٹک رہی ہے۔ تاگے کی کھینچ کا مقابلہ کرو جبکہ مستوی پر کی کمیت کو ثابت رکھا جائے اور جبکہ اُسے آزاد چھوڑ دیا جائے۔ اگر کمیت کو آزاد چھوڑتے کے ۸ ثانئے بعد تاگے کو دفعتاً جدا کرلیا جائے یا جلا دیا جائے تو معلوم کرو کہ کمیت مستوی کے اوپر پیچھے پلٹنے سے بیشتر کتنی دور تک اوپر چڑھے گی۔

۱۰۔ ایک ہلکا تاگا دو ثابت چرخیوں ا اور ب پر سے گذرتا ہے اور ان کے درمیان اس پر ایک تیسری چرخی ج کا قالب ہے جس کے نیچے سے وہ گذرتا ہے۔ کمیت ک، تاگے کے ہر ایک سرے سے باندھی گئی ہے اور کمیت ک، حرکت پذیر قالب سے بندھی ہے۔ چرخیوں کی کمیتیں قابل نظر انداز ہیں اور چرخیوں کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہے کہ تاگے کے تمام حصے انتصابی ہیں۔ ثابت کرو کہ جب نظام کو چھوڑ دیا جائے تو تاگے کا تناؤ ک ک ا (ک + ½ ک) پونڈ ہے۔ نیز وہ اسراع معلوم کرو جس کے ساتھ کمیت ک گرتی ہے۔

۱۱۔ کمیت ک کا ایک لچکدار پٹہ جس کا طبعی طول ا اور مقیاس لہ ہے

محیط ب (> ا) کے ایک کھردرے افقی پہیئے کے گرد لپٹا گیا ہے۔ کتنی تیزی سے پہیہ کو گھمانا چاہیئے کہ پٹہ پہیہ سے نکل جائے۔

۱۲ — مثال ۱۱ کا لچکدار پٹہ محیط ب کے ایک چکنے کرہ پر جو زاوئی رفتار سہ کے ساتھ گھوم رہا ہے رکھا گیا ہے۔ سکون کا محل معلوم کرو۔

۱۳ — اگر زمین تیز سے تیز تر اور اس سے تیز تر گھومنے لگے حتیٰ کہ بالآخر اجسام اس کے خط استواء سے اُڑنے لگیں تو ثابت کرو کہ اس منزل کے پہنچنے تک کسی نقطہ پر خط شاقول زمین کے محور کے متوازی ہو جائے گا۔

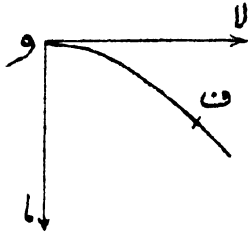
۱۴ — ایک جسم کو ایک پیچدار ترازو پر رکھا گیا ہے اور ترازو ایک جہاز میں ہے جو خط استواء پر رفتار و سے حرکت کر رہا ہے۔ ترازو صحیح طور پر وزن دکھلاتا ہے جبکہ جہاز ساکن ہو۔ ثابت کرو کہ جب جہاز حرکت میں ہوتا ہے تو ترازو کی قراءت سے جسم کے وزن کا $\frac{۲ و سہ}{ج}$ گنا خطا (تقریباً) ظاہر ہوتی ہے جہاں سہ زمین کی زاوئی رفتار ہے۔

(۲۰۵)

مرمیوں کی پرواز

۱۶۶ — مرمی سے یہاں مُراد وہ جسم ہے جو اس قدر چھوٹا ہو کہ اُس کو ایک ذرہ تصور کیا جا سکے اور جو اس طریقہ سے پھینکا گیا ہو کہ وہ جاذبہ کے اثر کے تحت راستہ طے کرے۔

کوئی مرمی جاذبہ کے ساتھ ساتھ ہوا کی مزاحمت سے بھی بالعموم متاثر ہوگا لیکن ہم فرض کریں گے کہ ہوا کی مزاحمت ناقابل قدر ہے اور اس لیے جاذبہ ہی صرف وہ قوت ہے جس کا لحاظ رکھنے کی ضرورت ہے۔

فرض کرو کہ ہم اول سادہ ترین صورت لیتے ہیں چنانچہ خیال کرو کہ مرمی کو نقطہ و (شکل ۱۱۶) سے رفتار ع کے ساتھ افقاً پھینکا گیا ہے۔ عمل کرنے والی قوت صرف جاذبہ ہے جس کا افقی جزو ترکیبی کوئی نہیں ہے اور اس لیے افقی رفتار ع پوری حرکت کی اثناء میں علیٰ حالہ رہتی ہے۔ ابتدائی رفتار کا

انتصابی جزو ترکیبی صفر ہے لیکن نیچے وار اسراع بوجہ جاذبہ ج ہے۔ اس لیے وقت ت کے بعد افقی فاصلہ طے شدہ ع ت ہے اور وہ انتصابی فاصلہ جس میں سے جسم گرچکا ہے $\frac{1}{2}$ ج ت^2 ہے۔ افقی فاصلہ طے شدہ کو لا سے اور انتصابی فاصلہ کو ما سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

شکل (۱۱۶)

$$\text{لا} = \text{ع ت}،\ \text{ما} = \frac{1}{2}\ \text{ج ت}^2$$

راستہ طے شدہ کی مساوات، اِن مساواتوں سے ت کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگی چنانچہ ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \frac{\text{ج}}{2\text{ع}^2}\ \text{لا}^2$$

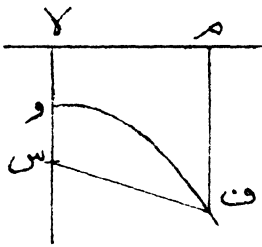
یہ مساوات ایک قطع مکافی کی ہے جس کا وترِ خاص $\frac{2\text{ع}^2}{\text{ج}}$ ہے۔

صریحاً اِس منحنی کو متعین کرنے کا مسئلہ فی نفسہ وہی ہے جو دفعہ ۱۵۶ میں زیر بحث آچکا ہے۔ وہاں ایک جسم آزادانہ گر رہا تھا اور اپنا راستہ ایک کاغذ پر جو ایکساں افقی رفتار کے ساتھ اُس سے گذر رہا تھا مرتسم کرتا تھا۔ یہاں بھی ایک جسم آزادانہ گر رہا ہے اور ہم تصور کرسکتے ہیں کہ وہ اپنا راستہ ایک کاغذ پر مرتسم کرتا ہے جس سے وہ ایک ایکساں افقی رفتار سے گذرتا جاتا ہے۔ اِن دو صورتوں میں اضافی حرکت وہی ہے اور اس لیے منحنی ضرور وہی ہونے چاہئیں۔

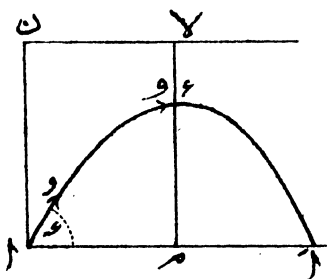
۱۶۷ — و پر رفتار ع ہے اور یہ رفتار وہی ہے جو اُس صورت میں ہوتی (۲۰۶) اگر جسم و کے انتصاباً اوپر ارتفاع $\frac{\text{ع}^2}{2\text{ج}}$ سے نیچے و تک گرتا۔ یہ ارتفاع

وترِ خاص کا ایک چوتھائی ہے اور اس لیے مرتب لا م کے نیچے مکافی کے راس و کی گہرائی کے مساوی ہے۔ اس لیے و پر مرمی کی کل توانائی اس کل توانائی کے مساوی ہے جو سکون کی حالت میں لا پر اس کی ہوتی یا مرتب کے کسی اور نقطہ پر ہوتی کیونکہ مرتب افقی ہے۔

شکل (۱۱۷)

اب چونکہ کل توانائی مستقل رہتی ہے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ذرہ اپنے راستہ کے کسی نقطہ ف پر ہوتا ہے تو اس کی توانائی بالحرکت وہ ہوتی ہے جو فاصلہ ف م میں سے گرنے کی وجہ سے اس کو حاصل ہوتی ہے یعنے اس فاصلہ میں سے جو مرتب سے نقطہ ف تک ہے۔ اس کو حسب ذیل طریقہ پر بیان کیا جا سکتا ہے:

کسی نقطہ پر مرمی کی رفتار وہ ہوتی ہے جو مرتب سے اس نقطہ تک گرنے کی وجہ سے پیدا ہو سکتی ہے۔

۱۶۸ — یہ فرض کرنے کی بجائے کہ ذرہ کو مکافی کے راس و سے افقاً پھینکا گیا ہے ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ وہ و پر ہوا میں سے پرواز کرتے ہوئے پہنچا ہے اور اس سے پیشتر اس کو کسی نقطہ ا سے پھینکا گیا تھا۔ اسی استدلال سے جس سے یہ معلوم ہوا تھا کہ و سے گذرنے کے بعد ذرہ کے راستہ کا حصہ مکافی ہے یہ معلوم ہوگا کہ و پر پہنچنے سے پیشتر بھی اس کا راستہ مکافی ہے۔ اس لیے کسی ذرہ کا راستہ جو کسی طریقہ سے پھینکا گیا ہو مکافی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ کو نقطہ ا سے ایک ایسی سمت میں رفتار و سے پھینکا گیا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ عہ بناتی ہے۔ فرض کرو کہ اسکے

راستہ کا راس و ہے اور فرض کرو کہ جب مرمی نقطہ و میں سے گذرتا ہے تو اس کی رفتار ۶ ہے' یہ رفتار بے شبہ افقی ہے — ذرہ پر عمل کرنے والی کوئی افقی قوت نہیں ہے اور اس لیے اس کی افقی رفتار اس کی پوری پرواز میں مستقل رہتی ہے۔ اس لیے (۲۰۷)

$$۶ = و\ جم\ عہ$$

اس لیے مکانی کا وتر خاص

شکل (۱۱۸)

$$\frac{۲\ ۶^۲}{ج} = \frac{۲\ و^۲\ جم^۲\ عہ}{ج}$$

رفتار و وہ ہے جو مرتب سے ا تک گرنے کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے اس لیے اگر ن لا مرتب ہو تو

$$ا\ ن = \frac{و^۲}{۲\ ج}$$

ا سے و تک پرواز کا وقت وہ وقت ہے جو جاذبہ' انتصابی رفتار و جیب عہ کو معدوم کرنے میں لیتی ہے' اس لیے وہ $\frac{و\ جیب\ عہ}{ج}$ ہے۔ اس وقت میں افقی فاصلہ ا م یکساں رفتار ۶ سے طے ہوا ہے' اس لیے

$$ا\ م = ۶\ \frac{و\ جیب\ عہ}{ج} = \frac{و^۲\ جیب\ عہ\ جم\ عہ}{ج}$$

طے شدہ انتصابی فاصلہ و م بموجب مساوات (۲۷) نصف وقت مضروب ابتدائی انتصابی رفتار کے مساوی ہے' اس لیے

$$و م = \frac{۱}{۲} \frac{و^۲ جب^۲ عہ}{ج}$$

افقی مستوی پر پورا ٹپہ ا اَ، ا م کا دگنا ہے اور اس لیے

$$ا اَ = \frac{۲ و^۲ جب عہ جم عہ}{ج} = \frac{و^۲ جب ۲ عہ}{ج}$$

۱۶۹ — اگر و کی قیمت مستقل ہو (مثلاً اگر ہم گولی کو بارود کی ایک مقررہ بھرن سے فائر کرتے رہیں) اور زاویہ عہ متغیر ہو تو ٹپہ، ا اَ، $\frac{و^۲}{ج}$ سے تجاوز نہیں کر سکتا کیونکہ جزو ضربی جب ۲ عہ کی قیمت اکائی سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اگر پھینکنے کی رفتار و معلوم ہو تو بڑے سے بڑا ٹپہ جو افقی مستوی پر حاصل ہو سکتا ہے $\frac{و^۲}{ج}$ ہے اور اس ٹپہ کو حاصل کرنے کے لیے جب ۲ عہ = ۱ ہونا چاہئے یعنے عہ = ۴۵°۔ پس کسی مرمی کو افقی مستوی پر حتی الامکان دور پھینکنے کے لیے اس کو زاویہ ۴۵° پر پھینکنا چاہئے۔ (۲۰۸)

۱۷۰ — ان نتائج کو تحلیلی طور پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم نقطۂ رسید گی کو مبدا لیتے ہیں اور اُس مستوی کو جس میں پرواز واقع ہوتی ہے مستوی لا ما فرض کرتے ہیں جہاں محاور لا اور ما علی الترتیب افقی اور انتصابی ہیں۔

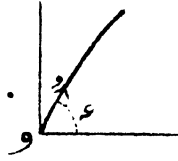
اُس نقطہ کا لا محدد جس پر ذرہ وقت ت کے بعد پہنچا ہے اُس افقی فاصلے کے مساوی ہے

شکل (۱۱۹)

جو وقت ت میں یکساں رفتار و جم عہ سے طے ہوتا ہے۔ اس لیے

$$لا = و جم عہ \times ت \quad \ldots\ldots\ldots (۵۶)$$

اسی طرح اس نقطہ کا ما محدد وہ فاصلہ ہے جو وقت ت میں ابتدائی رفتار و جب عہ اور اسراع ج کے ساتھ طے ہوا ہے۔ اس لیے یہ فاصلہ

$$ما = و \text{ جب } عہ \times ت - \frac{1}{2} ج ت^2 \quad \ldots\ldots (57)$$

ہے۔ اگر ہم مساواتوں (۵۶) اور (۵۷) سے ت کو ساقط کریں تو راستہ کی مساوات حاصل ہوگی چنانچہ

$$ما = لا \text{ مس } عہ - \frac{ج لا^2}{2 و^2 \text{ جم}^2 عہ} \quad \ldots\ldots (58)$$

اِس کو شکل

$$ما - \frac{1}{2} \frac{و^2 \text{ جب}^2 عہ}{ج} = - \frac{ج}{2 و^2 \text{ جم}^2 عہ} \left(لا - \frac{و^2 \text{ جب عہ جم عہ}}{ج} \right)^2$$

میں رکھا جا سکتا ہے جو صریحاً ایک قطع مکافی کی مساوات ہے جس کا راس نقطہ

$$لا = \frac{و^2 \text{ جب عہ جم عہ}}{ج} ، \quad ما = \frac{1}{2} \frac{و^2 \text{ جب}^2 عہ}{ج} \quad \ldots\ldots (59)$$

پر ہے اور جس کے وتر خاص کا طول

$$\frac{2 و^2 \text{ جم}^2 عہ}{ج}$$

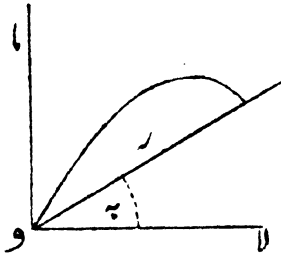
ہے۔

افقی مستوی پر ٹپہ حاصل کرنے کے لئے وہ نقطہ معلوم کرنا چاہئے جس میں یہ مکافی خط ما = ۰ کو قطع کرتا ہے۔ مساوات (۵۸) میں ما = ۰ رکھنے سے ہمیں فوراً حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{2 و^2 \text{ جم}^2 عہ}{ج} \text{ مس } عہ = \frac{و^2 \text{ جب } 2 عہ}{ج}$$

جو دفعہ ۱۶۸ میں حاصل شدہ قیمت کے مطابق ہے۔

ٹپہ مائل مستوی پر

۱۷۱ — فرض کرو کہ مرمی کو نقطہ رمیدگی و میں سے گذرنے والے

ایک مائل مستوی پر پھینکا گیا ہے۔

فرض کرو کہ اس مستوی کا میلان افق کے ساتھ به ہے اور فرض کرو کہ اس مستوی پر مرمی کا ٹپہ ر ہے۔ پس اس نقطہ کے محدد جس پر مرمی مستوی سے ٹکراتا ہے

$$\text{لا} = \text{ر جم به}،\quad \text{ما} = \text{ر جب به}$$

ہونے چاہئیں۔

شکل (۱۲۰)

یہ نقطہ قطع مکافی پر ہونا چاہئے اور اس لیے اس کے محددوں کو مساوات (۵۸) پوری کرنی چاہئے۔ ان محددوں کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ر جب به} = \text{ر مس عه جم به} - \frac{\text{ج ر}^2\ \text{جم}^2\ \text{به}}{\text{۲ و}^2\ \text{جم}^2\ \text{عه}}$$

جس سے ٹپہ ر کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ر} = \frac{\text{۲ و}^2}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{جم عه جب (عه} - \text{به)}}{\text{جم}^2\ \text{به}} \quad \text{......(۶۰)}$$

چونکہ $\text{۲ جم عه جب (عه} - \text{به)} = \text{جب (۲عه} - \text{به)} - \text{جب به}$ ...(۶۱)

اس لئے ظاہر ہے کہ اگر صرف عه کو بدلنے دیا جائے تو ٹپہ ر اعظم ہوگا جبکہ جب (۲ عه − به) اعظم ہو یعنی جبکہ وہ اکائی کے مساوی ہو۔ اس قیمت کو حاصل کرنے کے لئے ہم رکھتے ہیں

$$\text{عه} = \frac{\pi}{4} + \frac{\text{به}}{2}$$

(۲۱۰) اس لیے اعظم ٹپہ حاصل کرنے کے لئے ہم مرمی کو اس سمت میں پھینکتے ہیں جو مائل مستوی اور انتصابی کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتی ہے۔ جب رمیدگی اس سمت میں واقع ہوتی ہے تو اعظم ٹپہ ر، مساوات

(۶۰) سے حاصل شدہ ر کی قیمت میں جب (۲ عہ ـ بہ) = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے ـ چنانچہ

$$ر = \frac{و^۲}{ج} \cdot \frac{۲\ جم\ عہ\ جب\ (عہ - بہ)}{جم^۲\ بہ}$$

$$= \frac{و^۲}{ج} \cdot \frac{جب\ (۲\ عہ - بہ) - جب\ بہ}{جم^۲\ بہ}$$

$$= \frac{و^۲}{ج} \cdot \frac{۱ - جب\ بہ}{جم^۲\ بہ}$$

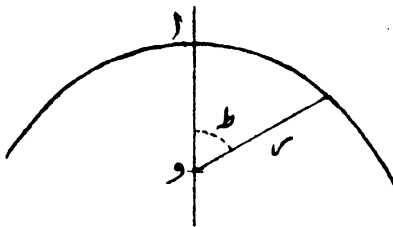
$$= \frac{و^۲}{ج\ (۱ + جب\ بہ)} \qquad (۶۲)$$

۱۷۲ ـــ اِس مساوات سے وہ بڑے سے بڑا فاصلہ معلوم ہو سکتا ہے جو مرمی کسی سمت میں طے کر سکتا ہے جبکہ اس کو رفتار و سے پھینکا گیا ہو ـ فرض کرو کہ ہم بہ کی بجائے $\frac{\pi}{۲}$ ـ طہ رکھتے ہیں اور اِس لیے طہ وہ زاویہ ہے جو مرمی کی سمت انتصابی کے ساتھ بناتی ہے ـ اب ر اور طہ میں ربط ہے

$$ر = \frac{و^۲}{ج\ (۱ + جم\ طہ)} \qquad (۶۳)$$

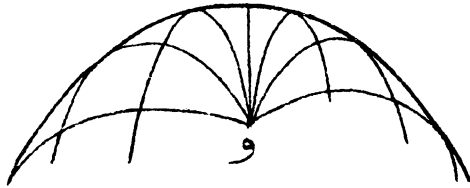
اِس کو قطبی محددوں ر، ط میں مساوات سمجھنے سے صریحًا یہ ایک ایسے منحنی کی مساوات ہے کہ اِس کے اندر کسی نقطہ پر ہم ایک مرمی کے ذریعہ جو رفتار و سے فائر کیا گیا ہو ضرب لگا سکتے ہیں لیکن اس کے باہر کسی نقطہ تک مرمی کو نہیں پہنچا سکتے ـ ہم جانتے ہیں کہ وتر خاص ل کے قطع مکافی کی قطبی مساوات اس کے ماسکہ اور محور کے حوالے سے حسب ذیل ہے:

شکل (۱۲۱)

$$ر = \frac{\frac{۱}{۲}\,ل}{۱ + جم\, ط}$$

اِس کا مقابلہ مساوات (۶۳) کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ نقطہ رسید گی ہے اور محور انتصابی ہے اور نیم وتر خاص $\frac{و^۲}{ج}$ ہے۔

راستوں کا لفاف

(۲۱۱)

۱۷۳۔ اگر ہم اُن تمام مکافیوں کا تصور کریں جن کو مرمی جو نقطہ و سے رفتار د کے ساتھ فائر کیے گئے ہوں مرتسم کرتے ہیں تو ہمیں شکل (۱۲۲) کے مشابہ ایک شکل حاصل ہوگی بیرونی جلی منحنی صریحاً اُن نقطوں کو جن پر مرمی پہنچ سکتے ہیں اُن نقطوں سے جن پر مرمی نہیں پہنچ سکتے جدا کرتا ہے۔ اس لیے یہ وہ مکافی ہے جس کی مساوات (۶۳) سے حاصل ہوتی ہے۔ شکل (۱۲۲) کے مطالعہ سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ منحنی مکافیوں

شکل (۱۲۲)

کے اس نظام کا لفاف ہے جو فائر کرنے کی مختلف سمتوں کے متناظر ہیں۔

۱۷۴۔ مکافیوں کے نظام کا لفاف تحلیلی طریقوں کے ذریعہ نسبتاً زیادہ راست طریقہ پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم مساوات (۵۸) میں مس عہ کی بجائے م لکھیں تو نظام کے ایک مکافی کی مساوات شکل

$$ما = م لا - \frac{ج لا^۲}{۲ و^۲} (۱ + م^۲)$$

میں حاصل ہوتی ہے اور پورا نظام، م کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔
وہ شرط کہ اِس مساوات کی اصلیں م میں مساوی ہوں یہ ہے کہ

$$لا^۲ = \frac{۲ ج لا^۲}{۲ و^۲} \left(\frac{ج لا^۲}{۲ و^۲} + ما\right)$$

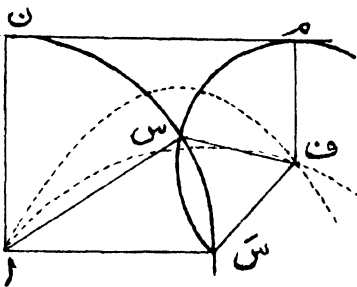
جس کو شکل

$$لا^۲ = - \frac{۲ و^۲}{ج} \left(ما - \frac{و^۲}{۲ ج}\right) \quad .... (۶۴)$$

میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

اگر لا، ما اِس مساوات کو پورا کریں تو دو مکافی جن میں لا انتہا کم فرق ہے نقطہ لا، ما میں سے گذرتے ہیں اور اِس لیے لفاف پر کا ایک نقطہ لا، ما ہے۔ اِس طرح مساوات (۶۴) لفاف کی مساوات ہے اور اس سے وہی مکافی لفاف حاصل ہوتا ہے جو قبل ازیں حاصل کیا جا چکا ہے۔ (۲۱۲)

۱۷۵— مکافیوں کے نظام کا لفاف معلوم کرنے کا ایک بہت سادہ ہندسی طریقہ بھی ہے۔

اولاً ہم دیکھتے ہیں کہ جب سب مرمیوں کو ایک ہی نقطہ و سے رفتار و کے ساتھ فائر کیا جاتا ہے تو ان کے راستوں کا ایک ہی مرتب ن م (شکل ۱۲۳) ہونا چاہئے۔ فرض کرو کہ نظام کے کوئی دو مکافی، ف پر متقاطع ہوتے ہیں اور فرض کرو کہ اِن کے ماسکے س، سَ ہیں۔ فرض کرو کہ ا، ف سے مرتب پر عمود علی الترتیب

شکل (۱۲۳)

ا ن ' ف م ہیں۔

اب ا س = ا سؔ کیونکہ اِن میں سے ہر ایک ا ن کے مساوی ہے، نیز ف س = ف سؔ کیونکہ ہر ایک ف م کے مساوی ہے۔ اِس لئے س اور سؔ ' اُن دو دائروں کے نقاط تقاطع ہیں جن کے مرکز ا ' ف ہیں۔

اگر اِن دو مکافیوں کو متصلہ فرض کیا جائے تو اِن کے ماسکے س ' سؔ متصلہ نقطے ہوں گے اور اس لئے مذکورہ بالا دو دائرے مس کرینگے اور ا س ف انتہا میں ایک خط مستقیم ہوگا۔ پس اس صورت میں

ا ف = ا س + س ف

= ا ن + ف م

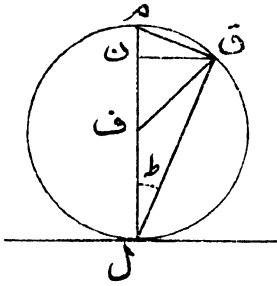
= نقطہ ف سے ایک ایسے ثابت افقی خط پر عمود جو م ن کے اوپر فاصلہ ا ن پر ہے۔

پس نقطہ ف یہ شرط پوری کرتا ہے کہ اِس کا فاصلہ اِس ثابت خط سے اُس فاصلہ کے مساوی ہے جو اِس کے اور ثابت نقطہ کے درمیان ہے اس لیے ف ہمیشہ ایک خاص مکافی پر رہتا ہے جس کا ماسکہ ا ہے۔ لیکن ف ہمیشہ لفاف کا ایک نقطہ بھی ہے جہاں یہ لفاف نظام کے دو دو متصلہ مکافیوں کے نقاط تقاطع کا طریق ہے۔ اِس لیے لفاف وہ مکافی ہے جو ابھی اوپر حاصل ہو چکا ہے اور جس کا ماسکہ ا ہے۔ یہ مکافی وہی مکافی ہے جو قبل ازیں حاصل ہو چکا ہے۔

(۲۱۳)

توضیحی مثالیں

۱۔ ایک گاڑی ہموار سڑک پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور اسکے پہیوں کے پٹوں سے کیچڑ کے ذرّات خارج ہوتے ہیں۔ وہ بڑے سے بڑا ارتفاع معلوم کرو جس تک اِن میں سے کوئی ذرہ اچھلیگا۔

فرض کرو کہ پہیہ کا نصف قطر ا ہے تو ہم دیکھ چکے ہیں (صفحہ ۱۳) کہ کوئی نقطہ ق رفتار و × ق ل \ ا سے سمت ق م میں جو ق ل پر عمود ہے حرکت کرتا ہے۔ ق سے نکلے ہوئے کیچڑ کی رفتار یہی ہوگی۔ اگر زاویہ ق ل ف، ط ہو تو زمین کے اوپر جس ارتفاع سے کیچڑ نکلتا ہے وہ

شکل (۱۲۴)

$$\text{ل ن} = \text{ل ف} + \text{ف ن} = \text{ا}(\text{۱} + \text{جم ۲ط})$$

ہے اور اس کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی

$$\text{و}(\text{ق ل} \backslash \text{ا})\ \text{جب ط} = \text{۲ و جب ط جم ط} = \text{و جب ۲ ط}$$

ہے۔ کیچڑ جو اس انتصابی رفتار سے نکلتا ہے مزید انتصابی ارتفاع

$$\frac{(\text{و جب ۲ ط})^2}{\text{۲ ج}}$$

حاصل کرتا ہے اور اس لیے کل ارتفاع جہاں تک کیچڑ پہنچتا ہے

$$\text{ا} + \text{ا جم ۲ط} + \frac{\text{و}^2}{\text{۲ ج}}\ \text{جب}^2\ \text{۲ ط}$$

ہے۔ اس کو جم ۲ ط کے ایک دو درجی تفاعل کے طور پر شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\left(\text{ا} + \frac{\text{و}^2}{\text{۲ ج}}\right) - \frac{\text{و}^2}{\text{۲ ج}}\ \text{جم}^2\ \text{۲ ط} + \text{ا جم ۲ط}$$

$$= \left(\text{ا} + \frac{\text{و}^2}{\text{۲ ج}}\right) + \frac{\text{ا}^2\text{ج}}{\text{۲ و}^2} - \frac{\text{و}^2}{\text{۲ ج}}\left[\text{جم ۲ ط} - \frac{\text{اج}}{\text{و}^2}\right]^2$$

اس جملہ کی اعظم قیمت جبکہ ط بدلے اس وقت واقع ہوتی ہے

جب ۲ ط = $\frac{\text{اج}}{\text{و}^2}$ بشرطیکہ جم ۲ ط کے لیے یہ قیمت اختیار کرنا ممکن ہو

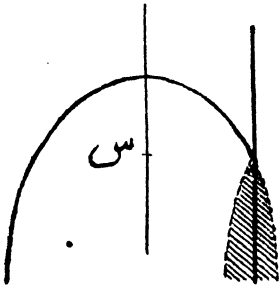
یعنی بشرطیکہ $و^2 > ا ج$ ۔ اِس صورت میں اعظم ارتفاع زمین کے اوپر

$$ا + \frac{و^2}{۲ ج} + \frac{ا^2 ج}{۲ و^2} = \frac{(ا ج + و^2)^2}{۲ ج و^2}$$

ہے۔

لیکن اگر $و^2 < ا ج$ تو ہم $\left[جم ۲ ط - \frac{ا ج}{و^2} \right]^2$ کو معدوم نہیں کر سکتے

اِس لیے ہم اِس کو حتی الامکان چھوٹا بناتے ہیں اور اِس لئے جم ۲ ط = ۱ لیتے ہیں۔ اِس طرح کیچڑ جو بلند ترین نقطہ تک پہنچتا ہے وہ ہے جو پہیہ کے سب سے اوپر کے نقطہ م سے نکلتا ہے اور صریحاً وہ اپنے ابتدائی نقطہ سے بلند تر ہرگز نہیں اُچھلتا

۲۔ ایک اگن ہوز[1] رفتار و سے پانی پھینکتا ہے اور اِس سے ف فاصلہ پر ایک انتصابی دیوار ہے۔ معلوم کرو کہ دیوار کا کتنا رقبہ تر ہو گا۔

شکل (۱۲۵)

فرض کرو کہ اگن ہوز کا دہانہ س ہے اور فرض کرو کہ وہ پانی کے ذرات کسی سمت میں رفتار و سے پھینک سکتا ہے۔ وہ نقطے جن تک پانی پہنچ سکتا ہے حسب دفعہ ۱۷۲ وہ تمام نقطے ہوں گے جو ایک گردشی مکافی نما کے اندر واقع ہوں گے جس کا محور انتصابی، ماسکہ س اور وتر خاص $\frac{۲ و^2}{ج}$ ہے۔ اگر ہم س کو مبدا لیں اور س میں گذرنے والے انتصابی خط کو محوری فرض کریں تو اِس مکافی نما کی مساوات ہوگی

$$(لا^2 + ما^2) = \frac{۲ و^2}{ج} \left(\frac{و^2}{۲ ج} - ی \right)$$

دیوار کی مساوات ما = ف لیجا سکتی ہے اور وہ منحنی جس میں یہ مکافی نما دیوار کو

[1] Fire-hose

قطع کرتا ہے

$$\text{لا}^۲ + \text{ف}^۲ = \frac{۲\,\text{و}^۲}{\text{ج}}\left(\frac{\text{و}^۲}{۲\,\text{ج}} - \text{ی}\right)$$

یا

$$\text{لا}^۲ = \frac{۲\,\text{و}^۲}{\text{ج}}\left(\frac{\text{و}^۲}{۲\,\text{ج}} - \frac{\text{ف}^۲\,\text{ج}}{۲\,\text{و}^۲} - \text{ی}\right)$$

ہے ۔ یہ مساوات ایک قطع مکافی کی مساوات ہے جس کا وتر خاص $\frac{۲\,\text{و}^۲}{\text{ج}}$ ہے، محور انتصابی ہے اور راس، س کے اوپر ارتفاع

$$\frac{\text{و}^۲}{۲\,\text{ج}} - \frac{\text{ف}^۲\,\text{ج}}{۲\,\text{و}^۲}$$

پر ہے ۔ اِس قطع مکافی کے اندر کے سب نقطے پانی کی دھار کے حدود کے اندر واقع ہوں گے اور وہ نقطے جو اس مکافی کے باہر ہوں گے ناقابل رسائی ہوں گے ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک ریوالور کو ۱۰۰ فٹ بلند مینار کے سرے سے اُفقاً فائر کیا گیا ہے اور گولی ریوالور کے دہانے سے رفتار ۶۰۰ فٹ فی ثانیہ سے نکلتی ہے ۔ گولی زمین پر کس جگہ لگیگی ؟

۲ ۔ ایک گولی جس کو ایک تالاب کی سطح کے اوپر ۱۰ فٹ ارتفاع سے افقاً فائر کیا گیا ہے پانی سے ۵۰۰ گز کے فاصلہ پر ٹکراتی ہے ۔ اِس کی رفتار فٹوں میں فی ثانیہ معلوم کرو اگر ہوا کی مزاحمت ناقابل قدر ہو ۔

۳ ۔ ثابت کرو کہ کسی بندوق کے متعلق یہ دعوے کرنا کہ اِس کی گولی ۱۰۰ گز کے ٹپہ میں ایک انچ سے زیادہ نہیں چڑھتی اِس بات کو مستلزم ہے کہ رفتار ۲۰۷۸ فٹ فی ثانیہ سے بڑی ہونی چاہیے ۔

۴ ۔ کرکٹ کا گولہ ایک افقی مستوی پر ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے ۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو ۔

۵ ۔ ایک بندوق ہے جس کا دہانہ زمین سے قریب ہے ۔ اِس بندوق سے

ایک گولی فائر کی گئی ہے جو ۶ فٹ لمبے آدمی کے اوپر سے جو ۱۰ گز دور کھڑا ہے عین گذر جاتی ہے اور خود زمین میں ایک چوتھائی میل دور دفن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ گولی زمین کے اوپر جس بلندی تک اڑتی ہے وہ یقیناً ۲۲ گز سے بڑی ہے۔

۶۔ ایک مرمی کا اعظم افقی ٹپہ ۲۵۶ فٹ ہے۔ اس کو پھینکنے کی رفتار کیا ہے اگر اس کو اس رفتار سے ۲۴ فٹ بلند غلام گردش کے فرش پر کے ایک نقطہ سے پھینکا جائے تو اس کا بڑے سے بڑا ٹپہ کیا ہوگا اگر وہ چھت سے نہ ٹکرائے اور غلام گردش کافی طویل ہو۔

۷۔ ثابت کرو کہ ۲۰ میل ٹپہ کے لیے مطلوبہ رفتار کم از کم ۸۲۰ افٹ فی ثانیہ ہوگی اور مرمی کے پرواز کا وقت ۸۱٫۳ ثانئے ہوگا۔

۸۔ مثال ماسبق میں ۲۰ میل ٹپہ کے لیے بارود کی بھرن معلوم کرو یہ فرض کرکے کہ گولے کا وزن ایک ٹن ہے اور بارود کی طاقت ۱۰۰ فٹ ٹن (فی پونڈ بارود) کی قوت پیدا کر سکتی ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ اگر ایک مرمی کو رفتار و سے ایک ہموار مستوی کے اوپر ارتفاع ف سے زاویہ ع پر پھینکا جائے تو اس کا ٹپہ س، مساوات

$$۲\,و^۲\,(ف + س\,مس\,ع) = ج\,س^۲\,قط^۲\,ع$$

سے حاصل ہوگا۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ ایک ہموار مستوی کا وہ رقبہ جو اس توپ کی زد میں ہو جو مستوی کے اوپر ارتفاع ف پر ہے ف کے ساتھ متناسباً بڑھتا ہے اور

$$ا\left(۱ + ۲\,ف\,\sqrt{\frac{\pi}{ا}}\right)$$

کے مساوی ہے جہاں ا وہ رقبہ ہے جو زد میں ہوتا ہے جبکہ توپ مستوی کی ہمواری پر ہوتی ہے۔

۱۱۔ ایک مرمی کو ایک قلعہ سے جو افقی مستوی کے اوپر ۳۰۰ فٹ بلند ہے ۲۰۷۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے فائر کیا جا سکتا ہے۔ معلوم کرو کہ مستوی کا کتنا رقبہ زد میں رہتا ہے۔

۱۲۔ ضلع ا کے ایک منتظم مسدس کو انتصاباً اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا

ایک کنارہ ایک افقی میز پر ٹکا ہوا ہے۔ ایک ذرہ کو اِس طریقہ سے پھینکا گیا کہ وہ اِس مسدس کے چار اوپر کے کونوں کو عین چاٹتے ہوئے گذر جاتا ہے۔ ذرہ کی پرواز میں بلند ترین نقطہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ میز پر ٹپہ $\sqrt{7}$ ا ہے۔

۱۳۔ ایک مشین گن کو ایک مسلح ٹرین پر نصب کیا گیا ہے۔ ٹرین افقی پٹڑیوں پر رفتار و سے دوڑتی ہے اور توپ کے دہانے سے گولے رفتار و سے نکلتے ہیں۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو

(ا) ٹرین کے سامنے

(ب) ٹرین کے پیچھے

عام مثالیں

۱۔ ایک ٹرین ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہے اور وہ ایک منحنی پر پہنچتی ہے جس کا نصف قطر تین چوتھائی میل ہے۔ ٹرین میں دیوار پر ایک کامل چکنا افقی تختہ لگا ہے جس کا کنارہ پٹڑیوں کے متوازی ہے اور اُس جانب ہے جو منحنی کے مرکز سے دُور رہے۔ تختہ پر ایک چھوٹی چیز اس کے کنارے سے ۸ انچ فاصلے پر استادہ ہے۔ ثابت کرو کہ یہ چیز تختہ سے گر جائے گی جبکہ وہ ڈبہ جس میں چیز ہے منحنی کا تقریباً ۴۲ گز فاصلہ طے کرے گا۔ اِس کی افقی رفتار معلوم کرو جبکہ وہ تختے کو چھوڑتی ہے۔

۲۔ ایک غبارہ ایسی چال سے اوپر وار حرکت کر رہا ہے جو ہر ثانیہ میں ۴ فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہی ہے۔ معلوم کرو کہ ۱۰ پونڈ کے ایک جسم کا وزن جبکہ اِس کو کمانی دار ترازو کے ذریعہ غبارے میں معلوم کیا جائے اُس وزن سے کسقدر فرق رکھیگا جو معمولی حالات میں حاصل ہوتا ہے۔ (۲۱۶)

۳۔ ایٹوڈ کی مشین ترازو کے ایک پلڑے پر رکھی گئی ہے اور مشین کی ڈوری کو کلپ کے ذریعہ حرکت کرنے سے روکا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کلپ کو جدا کرتے ہی مشین کا ظاہری وزن بقدر

$$\frac{(ک - ک')^2}{ک + ک'} ج$$

کے تخفیف ہوگا جہاں ک، کَ لٹکے ہوئے وزن ہیں۔

۴۔ طول ل اور وزن و کی ایک ایکساں زنجیر ایک چکنی کھونٹی پر سے گذرتی ہے اور اس کی ہر جانب انتصاباً لٹکتی ہے۔ اگر زنجیر آزادانہ حرکت کر رہی ہو تو ثابت کرو کہ جب ایک جانب اس کا طول لا ہوتا ہے تو کھونٹی پر دباؤ

$$\frac{4\ لا\ (ل - لا)}{ل^2}\ و$$

ہے۔

۵۔ ایک نل سے پانی کی دھار زمین تک انتصاباً گرتی ہے اور اس کی ابتدائی رفتار قابل نظر انداز ہے۔ ثابت کرو کہ اس پانی کا مرکز ثقل جو کسی آن ہوا میں رہتا ہے زمین سے اوپر اس فاصلہ کا دو تہائی ہے جو زمین اور نل کے درمیان ہے۔

۶۔ وزن و کی ایک وزنی ایکساں زنجیر کو ایک ڈوری سے باندھ کر ڈوری کو تناؤ ت سے اوپر اٹھایا گیا ہے۔ زنجیر کے کسی نقطہ پر تناؤ دریافت کرو۔

۷۔ ایک زنجیر ف ٹن کا مستقل بوجھ برداشت کر سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ سکون سے سکون تک کم سے کم وقت جس میں زنجیر و ٹن کے ایک وزن کو انتصابی فاصلہ ف میں سے اٹھا اور اتار سکتی ہے

$$\sqrt{\frac{2ف}{ج}\ \frac{ف}{ف - و}}\ ثانیے$$

ہوگا۔

۸۔ چرخیوں کے ایک نظام میں ایک ثابت اور ایک حرکت پذیر قالب ہے۔ رسی حرکت پذیر قالب کے محور سے بندھی ہے اور اس کے بعد ثابت قالب پر سے گذرتی ہے اور پھر حرکت پذیر قالب کے نیچے سے اور پھر ثابت قالب پر سے۔ وزن ف معلوم کرو جس کو اگر رسی سے باندھ دیا جائے تو وہ معلومہ وزن و کو جو حرکت پذیر قالب سے بندھا ہے سہار سکے۔ (قالب اس قدر چھوٹے ہیں کہ رسی کے تمام سیدھے حصوں کو متوازی خیال کیا جا سکتا ہے)۔

اگر اوزان متوازن نہ ہوں تو ثابت کرو کہ و کا نیچے وار اسراع

$$\frac{و - ۳ ف}{و + ۹ ف} ج$$

ہوگا جب کہ رسی کے وزن کو نظر انداز کردیا گیا ہو اور حرکت پذیر قالب کا وزن و میں شامل ہو۔

۹ — ایک چرخی جو کُل بوجھ و کو سہارے ہوئے ہے رسی کے ایک حلقہ میں لٹکائی گئی ہے یہ رسی دو ثابت چرخیوں پر سے گذرتی ہے اور اس کے سروں سے اوزان ف اور ق آزادانہ لٹک رہے ہیں۔ رسی کا ہر حصہ انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ جب اس نظام کو چھوڑ دیا جاتا ہے تو و ساکن رہے گا یا ایکساں رفتار سے حرکت کریگا (۲۱۷)

بشرطیکہ $\frac{۱}{ف} + \frac{۱}{ق} = \frac{۴}{و}$ اور کہیں رگڑ نہ ہو۔

اگر یہ ربط موجود نہ ہو تو و کا اسراع معلوم کرو۔

۱۰ — ایک ذرہ جو جاذبہ کے تحت گر رہا ہے کسی خاص ثانئے میں ۱۰۰ فٹ طے کرتا ہے۔ اس کے بعد ۱۰۰ فٹ طے کرنے میں اسے کتنا وقت لگیگا۔ ہوا کی مزاحمت نظر انداز کی گئی ہے۔

اگر مزاحمت کی وجہ سے وقت ۹ ر ثانیہ لگے تو مزاحمت (مستقل فرض کردہ) کی نسبت ذرہ کے وزن کے ساتھ معلوم کرو۔

۱۱ — ثابت کرو کہ کسی منحنی سے کسی دوسرے منحنی تک (جو اسی انتصابی مستوی میں ہے) سریع ترین اُتار کا خط ان منحنیوں کے ان نقطوں پر کے عمادوں کے ساتھ مساوی زاوئے بناتا ہے جن پر وہ ان سے ملتا ہے۔

۱۲ — ایک انتصابی دائرے کے محیط پر اس نقطہ کا محل معلوم کرو کہ اس سے مرکز تک خط مستقیم میں اُتار کا وقت وہی ہو جو زیر ترین نقطہ تک اُتار میں صرف ہوتا ہے۔

۱۳ — ماسکہ سے مکافی تک تیز ترین اُتار کا خط معلوم کرو جبکہ مکافی کا محور انتصابی ہو اور راس اوپر وار۔ نیز ثابت کرو کہ اس خط کا طول وتر خاص کے مساوی ہے۔

۱۴ — ایک ناقص کو اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم انتصابی ہے۔

وہ قطر معلوم کرو جس کے نیچے کوئی ذرہ کم سے کم وقت میں گر سکتا ہے۔ خروج المرکز کی کم سے کم کیا قیمت ہے تاکہ یہ قطر محور اعظم نہ ہو سکے۔

۱۵۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانہ پر فائر کرنا مقصود ہے تاکہ وہ نشانے پر علی القوائم ٹکرائے۔ اگر گولی کی رفتار و ہو اور فائرنگ کے نقطے سے نشانے کا فاصلہ ا ہو تو ثابت کرو کہ گولی کا زاویہ ارتفاع $\frac{1}{2}$ جب$^{-1}$ $\left(\frac{2\text{ا ج}}{\text{و}^2}\right)$ ہونا چاہیے اور ثابت کرو کہ نشانے کا وہ نقطہ جس پر ضرب پڑتی ہے اُس نقطہ کی بہ نسبت نصف ارتفاع پر ہوگا جس کی جانب نشانہ باندھا جاتا ہے۔

۱۶۔ ایک گولی کو ایک انتصابی نشانے پر فائر کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولی کو فائر کرنے والا شخص نشانے پر گولی کے ظل کو دیکھے تو ظل یکساں رفتار سے حرکت کرتا نظر آئے گا۔

۱۷۔ ایک بندوق دو گولیوں کو فائر کرتی ہے، ایک کو رفتار و کے ساتھ زاویہ ارتفاع عہ پر اور دوسری کو رفتار وَ کے ساتھ زاویہ ارتفاع عَہ پر (عہ > عَہ) اور گولیاں ایک ہی انتصابی مستوی میں جاتی ہیں۔ ثابت کرو کہ گولیاں ٹکرائیں گی اگر فائرنگ کے درمیان وقفہ

$$\frac{2}{\text{ج}} \cdot \frac{\text{و وَ جب (عہ - عَہ)}}{\text{و جب عہ + وَ جب عَہ}}$$

ہے۔

۱۸۔ ا، ب، ج، ایک افقی خط میں ترتیب وار تین نقطے ہیں اور ا ب ۶۴۰ فٹ ہے۔ ایک ذرہ کو ا سے رفتار ۳۹۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں پھینکا گیا ہے جو ا ج کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{5}{12}$ بناتی ہے۔ اُسی آن ایک دوسرے ذرہ کو ب سے رفتار ۲۵۰ فٹ فی ثانیہ سے اُس سمت میں پھینکا گیا ہے جو ب ج کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{3}{4}$ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ذرے ٹکرائیں گے، نیز معلوم کرو کہ کب اور کہاں؟

۱۹۔ ایک توپ ۴۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گولے سر کرتی ہے۔ (۲۱۸)

ایک پہاڑی، سطح مستوی پر ۲۰۰ فٹ بلند ہے اور توپ مستوی کے اُس نقطہ سے ... اگز کے فاصلہ پر ہے جو پہاڑی کے سرے کے انتصاباً نیچے ہے۔ پہاڑی کے سرے کے عین پیچھے کتنا فاصلہ توپ کے گولوں سے محفوظ ہو گا۔

۲۰ — ایک بندوق کی مکھیاں غلط نصب ہیں جس کی باعث گولی تین فیصدی زیادہ دور تک جاتی ہے بہ نسبت اُس فاصلے کے جو مکھیوں سے معلوم ہوتا ہے۔ ایک نشانہ باز جو بندوق کی اِس خطا سے واقف نہیں ہے ایک نشان پر جو ... اگز کے فاصلہ پر ہے نشانہ باندھتا ہے۔ اگر گولی کی رفتار ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ ہو تو ثابت کرو کہ گولی نشان سے تقریباً ایک گز اوپر سے گذر جائے گی۔

۲۱ — ایک بندوق کی مکھیاں درست ہیں اور ا فٹ فاصلہ پر کسی چیز پر نشانہ باندھنے کے لیے بندوق کو زاویہ عہ تک اٹھانا پڑتا ہے۔ نشانہ باز کا ہاتھ تھرتھرانے کی وجہ سے بندوق اُن سمتوں میں رہتی ہے جو اصلی سمت سے چھوٹے زاویہ طہ کے اندر کہیں واقع ہو سکتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر نشانہ باز گولیوں کو متواتر فائر کرے تو وہ نقطے جن پر گولیوں کی ضرب پڑے گی سب کے سب ایک چھوٹے قطع ناقص کے اندر واقع ہوں گے جس کے نیم محاور ا طہ جم عہ اور ا طہ (ا ۔ مس۲ عہ) ہوں گے۔

جب، عہ $= \frac{\pi}{4}$ تو اِس قطع ناقص کا محور اصغر معدوم ہوتا ہے اور اِس لیے گولیوں کو ایک خط مستقیم میں واقع ہونا چاہئے۔ اِس نتیجہ کا مطلب بیان کرو۔

۲۲ — ایک ذرہ سکون سے ایک چکنے کرہ کے بلند ترین نقطے سے اس کی بیرونی سطح پر نیچے وار پھسلتا ہے۔ وہ کرہ سے نقطہ ف پر جدا ہوتا ہے اور فضاء میں ایک قطع مکافی مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مکافی کے نقطہ ف پر کا دائرۂ انحناء مرتب کو مس کریگا۔

۲۳ — ایک ذرہ کو ایک چکنے کرہ کی اندرونی سطح کے زیر ترین نقطے سے افقاً پھینکا گیا ہے۔ وہ کرہ کی سطح سے نقطہ ف پر جدا ہوتا ہے اور ایک قطع مکافی مرتسم کرنے کے بعد پھر کرہ سے نقطہ ق پر ٹکراتا ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق اور ف پر کا مماس، انتصابی کے ساتھ مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

۲۴ — ایک توپ کو ایک پہاڑی کے رُخ پر جو مُستوی ہے نصب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ کُل رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے ایک قطع ناقص ہے جس کا ماسکہ توپ پر ہے اور جس کا خروج المرکز پہاڑی کے میلان کی جیب ہے اور نیم وتر خاص اُس ارتفاع کے نصف کے مساوی ہے جس تک گولی کی ابتدائی رفتار گولی کو لیجا سکتی ہے

۲۵ — ایک پہاڑی کا رُخ مستوی ہے اور اس کا میلان عہ ہے ۔ ایک توپ کو پہاڑی پر کے ایک قلعہ پر جس کا ارتفاع ع ہے نصب کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ پہاڑی کے مُستوی رُخ کا وہ رقبہ جو توپ کی زد میں رہتا ہے

$$۴ \pi ر (ر + ع \text{ جم}^2 \text{ عہ}) \text{ قط}^2 \text{ عہ}$$

ہے جہاں گولی کی ابتدائی رفتار $\sqrt{۲ \text{ ج ر}}$ ہے۔

۲۶ — ایک کُروی خول جس کی کمیت ک ہے پھٹ پڑتا ہے جبکہ وہ زمین کے اوپر ف ارتفاع پر ناقابل قدر رفتار سے حرکت کر رہا ہے ۔ خول بہت چھوٹے ذرات میں منقسم ہو جاتا ہے اور ان میں سے ہر ذرہ کرہ کے مرکز سے رفتار ر کے ساتھ مرکز سے دُور حرکت کرتا ہے اور بالآخر زمین پر گرتا ہے ۔ اُن ذروں کی کُل کمیت معلوم کرو جو اُس نقطہ سے جو خول کے انتصاباً نیچے ہے کسی مقررہ فاصلہ پر اکائی رقبہ میں ملیں گے ۔

۲۷ — ایک خول ہوا میں پھٹتا ہے اور اس کے تمام ذرے دھماکہ کی باعث مساوی رفتاریں حاصل کرتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ کسی آن ذرے ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور ان کے راستوں کے ماسکے بھی ایک کرہ پر واقع ہوں گے اور راس ایک کرہ نما پر واقع ہوں گے ۔

۲۸ — ایک ذرہ ایک کھُردرے مائل مستوی اب کے نیچے پھسلتا ہے، وہ مُستوی کے نقطہ ا سے حالت سکون سے حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور مُستوی کو نقطہ ب پر چھوڑنے کے بعد آزادانہ ایک قطع مکافی مرتسم کرتا ہے اگر مرتسمہ مکافی کا ماسکہ س ہے تو ثابت کرو کہ زاویہ اس ب $= \frac{\pi}{2} +$ صہ جہاں صہ رگڑ کا زاویہ ہے ۔

۲۹ — ایک قلعہ سے پانی پر تیرنے والے ایک نشان کا مشاہدہ کیا گیا تو

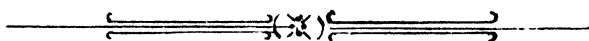
معلوم ہوا کہ اس کا زاویہ انخفاص افق کے نیچے عہ ہے۔ اس نشان پر ایک توپ کو ارتفاع بہ پر فائر کیا گیا لیکن گولہ پانی پر اس نقطہ سے جا لگا جس کا انخفاص عَہ تھا۔ ثابت کرو کہ نشان پر ضرب لگانے کے لیے گولے کو ارتفاع طہ پر فائر کرنا چاہئے جہاں

$$\frac{\text{جم طہ جیب (طہ + عہ)}}{\text{جم عہ جیب (بہ + عَہ)}} = \frac{\text{جم}^2\text{ عہ جیب عَہ}}{\text{جم}^2\text{ عَہ جیب عہ}}$$

۳۰۔ ثابت کرو کہ کم سے کم توانائی جس کے ذریعہ ایک ذرہ کو ایک دیوار کے اوپر پھینکا جا سکتا ہے جب کہ دیوار پھینکنے کے نقطہ سے ا فاصلہ پر ہو حسب ذیل ہے:-

$$\frac{1}{2}\text{ ک ج ا } \frac{1+\text{مس}\frac{1}{2}\text{عہ}}{1-\text{مس}\frac{1}{2}\text{عہ}}$$

جہاں پھینکنے کے نقطہ پر دیوار کے سرے کا ارتفاع عہ ہے۔

۳۱۔ نصف قطر ا کا چکی کا ایک پاٹ اس طرح گھومتا ہے کہ اس کی کور کی رفتار و ہے اور پاٹ کی کور سے آٹے کے ذرات نکلتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے راستوں کا لفاف ایک قطع مکافی ہے جس کا محور انتصابی ہے اور جس کا ماسکہ پاٹ کے مرکز کے انتصاباً اوپر $\frac{\text{ا}^2\text{ج}}{2\text{ و}^2}$ کے فاصلہ پر ہے۔

(۲۲۰)

نواں باب

ذروں کے نظاموں کی حرکت

حرکت کی مساواتیں

۱۷۶ — اِس باب میں ذروں کے نظاموں کی حرکت پر بحث کی جائے گی اور اُن اعمال اور تعاملات کا بھی لحاظ رکھا جائے گا جو ذروں کے مختلف زوجوں کے درمیان وقوع پذیر ہو سکتے ہیں۔ ابتداً اُن نتیجوں کو جو ایک ذرہ کے لیے حاصل ہو چکے ہیں اختصاراً بیان کرنا اور انہیں پہلے کی بہ نسبت زیادہ تحلیلی شکل میں رکھنا سہولت بخش ہوگا۔

ایک واحد ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے کُل نظام کا حاصل ایک واحد قوت ہونی چاہیئے کیونکہ یہ سب قوتیں ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ ہم اِس حاصل کو ف سے تعبیر کرتے ہیں اور تین قائم محوروں کی سمت میں اس کے اجزائے ترکیبی کو لا، ما، ے سے ظاہر کرتے ہیں۔

نیز چونکہ ذرہ کو ایک نقطہ سمجھا جا سکتا ہے اِس لئے اس کا ایک مُعین اسراع ع ہونا چاہیئے اور چونکہ ع ایک سمتی ہے اس لئے اس اسراع کو محدود کے تین محوروں میں تین اجزائے ترکیبی ع، ع، ع کا مرکب فرض کیا جا سکتا ہے۔

حرکت کے دوسرے قانون سے رشتہ

$$\text{ف} = \text{ک ع}$$

حاصل ہوتا ہے۔

لیکن حرکت کے دوسرے قانون سے اس سے کچھ زیادہ بھی معلوم ہوتا ہے اور وہ یہ کہ ف اور ع کی سمتیں ایک ہی ہیں۔ فرض کرو کہ اس واحد سمت کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں تو

$$\text{لا} = \text{ل ف}،\quad \text{ما} = \text{م ف}،\quad \text{ے} = \text{ن ف}$$

$$\text{اور نیز}\quad \text{ع}_{\text{لا}} = \text{ل ع}،\quad \text{ع}_{\text{ا}} = \text{م ع}،\quad \text{ع}_{\text{ی}} = \text{ن ع}$$

ان رشتوں اور رشتہ (۶۵) کے ذریعہ حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

$$\left.\begin{aligned} \text{لا} &= \text{ک ع}_{\text{لا}} \\ \text{ما} &= \text{ک ع}_{\text{ا}} \\ \text{ے} &= \text{ک ع}_{\text{ی}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۶)$$

یہ مساواتیں تحلیلی شکل میں ایک ذرہ کی حرکت کی ہیں۔ یہ ریاضی کی زبان میں صرف حرکت کے دوسرے قانون کو بیان کرتی ہیں۔ (۲۲۱)

۱۷۷ — فرض کرو کہ کسی آن ذرہ کے محدد لا، ما، ی ہیں اور فرض کرو کہ اس کی رفتار کے تین اجزائے ترکیبی ع، و، ط ہیں۔ جزو ترکیبی ع، محور لا پر اس رفتار کو تعبیر کرتا ہے جو محور لا پر متحرک نقطہ کے ظل کی ہے اور کسی آن اس نقطہ کا فاصلہ مبدائے سے صرف لا ہے۔ اس لیے رفتار کی تعریف سے

$$\text{ع} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶۷)$$

اسی طرح

$$\text{و} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}$$

$$\text{ط} = \frac{\text{فر ی}}{\text{فر ت}}$$

وہ شرح جس سے رفتار کا جزو ترکیبی لا بڑھتا ہے $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر ت}}$ ہے لیکن

اِس کو $\text{ع}_{\text{لا}}$ فرض کیا جا چکا ہے کیونکہ وہ اسراع کا جزو ترکیبی لا ہے ۔ اس طرح

$$\text{ع}_{\text{لا}} = \frac{\text{فر ء}}{\text{فر ت}}$$

اسی طرح

$$\text{ع}_{\text{ما}} = \frac{\text{فر و}}{\text{فر ت}}$$

$$\text{ع}_{\text{ی}} = \frac{\text{فر ط}}{\text{فر ت}}$$

ء، و، ط کی جو قیمتیں اوپر حاصل ہوئی ہیں اُن کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں :

$$\text{ع}_{\text{لا}} = \frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}}$$

$$\text{ع}_{\text{ما}} = \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر ت}^{2}}$$

$$\text{ع}_{\text{ی}} = \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ی}}{\text{فر ت}^{2}}$$

(۲۲۲) حرکت کی مساواتوں (٦٦) میں اسراع کے اجزائے ترکیبی کے اِن جملوں کو درج کرنے سے یہ مساواتیں حسب ذیل نئی شکل میں حاصل ہوتی ہیں:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\text{لا}} &= \text{ک}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{لا}}{\text{فر ت}^{2}} \\ \bar{\text{ما}} &= \text{ک}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر ت}^{2}} \\ \bar{\text{ہے}} &= \text{ک}\,\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ی}}{\text{فر ت}^{2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٦٨)$$

۱۷۸ — فرض کرو کہ ذروں کا ایک نظام — $\text{ک}_{۱}$ نقطہ $\text{لا}_{۱}$، $\text{ما}_{۱}$، $\text{ی}_{۱}$ پر، $\text{ک}_{۲}$ نقطہ $\text{لا}_{۲}$، $\text{ما}_{۲}$، $\text{ی}_{۲}$ پر وغیرہ — ہے اور فرض کرو کہ اِن پر عمل کرنے والی قوتیں

اجزائے ترکیبی $لا_۱$، $ما_۱$، $ے_۱$، $لا_۲$، $ما_۲$، $ے_۲$ وغیرہ ہیں ۔

اب مساواتوں (۶۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$لا_۱ = ک_۱ \frac{فر^۲ لا_۱}{فرت^۲}$$

$$لا_۲ = ک_۲ \frac{فر^۲ لا_۲}{فرت^۲}، \text{ وغیرہ}$$

اس لئے جمع کرنے سے $\sum لا = \sum ک \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲}$ ...... (۶۹)

جہاں $\sum$، نظام کے تمام ذروں پر عمل جمع کو تعبیر کرتا ہے ۔

اِس مساوات کی دائیں جانب کا رکن $\sum لا$، ولا کی سمت میں اُن تمام قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ ہے جو نظام کے تمام ذروں پر عمل کرتی ہیں ۔ دفعہ ۵۰ کی بموجب اِن قوتوں کو دو جماعتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے :

(ا) بیرونی قوتیں ـــــ وہ قوتیں جو ذروں پر نظام کے باہر سے عمل کرتی ہیں ۔

(ب) اندرونی قوتیں ـــــ وہ قوتیں جو نظام کے ذروں کے درمیان ایک دوسرے پر عمل کرتی ہیں ۔

حسب دفعہ ۵۰ یہ معلوم ہوتا ہے کہ قوتوں کی اِس دوسری جماعت سے $\sum لا$ میں کوئی اضافہ نہیں ہوتا کیونکہ یہ سب قوتیں جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور ہر جوڑا عمل اور تعامل پر جس کے اجزائے ترکیبی مساوی اور مخالف ہوتے ہیں مشتمل ہوتا ہے ۔

پس $\sum لا$ کو محسوب کرنے میں ہمیں صرف بیرونی قوتوں کو ملحوظ رکھنا ہوگا ۔

(۲۲۳) مساوات (۶۹) کی بائیں جانب کی رقم $\sum ک \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲}$ کی شکل بھی

بدلی جاسکتی ہے۔ کیونکہ مساوات (۶۷) کی رو سے $ع = \frac{فر ع}{فر ت}$ اور اس لیے

$\frac{فر^۲ لا}{فر ت^۲}$ کی قیمت $\frac{فر ع}{فر ت}$ ہے، اس لیے

$$\Sigma ک \frac{فر^۲ لا}{فر ت^۲} = \Sigma ک \frac{فر ع}{فر ت} = \frac{فر}{فر ت} (\Sigma ک ع) \quad (۷۰)$$

کسی ذرہ کے معیار حرکت سے مراد اس کی کمیت اور رفتار کا حاصل ضرب ہے (دفعہ ۲۰) اس لیے ذرہ کا معیار حرکت ایک سمتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ک ع، ک و، ک ط ہیں اور ک ع کو معیار حرکت کا جزو ترکیبی لا کہا جاسکتا ہے۔ نظام کا ہر ذرہ معیار حرکت رکھیگا اور اس کے اجزائے ترکیبی لا (Σ ک ع) ہوں گے اور یہ وہ مقدار ہے جو مساوات (۷۰) کی بائیں جانب واقع ہے اب ہم مساوات (۶۹) کی جگہ حسب ذیل مساوات رکھ سکتے ہیں:

$$\Sigma لا = \frac{فر}{فر ت} (\Sigma ک ع) \quad (۷۱)$$

جہاں Σ لا سے بیرونی قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور Σ ک ع، معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی لا کا مجموعہ ہے۔

خطی معیار حرکت کا بقا

۱۷۹۔ جب کوئی بیرونی قوتیں موجود نہ ہوں تو $\Sigma لا = ۰$ اور اس لیے

$$\frac{فر}{فر ت} (\Sigma ک ع) = ۰، \quad (۷۲)$$

اسی طرح

$$\frac{فر}{فر ت} (\Sigma ک و) = ۰، \quad (۷۳)$$

$$\frac{فر}{فر ت} (\Sigma ک ط) = ۰، \quad (۷۴)$$

اِن مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مقداریں

$$\Sigma\,\text{ک ع}،\ \Sigma\,\text{ک و}،\ \Sigma\,\text{ک ط}$$

وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتیں — یعنی کل معیار حرکت کے اجزائے ترکیبی مستقل رہتے ہیں اور اِس لیے کل معیار حرکت جسے ایک سمتی تصور کیا گیا ہے مستقل ہے۔ اِس کو معیار حرکت کے بقا کا اصول کہتے ہیں۔ اسے الفاظ میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے:

جب ذروں کا کوئی نظام حرکت کرتا ہے درآنحالیکہ اِس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں تو نظام کا کل معیار حرکت مقدار اور سمت میں مستقل رہتا ہے۔

نظام کے مرکز ثقل کی حرکت

۱۸۰ — اب ہم عام مساواتوں (۷۱)

$$\Sigma\,\text{لا} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\Sigma\,\text{ک ع}\right)\ \text{وغیرہ} \qquad (۷۵)$$

کی طرف رجوع کرتے ہیں —

فرض کرو کہ نظام کے ذروں کے مرکز ثقل کے محدد کسی آن $\bar{\text{لا}}$، $\bar{\text{ما}}$، $\bar{\text{ہی}}$ ہیں اور فرض کرو کہ اِس نقطہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی $\bar{\text{ع}}$، $\bar{\text{و}}$، $\bar{\text{ط}}$ سے تعبیر ہوتے ہیں —

اب

$$\bar{\text{ع}} = \frac{\text{فر}\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}}\ ،\ \text{وغیرہ}$$

$\bar{\text{لا}}$ کی قیمت بموجب مساوات (۸) حسب ذیل ہے:

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\Sigma\,\text{ک لا}}{\Sigma\,\text{ک}}$$

$$\therefore\quad \bar{\text{ع}} = \frac{\text{فر}\,\bar{\text{لا}}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\Sigma\,\text{ک لا}}{\Sigma\,\text{ک}}\right)$$

$$= \frac{\Sigma\,\text{ک}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}}{\Sigma\,\text{ک}} = \frac{\Sigma\,\text{ک ع}}{\Sigma\,\text{ک}}$$

پس اگر تمام ذروں کی کل کمیت $\Sigma\,\text{ک} = \text{ک}$ تو

$$\Sigma\,\text{ک ع} = \text{ک}\,\bar{\text{ع}}$$

(۲۲۵)

اب مساوات (۷۵) ہو جاتی ہے

$$\Sigma\,\text{لا} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{ع}}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots (۷۷)$$

اسی طرح مساواتیں

$$\Sigma\,\text{ما} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{و}}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots (۷۸)$$

$$\Sigma\,\text{ے} = \text{ک}\,\frac{\text{فر}\,\bar{\text{ط}}}{\text{فرت}} \quad \ldots\ldots\ldots (۷۹)$$

حاصل ہوتی ہیں۔

چونکہ

$$\frac{\text{فر}\,\bar{\text{ع}}}{\text{فرت}}\;،\;\frac{\text{فر}\,\bar{\text{و}}}{\text{فرت}}\;،\;\frac{\text{فر}\,\bar{\text{ط}}}{\text{فرت}}$$

مرکز ثقل کے اسراع کے اجزائے ترکیبی ہیں اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ مرکز ثقل کی حرکت وہی ہے جو ہوتی اگر اس کی بجائے کمیت ک کا ایک ذرہ رکھا جاتا اور اس پر وہ قوت عمل کرتی جس کے اجزائے ترکیبی $\Sigma\,\text{لا}$، $\Sigma\,\text{ما}$، $\Sigma\,\text{ے}$ ہیں۔ نیز یہ قوت صرف وہ قوت ہے جو تمام بیرونی قوتوں کا حاصل ہے جبکہ ان قوتوں کو اس خیالی ذرہ پر عمل کرتا ہوا سمجھا جائے جس کے متعلق ہم نے فرض کیا ہے کہ وہ مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

۱۸۱ — اُس مخصوص صورت میں جس میں کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں مرکزِ ثقل حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ ایک ایسا ذرہ ہے جس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں، اس سبب اس کی حرکت ایک خط مستقیم میں یکساں رفتار کی حرکت ہوگی۔

۱۸۲ — مرکزِ ثقل کی حرکت اس مخصوص صورت میں اور اُس عام تر صورت میں جس میں بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں حسب ذیل دو قوانین کے تحت فرض کیجا سکتی ہے:

قانون (۱) — ذروں کے ہر نظام کا مرکزِ ثقل سکون کی حالت حالت میں رہتا ہے یا ایک خط مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت میں الّا آنکہ اس نظام پر بیرونی قوتوں کا عمل اس حالت کو بدلنے پر مجبور کرے۔

قانون (۲) — جب ذروں کے کسی نظام پر بیرونی قوتیں عمل کرتی ہیں تو مرکزِ ثقل کی حرکت وہی ہوتی ہے جو ہوتی اگر ذروں کی تمام کمیتیں ایک واحد ذرہ میں مرتکز ہوتیں اور یہ ذرہ مرکزِ ثقل کے ساتھ حرکت کرتا اور اس پر تمام بیرونی قوتیں لگائی جاتیں۔

ان قوانین کو نیوٹن کے قوانین (۱) اور (۲) کی توسیعات خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ انہیں ذروں کے ایک نظام کی حرکت پر عائد کیا جائے۔ (۲۲۶)
اب ہم اس امر کی توجیہہ کر سکتے ہیں کہ کیوں نیوٹن کے دوسرے قانون کو محدود جثے کے اجسام کی حرکت پر عائد کرنا اکثر جائز ہے گویا کہ یہ اجسام ذرے ہیں (مقابلہ کرو دفعہ ۲۶ کے ساتھ)۔

معیارِ حرکت کے بقا کا اصول کسی حرکیاتی مسئلہ کے حل کرنے میں

جس میں صرف دو اجسام حرکت میں ہوں اکثر کافی ثابت ہوتا ہے۔

توضیحی مثال

کمیت ک کا ایک گولہ کمیت ک کی توپ سے سر کیا گیا ہے اور توپ افقی پٹڑیوں کے ایک زوج پر پیچھے حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ توپ کے پیچھے ہٹنے کی رفتار معلوم کرو اور اس کے ہٹنے کا اثر گولے کی حرکت پر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ توپ کو سر کرنے سے پیشتر وہ ایسے محل میں قائم ہے جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اور فرض کرو کہ گولے کی ابتدائی رفتار یعنے وہ رفتار جو توپ کے لحاظ سے اس کے دہانے سے خارج ہوتے وقت ہوتی ہے ع ہے اور گولے کی کمیت ک ہے۔

فرض کرو کہ زمین کے لحاظ سے گولے کی رفتار کے اجزائے ترکیبی افقی اور انتصابی ء اور و ہیں اور فرض کرو کہ توپ کی پیچھے کی رفتار ع ہے جس کو افقی سمت میں اس سمت کے خلاف پیمائش کیا گیا ہے جس کی جانب توپ قائم کی گئی ہے۔

وہ نظام جو توپ، بارود، اور گولے پر مشتمل ہے بیرونی قوتوں کے عمل سے آزاد نہیں ہے لیکن یہ قوتیں "یعنے نظام کا وزن اور زمین کے ساتھ اس کا تعامل" کوئی افقی جزو ترکیبی نہیں رکھتیں۔ اس لیے نظام کا افقی معیار حرکت دھماکے سے غیر متبدل رہنا چاہئے۔ یہ افقی معیار حرکت ابتداءً صفر تھا اور اس لیے وہ صفر ہے جبکہ گولہ توپ سے نکلتا ہے۔ پس بارود کے وزن کو نظر انداز کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ک ع ـ ک ء = ... (۱)

توپ کے لحاظ سے گولے کی جو رفتار ہے اس کے اجزائے ترکیبی

ء + ع، و

ہیں۔ لیکن یہ رفتار، رفتار ع ہونی چاہئے جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے اسلئے

$$\text{ع}' + \text{ع} = \text{و جم عہ} \qquad (\text{ب})$$

$$\text{و}' = \text{و جب عہ} \qquad (\text{ج})$$

مساوات (ا) اور مساوات (ب) سے ہم معلوم کرتے ہیں

$$\frac{\text{ع}'}{\text{ک}} = \frac{\text{ع}}{\text{ک}'} = \frac{\text{و جم عہ}}{\text{ک}+\text{ک}'}$$

پس پیچھے ہٹنے کی رفتار ہے

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}}{\text{ک}+\text{ک}'}\,\text{و جم عہ}$$

(۲۲۷)

گولے کی اصلی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں

$$\text{ع}' = \frac{\text{ک}'}{\text{ک}+\text{ک}'}\,\text{و جم عہ}$$

$$\text{و}' = \text{و جب عہ}$$

اس طرح گولے کی اصلی رفتار

$$\sqrt{\text{ع}'^2 + \text{و}'^2} = \text{و}\left[1 - \frac{\text{ک}(2\text{ک}'+\text{ک})}{(\text{ک}'+\text{ک})^2}\,\text{جم}^2\text{عہ}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ہے اور زاویہ ارتفاع طہ مساوات

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{و}'}{\text{ع}'} = \frac{\text{ک}+\text{ک}'}{\text{ک}'}\,\text{مس عہ}$$

سے حاصل ہوتا ہے ۔

مثالیں

۱۔ ایک خالی ریلوے ڈبہ ۸ ٹن وزنی ساکن ہے، ایک دوسرا مشابہ ڈبہ جس پر ۲۴ ٹن کا بوجھ ہے اور جو ایک میل فی گھنٹہ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے اول الذکر ڈبے سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں ڈبے باہم حرکت کرتے ہیں ۔ اِن کی مشترک رفتار معلوم کرو ۔

۲ — کمیت ک کی ایک توپ، کمیت کَ کا ایک گولہ افقاً فائر کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ بارود سے جتنا کام انجام پاتا ہے اس کی ایک کسر $\frac{ک}{ک + کَ}$ توپ کو پیچھے دھکہ دینے میں ضائع ہوتی ہے۔

۳ — کمیت ک کا ایک ذرہ، زاویہ عہ کے ایک چکنے مائل مستوی پر نیچے پھسلتا ہے اور خود مستوی (جس کی کمیت کَ ہے) ایک چکنے میز پر پھسلنے میں آزاد ہے۔ ذرہ اور مستوی کا اسراع معلوم کرو۔

۴ — ایک خول کا مشاہدہ کیا گیا کہ وہ اس وقت پھٹا جبکہ وہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر تھا اور پھٹ کر وہ دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوا جن میں سے ایک انتصاباً نیچے گرتا نظر آیا۔ ثابت کرو کہ دوسرا حصہ ایک قطع مکافی مرتسم کرے گا جس کا وتر خاص ابتدائی مکافی کے وتر خاص کا چار گنا ہوگا۔

۵ — ایک گولی جس کا وزن $\frac{1}{2}$ اونس ہے ایک پرندے کو جس کا وزن ۵ پونڈ ہے لگتی ہے جبکہ وہ ہوا میں اڑ رہا تھا۔ گولی کی ضرب پڑتے وقت گولی کی افقی رفتار ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور پرند زمین سے اوپر ۶۴ فٹ بلندی پر اسی افقی سمت میں رفتار ۲۰ فٹ ثانیہ سے اڑ رہا تھا۔ ثابت کرو کہ پرند اس مقام سے جہاں اس پر مار پڑی تھی تقریباً ۲۰۲۵ فٹ آگے گریگا۔

۶ — ۵۰۰۰ ٹن کا ایک جہاز جو ۲۰ بحری میل فی گھنٹہ کی شرح سے جارہا ہے اچانک ایک وہیل مچھلی سے ٹکراتا ہے جس کا وزن ۱۲ ٹن ہے اور جو پانی کی سطح پر سو رہی ہے۔ جہاز کی چال کتنی گھٹیگی؟ (پانی کی رفتار کو نظر انداز کرو)۔

۷ — ایک پارسل کو جس کا وزن ۲ ہنڈرویٹ ہے ایک ریل سے جو ۶۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے جارہی ہے پھینکا گیا ہے، پھینکتے وقت اس کی افقی رفتار ٹرین کے لحاظ سے ۱۱ فٹ فی ثانیہ ہے اور پٹڑیوں کے علی القوائم ہے۔ وہ ۳ ہنڈرویٹ وزنی دستی گاڑی پر گرتا ہے جو ایک ہموار چبوترے پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور اس کے پہیئے اس طرح ہیں کہ ان کی حرکت پٹڑیوں سے ۳۰° کا زاویہ بنالیگی کس رفتار سے گاڑی حرکت میں آئے گی؟

(۲۲۸) ۸ — ۸ پونڈ کی ایک کمیت جو شمالاً ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہی ہے ۶ پونڈ کی ایک کمیت سے جو شرقاً ۱۴ فٹ فی ثانیہ سے حرکت کر رہی ہے ٹکراتی ہے اور اس کی حرکت میں °۳۰ کا انصراف واقع ہوتا ہے اور اس کی رفتار بقدر ایک فٹ فی ثانیہ کے بڑھ جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ دوسری کمیت کی رفتار بقدر ۳۰ء۷ فٹ فی ثانیہ کے گھٹ جاتی ہے۔ اس کی حرکت کی نئی سمت معلوم کرو۔

۹ — دو برف بجرے جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے کامل چکنے برف پر ساکن کھڑے ہیں اور ان کے پیندے ایک ہی سمت میں ہیں۔ ایک شخص کمیت ک' ایک بجرے سے دوسرے پر کودتا ہے اور فوراً بعد ہی دوسرے سے پہلے پر واپس آتا ہے۔ ثابت کرو کہ بجروں کی انتہائی رفتاروں میں نسبت ک + ک' : ک ہے۔

توانائی بالحرکت

۱۸۳ — ذروں کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت کے مطالعہ کی ابتداء بہترین طریقہ پر اس طرح کی جا سکتی ہے کہ سب سے اول اس مشکل کی طرف اپنی توجہ کو منعطف کیا جائے جو اس کتاب میں تا حال زیر بحث نہیں آئی ہے۔ اس مشکل کی وضاحت ایک مثال کے ذریعہ کی جائے گی۔

فرض کرو کہ ایک جہاز پانی میں ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور عرشہ پر سے ایک شخص کمیت ک کا ایک گولہ جہاز کے لحاظ سے ۳۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے آگے پھینکتا ہے۔ اگر یہ شخص فضاء میں ساکن ہوتا تو ہم کہہ سکتے کہ اس نے اتنا کام انجام دیا ہے جو گولے کی آخری توانائی بالحرکت کے مساوی ہے اور اس لئے $\frac{1}{2}$ ک $(30)^2$ یا ۴۵۰ ک ہے لیکن جہاز کے عرشہ پر گولے کی ابتدائی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ تھی اور شخص اس رفتار کو ۵۰ تک بڑھاتا ہے۔ اس لیے گولے کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی

$$\frac{1}{2}\text{ک}(50)^2 - \frac{1}{2}\text{ک}(20)^2$$

یعنے ۰.۵۰۱ ک ہے۔ اگر اس سے اُس شخص کا کام تعبیر ہو تو ہمیں یہ فرض کرنا پڑتا ہے کہ جہاز کے عرشہ سے گولہ پھینکنا زمین پر سے پھینکنے کی بہ نسبت دُگنے سے زیادہ سخت کام ہے۔ یہ صریحاً غلط ہے۔

۱۸۴۔ خطا اس میں واقع ہوئی ہے کہ پھینکنے والا شخص نہ صرف گولے کو رفتار ایصال کرتا ہے بلکہ جہاز کو بھی۔ اگر وہ گولے کو آگے پھینکتا ہے تو اُسکو ساتھ ہی معیار حرکت کے بقا کے اصول کی رو سے جہاز کو پیچھے وار رفتار ایصال کرنی چاہئے جس کا معیار حرکت گولے کے آگے وار معیار حرکت کے مساوی اور مخالف ہوگا۔

کل کام جو انجام پایا اُس تبدیلی کے مساوی ہے جو جہاز اور گولے کی توانائی بالحرکت میں پیدا ہوئی۔ (۲۲۹)

اب چونکہ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کوئی قوت تنہا عمل نہیں کر سکتی اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توانائی بالحرکت سے کام کو محسوب کرنے کی ہر صورت میں ایک سے زیادہ اجسام کی توانائی بالحرکت پر غور کرنا ہوگا۔ مثلاً ایک شخص جو زمین پر سے ایک گولے کو پھینکتا ہے نہ صرف گولے کو آگے جنبش دیتا ہے بلکہ اس کے ساتھ ہی پوری زمین کو بھی پیچھے وار دھکا مارتا ہے اور اس لیے دونوں کی توانائی کو شمار کرنا ہوگا ورنہ غلط نتیجے برآمد ہوں گے۔

۱۸۵۔ ایک دوسری مشکل جو پہلی سے قریبی تعلق رکھتی ہے فوراً پیش ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم نے ایک گولے کو رفتار و سے جہاز کے عرشہ کی سمت میں جو خود رفتار و سے حرکت کر رہا ہے پھینکا ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ہمیں گولے کی توانائی کو $\frac{1}{2}$ ک و^2 فرض نہیں کرنا چاہئے لیکن کیا اس کو $\frac{1}{2}$ ک (و + و)^2 فرض کرنا کچھ زیادہ مناسب ہے؟ ہرگز نہیں کیونکہ وہ سمندر جس میں جہاز چل رہا ہے زمین کی گردش کے باعث رفتار وَ (فرض کرو) رکھتا ہے اور اس لئے توانائی کو اُسی سبب کی بنا پر

$$\frac{1}{2} ک (و + و + وَ)^2$$

لینا ہوگا اور علیٰ ہذا ہم اس سلسلہ کو لاانتہا بڑھا سکتے ہیں۔ کوئی ایسا حوالے کا فریم معلوم ہونے سے جو کامل طور پر ساکن ہو توانائی بالحرکت کی اصلی قیمت معلوم کرنا ناممکن نظر آئے گا۔ مزید برآں یہ مشاہدہ طلب ہے کہ توانائی بالحرکت کے جملے جو مختلف حوالے کے فریموں کے حوالے سے حاصل ہوتے ہیں صرف مستقلوں کا ہی فرق نہیں رکھتے۔ مثلاً ان دو جملوں کے درمیان فرق جو ہم نے سمندر کے لحاظ سے توانائی بالحرکت اور زمین کے مرکز کے لحاظ سے توانائی بالحرکت کے لیے معلوم کئے ہیں حسب ذیل ہے:

$$\frac{1}{2} ک (و + و + وَ)^2 - \frac{1}{2} ک (و + و)^2$$

$$= \frac{1}{2} ک وَ^2 + ک وَ (و + و)$$

یہ فرق نہ صرف ک اور وَ پر منحصر ہے بلکہ و اور و پر بھی۔ یہ فرق مستقل نہیں ہے اور اس لیے معدوم نہیں ہوتا جب ہم توانائی بالحرکت کا اضافہ محسوب کرتے ہیں جو قوتوں کے عمل سے پیدا ہوا ہے۔

حسب ذیل مسئلوں سے ایک ایسے طریقے کا اظہار ہوتا ہے جس سے یہ مشکلیں اور ان کی جیسی دوسری رفع ہوسکتی ہیں۔

۱۸۶۔ مسئلہ۔ متحرک ذروں کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت، ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت اور اس واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت کے مجموعے کے مساوی ہوتی ہے جس کی کمیت نظام کی کل کمیت کے مساوی ہو اور جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ نقطہ $ل_۱$، $م_۱$، $ی_۱$ پر ذرہ $ک_۱$ ہے اور علیٰ ہذا۔ فرض کرو کہ محددوں کی پیمائش اس طرح عمل میں آئی ہے کہ مرکز ثقل کو مبدا لیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ رفتاریں $ع_۱$، $و_۱$، $ط_۱$ وغیرہ سے تعبیر ہوتی ہیں اور فرض کرو کہ ان کی

پیمائش ایک فریم کے لحاظ سے کی گئی ہے جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہے اس لئے

$$ع_1 = \frac{فر لا_1}{فر ت} \text{، وغیرہ}$$

فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار کسی حوالے کے فریم کے حوالے سے جو خود متحرک ہے یا ساکن ہے (صرف اس شرط کے ساتھ کہ محوروں کی سمتیں گردش نہیں کرتیں) اجزائے ترکیبی $\bar{ع}$، $\bar{و}$، $\bar{ط}$ رکھتی ہے۔ اب ذرہ $ک_1$ کی رفتار دو رفتاروں کا مرکب ہے، ایک ذرہ کی وہ رفتار ہے جو نظام کے مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے اور جس کے اجزائے ترکیبی $ع_1$، $و_1$، $ط_1$ ہیں اور دوسری مرکز ثقل کی رفتار ہے جس کے اجزائے ترکیبی $\bar{ع}$، $\bar{و}$، $\bar{ط}$ ہیں۔ اس لیے ذرہ $ک_1$ کی کل رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب ذیل ہیں :

$$\bar{ع}+ع_1 \text{، } \bar{و}+و_1 \text{، } \bar{ط}+ط_1$$

پس پہلے ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} ک_1 \left[(\bar{ع}+ع_1)^2 + (\bar{و}+و_1)^2 + (\bar{ط}+ط_1)^2 \right]$$

ہے اور اس لیے نظام کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} \sum ک \left[(\bar{ع}+ع_1)^2 + (\bar{و}+و_1)^2 + (\bar{ط}+ط)^2 \right]$$

ہے یا مربعوں کو پھیلانے سے

$$\frac{1}{2} (\sum ک)(\bar{ع}^2 + \bar{و}^2 + \bar{ط}^2)$$

$$+ \bar{ع} \sum ک ع + \bar{و} \sum ک و + \bar{ط} \sum ک ط$$

$$+ \frac{1}{2} \sum ک (ع^2 + و^2 + ط^2) \qquad (۸۰)$$

چونکہ مرکز ثقل کو مبداء کے طور پر لیا گیا ہے اور ذروں کے محدد

لا، ما، ی، وغیرہ ہیں اس لیے مساوات (۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\cdot = \frac{\sum ک لا}{\sum ک} \text{، وغیرہ} \qquad (۲۳۱)$$

اور اس لئے $\sum$ ک لا = ۰۔ پس $\sum$ ک $\frac{فرلا}{فرت}$ = ۰ یا $\sum$ ک ع = ۰۔ اسی طرح $\sum$ ک و = ۰ اور $\sum$ ک ط = ۰۔ اس طرح جملہ (۸۰) کی دوسری سطر پوری کی پوری معدوم ہوتی ہے اور توانائی بالحرکت کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}(\sum ک)(\bar{ع}^2 + \bar{و}^2 + \bar{ط}^2) + \frac{1}{2}\sum ک (ع^2 + و^2 + ط^2)$$

(۸۱) . . . .

جس سے مسئلہ ثابت ہے۔

۱۸۷ — اس کے بعد فرض کرو کہ مرکز ثقل کے محدد ثابت محوروں کے ایک خیالی جٹ کے حوالے سے کسی آن لَا، مَا، یَ ہیں اور مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق عَ، وَ، طَ ہیں۔

ہم فرض کر چکے ہیں کہ مرکز ثقل کے لحاظ سے ذرہ ک، کے محدد لا، ما، ی، ہیں اور رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط، ہیں۔ اس لیے خیالی ثابت محوروں کے حوالے سے ذرہ ک، کے محدد

$$\bar{لا} + لا_1 \text{، } \bar{ما} + ما_1 \text{، } \bar{ی} + ی_1$$

ہوں گے اور اس کی رفتار کے اجزائے ترکیبی حسب سابق

$$\bar{ع} + ع_1 \text{، } \bar{و} + و_1 \text{، } \bar{ط} + ط_1$$

ہوں گے۔

فرض کرو کہ ذرہ ک، پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ی، ہیں۔ دفعہ ۱۲۱ کی بموجب اس ذرہ پر بیرونی قوتیں جو کام کرتی ہیں وہ اُس منفی کام کے مساوی ہے جو ذرہ اِن قوتوں کے خلاف انجام دیتا ہے۔ پس جب ذرہ اپنے راستے کے کسی چھوٹے عنصر کو طے کرتا ہے تو اس پر جو کام انجام پاتا ہے

وہ حسب دفعہ ۱۱۸

لا۱ فر(لاَ + لا۱) + ما۱ فر(ماَ + ما۱) + ے۱ فر(یَ + ی۱)

کے مساوی ہے ۔ اس لئے کسی چھوٹے ہٹاؤ میں وہ کام جو تمام ذروں پر ہوتا ہے

∑ [لا۱ فر(لاَ + لا۱) + ما۱ فر(ماَ + ما۱) + ے۱ فر(یَ + ی۱)]

ہے اور اس کو حسب ذیل طریقے پر دو حصوں میں جدا کیا جا سکتا ہے :

(۲۳۲) پہلے حصہ کو

∑ لا۱ فر لاَ + ∑ ما۱ فر ماَ + ∑ ے۱ فر یَ (۸۲)

لے سکتے ہیں اور دوسرا حصہ حسب ذیل ہے

∑ لا۱ فر لا۱ + ∑ ما۱ فر ما۱ + ∑ ے۱ فر ی۱ (۸۳)

مساوات (۷۷) سے حاصل ہوتا ہے

∑ لا۱ = ک فرعَ/فرت

جہاں ک نظام کی کل کمیت ہے اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل حرکت کرتا ہے گویا کہ وہ کمیت ک کا ایک ذرہ ہے جس پر ایک قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی ∑ لا۱ ، ∑ ما۱ ، ∑ ے۱ ہیں ۔ یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ جملہ (۸۲) اُس کام کو تعبیر کرتا ہے جو اس خیالی ذرہ کی حرکت میں انجام پاتا ہے اور ہم جانتے ہیں کہ یہ کام اِس کی توانائی بالحرکت کے اضافے کے مساوی ہونا چاہئے ۔

کُل کام جملوں (۸۲) اور (۸۳) کا مجموعہ ہے ۔ یہ کُل کام نظام کی کُل توانائی بالحرکت میں اضافے کے مساوی ہے (بموجب دفعہ ۱۴۰) اور نیز وہ پھر (بموجب دفعہ ۱۸۶) ذروں کے مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی

توانائی بالحرکت اور کمیت ک کے خیالی ذرہ کی توانائی بالحرکت کے اضافے کے مجموعہ کے مساوی ہے جبکہ خیالی ذرہ کو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کرتا ہوا خیال کیا جائے۔

یہ آخری اضافہ جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں جملہ (۸۲) سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے قبل الذکر (۸۳) سے تعبیر ہونا چاہئے۔

اِس طرح مرکز ثقل کے لحاظ سے توانائی بالحرکت میں اضافہ

$$\Sigma$$ (لا$_1$ فرلا$_1$ + ما$_1$ فرما$_1$ + ہ$_1$ فری$_1$)

ہے اور اس لیے اُس کام کے مساوی ہے جو قوتیں کرتی ہیں جبکہ اُس کو اس طرح محسوب کیا گیا ہو گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

۱۸۸ — اِس مسئلہ میں کہ توانائی بالقوہ کا اضافہ انجام پائے ہوئے کام کے مساوی ہے یہ جائز ہے کہ توانائی بالقوہ اور انجام پائے ہوئے کام دونوں کو صرف مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت پر غور کر کے محسوب کیا جائے یعنی نظام پر اِس طریقہ سے بحث کی جا سکتی ہے گویا کہ مرکز ثقل ساکن ہے۔

(۲۲۲) تمثیلاً اُس مسئلہ پر غور کرو جس میں ایک گولی کو متحرک جہاز پر سے فائر کیا گیا ہے۔ گولی کی کمیت جہاز کی کمیت کے مقابلہ میں خفیف ہونے کی وجہ سے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی اور جہاز کے مرکز ثقل کی حرکت ٹھیک وہی ہے جو جہاز کی ہے۔ اِس مرکز ثقل کے لحاظ سے گولی کی رفتار کو صرف وہ رفتار فرض کیا جا سکتا ہے جو بلحاظ عرشہ کے ہے۔ گولی کو نالی سے خارج کرنے میں بارود جو کام کرتی ہے وہ وہی ہے گویا کہ جہاز ساکن ہے اور اِس لیے جہاز کے لحاظ سے گولی کی رفتار وہی ہوگی گویا کہ جہاز ساکن ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک گاڑی رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہے اور گاڑی پر سے ایک شخص ریت کو گاڑی کی پشت کی جانب ک پونڈ فی منٹ کی شرح سے افقاً پھینکتا ہے

اور ریت کی رفتار سڑک کے لحاظ سے و ہے۔ کس شرح سے آدمی کام کر رہا ہے؟

۲۔ ایک توپ گولے کو انتصاباً اوپر ارتفاع ف تک فائر کر سکتی ہے اسکو ایک مسلح گاڑی پر جو رفتار و سے دوڑ رہی ہے رکھا گیا ہے۔ بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو جہاں تک گولہ پہنچ سکتا ہے (ا) گاڑی کے پیچھے (ب) گاڑی کے سامنے۔

۳۔ مثال ماسبق میں راستہ سے قریب ترین وہ نقطہ معلوم کرو جو توپ کی زد سے باہر ہے۔

۴۔ کمیت ک کا ایک خول رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ اندرونی دھماکے سے توانائی کی مقدار ن پیدا ہوتی ہے اور خول کو دو کمیتوں میں توڑ دیتی ہے جن میں سے ایک کمیت دوسری کا ک گنا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ٹکڑے اسی خط میں حرکت کرنا جاری رکھیں جس میں خول حرکت کر رہا تھا تو ان کی رفتاریں حسب ذیل ہوں گی:

$$\text{و} + \sqrt{\text{۲ک ن} / \text{ک ک}} \quad ، \quad \text{و} - \sqrt{\text{۲ ن} / \text{ک ک}}$$

۵۔ دو آدمی جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے دو غیر لچکدار تختوں پر کھڑے رہتے ہیں، ہر تختہ کی کمیت ک ہے اور وہ ایک چکنی چرخی پر سے لٹک رہے ہیں۔ ان میں سے ایک آدمی زمین سے کود کر اپنے مرکز ثقل کو ارتفاع ف تک اونچا لیجا سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر وہ تختہ سے اسی توانائی کے ساتھ اچھلے تو اس کا مرکز ثقل، ارتفاع

$$\text{ف} \left(1 - \frac{\text{ک}}{\text{۲(ک + ک)}} \right)$$

تک بلند ہوگا۔

دھکے والی قوتیں

۱۸۹۔ حرکیاتی مسائل میں بہت سی ایسی صورتیں پیش ہوتی ہیں جنمیں قوت کا عمل وقت کے اسقدر خفیف وقفہ میں شروع اور ختم ہوتا ہے کہ اس عمل کو فوری یا آنی سمجھا جا سکتا ہے۔ ایسی قوتوں کو دھکے والی قوتیں

کہتے ہیں۔ دھکے والی قوتوں کی مثالیں وہ قوتیں لیجا سکتی ہیں جو نا امتداد پذیر تاگے کو جھٹکا دینے میں یا دو سخت اجسام کے درمیان ٹکر ہونے میں بہ عمل آتی ہیں۔

(۴۳۴) دھکے والی قوت کے عمل سے معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے اُس کی مقدار بالعموم محدود ہوتی ہے۔ چونکہ قوت صرف ایک صغیر وقت میں عمل کرتی ہے اس لیے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح لا انتہا بڑی ہونی چاہئے۔ حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے معیار حرکت کی تبدیلی کی شرح اُس قوت کے مساوی ہے جو عمل کرتی ہے اور اس لیے خود قوت کو جب تک کہ وہ عمل کرتی رہتی ہے لا انتہا بڑی ہونا چاہئے۔ اِس لیے دھکے والی قوت کو ایک لا متناہی قوت سمجھا جا سکتا ہے جو صغیر وقت کے لیے عمل کرتی ہے۔

۱۹۰ — دھکے والی قوتوں کے مطالعہ کی ابتداء ہی میں ان قوتوں کی ایک طبیعی خصوصیت کا مشاہدہ کرنا مناسب ہوگا۔ کامل طور پر استوار جسم کی تعریف یہ کی گئی تھی کہ وہ ایسا جسم ہے جو کسی قوتوں کے زیر عمل خواہ وہ کتنی ہی بڑی ہوں اپنی شکل قائم رکھتا ہے۔ اس کے ساتھ ہی یہ بھی ظاہر کر دیا گیا تھا کہ کوئی کامل طور پر استوار جسم کائنات میں موجود نہیں ہے۔ پس بہت بڑی یا لا متناہی قوتوں مثلاً دھکے والی قوتوں کے زیر عمل کسی جسم کو کامل استوار نہیں سمجھا جا سکتا۔

اِس کا نتیجہ یہ ہے کہ جب کوئی دھکے والی قوتیں عمل میں آتی ہیں تو مختلف چھوٹے ذروں کے درمیان جن سے مسلسل اجسام ترکیب یافتہ ہوتے ہیں اضافی حرکت شروع ہوتی ہے۔ یہ اضافی حرکت اُس قسم کی توانائی رکھتی ہے جو حیلی اعمال کے ذریعہ نظام سے واپس وصول نہیں لیجا سکتی۔ فی الحقیقت ان ذروں کی اضافی حرکت صرف جسم کی حرارت کو تعبیر کرتی ہے چونکہ یہ توانائی نظام سے حیلی کام کے طور پر واپس کو وصول نہیں کی جا سکتی اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ دھکے والی قوتوں کو جو یہ توانائی پیدا کرنے کا

کام انجام دیتی ہیں بقائی قوتیں نہیں خیال کیا جا سکتا۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

کسی نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت کا مجموعہ دھکے والی قوتوں کے عمل میں مستقل نہیں رہتا۔

کیونکہ صریحاً دھکوں کے بعد توانائی کا ایک حصہ حرارت کی شکل میں رہ جاتا ہے۔

مثالاً سیسے کی ایک گولی پر غور کرو جو ایک فولادی نشانے پر ضرب لگاتی ہے۔ فرض کرو کہ نشانے پر ضرب پڑنے سے پیشتر گولی ارتفاع ف پر افقی رفتار و سے حرکت کر رہی تھی۔ اس کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ ک و^2 ہے اور اس کی توانائی بالقوہ ک ج ف۔ ضرب کے بعد ہم فرض کر سکتے ہیں کہ گولی افقی رفتار نہیں رکھتی اور نشانے کے انتصاباً نیچے گر جاتی ہے۔ جس آن گولی گرنے لگتی ہے اس وقت توانائی بالحرکت صفر ہے لیکن توانائی بالقوہ ک ج ف ہے جیسا کہ ضرب سے پیشتر تھی۔ اس طرح کل توانائی میں سے توانائی $\frac{1}{2}$ ک و^2 غائب ہو چکی ہے۔ یہ توانائی گولی اور نشانے کے ذروں میں باہمدگر حرکتیں پیدا کرنے میں استعمال ہوئی ہے، اور انکا اظہار حرارت کی شکل میں اور نیز غالباً اجسام کی شکلوں کی مستقل تبدیلیوں میں — نشانے میں گڑھا یا گولی کا چپٹا ہو جانا — ہوتا ہے۔

دھکے کی پیمائش

(۲۳۵)

۱۹۱ — دھکے والی قوت، معیار حرکت میں جو تبدیلی پیدا کرتی ہے اس کو قوت کا دھکہ کہتے ہیں۔ اس طرح اگر دھکہ د، کمیت ک پر عمل کرے اور اس کی رفتار کو (یا دھکے کی سمت میں رفتار کے جزو ترکیبی کو) ع سے و میں بدل دے تو

$$د = ک \, (و - ع) \qquad (۸۴)$$

حرکت کے دوسرے قانون کی رو سے کسی لمحہ پر عمل کرنے والی قوت،

اُس ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی کی شرح کے مساوی ہوتی ہے جس پر وہ عمل کرتی ہے ۔ اگر قوت کی مقدار مستقل ہے تو معیار حرکت کی کُل تبدیلی قوت اور اس وقت کے حاصل ضرب کے مساوی ہے جس میں وہ عمل کرتی رہتی ہے ۔ لیکن اگر قوت کی مقدار متغیر ہے تو معیار حرکت کی تبدیلی، قوت کے تکملہ کے مساوی ہو گی جو بلحاظ وقت کے جس میں قوت عمل کرتی رہتی ہے لیا گیا ہو ۔ پس اگر کُل وقت ت کے کسی لمحہ پر قوت کی قیمت ف ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ دھکہ

= ف ت، اگر قوت کی مقدار مستقل ہو

لیکن = $\int^{ت}$ ف فرت، اگر قوت کی مقدار متغیر ہو ۔

دھکہ کا کام

۱۹۲ ــــ کمیت ک کی رفتار کو ع سے و میں تبدیل کرنے میں دھکہ د سے جو کام انجام پاتا ہے وہ

$$\frac{1}{2}ک و^{2} - \frac{1}{2}ک ع^{2}$$

کے مساوی ہے یعنے کمیت کی توانائی بالحرکت میں جو اضافہ ہوا ہے اُس کے مساوی ہے ۔ اب چونکہ

$$د = ک (و - ع)$$

اس لئے اس کام کے جملے کو شکل

$$\frac{1}{2}ک (و - ع)(و + ع)$$

$$= د \left(\frac{و + ع}{2}\right)$$

میں لکھا جا سکتا ہے ۔

اس لئے دھکہ کا کام، زیر عمل کمیت کی ابتدائی اور آخری

رفتاروں کے اوسط اور دھکے کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے
اگر کمیت دھکے کے خط عمل کی سمت میں حرکت نہیں کر رہی ہے تو (۲۳۶)
مذکورہ بالا نتیجہ صریحاً درست ہوگا اگر ع، و کو دھکے کے خط عمل کی سمت میں
رفتاروں کے اجزائے ترکیبی سمجھا جائے۔

توضیحی امثلہ

۱۔ ۱۴ پونڈ کا ایک گولہ، ۲۰۰ پونڈ کمیت کے ایک نشانہ پر جو زنجیروں کے ذریعہ لٹکا ہوا ہے فائر کیا گیا ہے، نشانہ حرکت کی ابتدا افقاً کرنے میں آزاد ہے۔ اگر گولہ ٹکرانے سے پیشتر ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے حرکت کر رہا تھا اور ٹکرانے کے بعد نشانے میں دھنسا ہوا رہ جائے تو ٹکر کی وجہ سے توانائی کا نقصان معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹکر کے بعد نشانہ اور گولہ باہم و فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے حرکت کی ابتدا کرتے ہیں۔ لہٰذا معیار حرکت کے بقاء کے اصول سے ٹکر سے پیشتر کے معیار حرکت کو ٹکر کے بعد کے معیار حرکت کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۱۴ \times ۱۰۰۰ = ۲۱۴ \times و$$

$$\therefore \quad و = \frac{۱۴۰۰۰}{۲۱۴}$$

ٹکر سے قبل توانائی بالحرکت $\frac{۱}{۲} \times ۱۴ \times (۱۰۰۰)^۲$ تھی اور بعد $\frac{۱}{۲} \times ۲۱۴ \times و^۲$۔ اس لئے توانائی کا نقصان ہے

$$\frac{۱}{۲}(۱۴۰۰۰۰۰۰ - ۲۱۴\, و^۲) = ۶۵۴۰۰۰۰ \text{ فٹ پونڈل، تقریباً}$$

۲۔ ایک بھاری زنجیر جس کا طول ل ہے اور فی اکائی طول کمیت

ک ہے ایک میز کے کنارے پر اس طرح پکڑی گئی ہے کہ اس کا طول ط' کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور باقی حصہ میز کے انتہائی کنارے پر گول لپٹا پڑا ہے۔ اگر زنجیر کو آزاد چھوڑ دیا جائے تو حرکت کی کسی منزل پر رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ حرکت کی کسی منزل پر زنجیر کا طول لا انتصاباً لٹک رہا ہے اور اس طرح طول ل - لا میز پر گول لپٹا ہوا ہے۔ متغیر وقت فرت کے بعد فرض کرو کہ زنجیر کا جو حصہ لا لٹک رہا ہے وہ لا سے لا + فرلا میں بڑھ جاتا ہے۔ اس لیے اگر زنجیر کی نیچے وار رفتار و ہو تو صریحاً

$$و = \frac{فرلا}{فرت}$$

وقفہ فرت کی ابتدا میں زنجیر کا نیچے وار معیار حرکت وہ تھا جو رفتار و سے حرکت کرنے والی کمیت ک لا کا ہے۔ اس لیے وہ ک و لا تھا۔ اس وقفہ کے ختم پر معیار حرکت وہ ہے جو کمیت ک (لا + فرلا) کا ہے جو اس رفتار سے حرکت کرتا ہے جس کو (و + فرو) سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ پس معیار حرکت میں اضافہ

ک (لا + فرلا) (و + فرو) - ک لا و

ہے یا دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرو فرلا کو نظر انداز کر دیا جائے تو یہ اضافہ

ک (لا فرو + و فرلا)

ہے۔

لیکن معیار حرکت کا اضافہ فی اکائی وقت مساوات (۱۷) کی رو سے عمل کرنے والی کل قوت کے مساوی ہوتا ہے اور یہ قوت وقفہ فرت کی ابتدا میں ک ج لا ہے اور ختم پر ک ج (لا + فرلا)' اس لیے دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار فرلا فرت کو نظر انداز کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ وقفہ فرت میں معیار حرکت میں اضافہ ک ج لا فرت ہونا چاہئے۔ (۲۳۷)

اس لیے

ک (لا فرو + و فرلا) = ک ج لا فرت

$= ک ج لا \frac{فرلا}{و}$

یا $و لا \frac{فرو}{فرلا} + و^۲ = ج لا$

اِس مساوات کو تکمل کرنے کے لیے ہم ۲ لا سے ضرب دیتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$و^۲ لا^۲ = \frac{۲}{۳} ج لا^۳ + مستقل$$

مستقل کا تعیّن کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جب' لا = ط تو و = ۰ اور اس لیے مستقل کی قیمت $- \frac{۲}{۳} ج ط^۳$ ہونی چاہئے ۔اس طرح

$$و^۲ = \frac{۲}{۳} ج \frac{لا^۳ - ط^۳}{لا^۲}$$

اِس مساوات سے وہ رفتار معلوم ہوتی ہے جبکہ طول لا میز پر سے انتصاباً لٹک رہا ہو ۔جب زنجیر کا آخری ذرہ کھنچ جاتا ہے تو لا کی قیمت ل ہے اور اِس لیے اِس لمحہ پر

$$و^۲ = \frac{۲}{۳} ج \frac{ل^۳ - ط^۳}{ل^۲}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $و^۲$ کی یہ قیمت وہ قیمت نہیں ہے جو توانائی کی مساوات سے حاصل ہوگی ۔صریحاً یہاں اِس مساوات کو استعمال نہیں کرنا چاہئے کیونکہ دھکے پورے وقت میں عمل کرتے ہیں اور زنجیر کے نئے ذروں کو جھٹکے کے ساتھ حرکت میں لاتے ہیں۔

مثالیں

۱۔ ۱۰ ٹن وزن کا ایک خالی ریلوے ڈبہ ایک چھوٹے ڈبے سے جس پر ۵۰ ٹن کوئلہ لدا ہے ٹکراتا ہے اور دونوں باہم ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے

حرکت کہتے ہیں۔ پہلے ڈبہ کی رفتار ابتداً کیا تھی اور ڈبوں کے درمیان دھکے کی مقدار کیا ہے۔

۲۔ $\frac{1}{2}$ اونس وزن کا ایک پتھر ۵ فٹ ارتفاع سے نرم زمین پر چھوڑا گیا ہے۔ پتھر کے ساکن ہونے سے پیشتر عمل کرنے والے دھکے کی مقدار معلوم کرو۔

۳۔ ایک ٹن کی کمیت، ۱۶ فٹ کے ارتفاع سے ایک انتصابی میخ پر گرتی ہے اور اس کو زمین میں نصف انچ زیادہ دھنسا دیتی ہے۔ یہ تسلیم کر کے کہ میخ پر کمیت کی قوت عاملہ اثنائے عمل میں مستقل رہتی ہے اس کی مقدار اور عمل کا وقفہ معلوم کرو۔

۴۔ ۱۰ گرام کمیت کا ایک جسم ۸ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ دفعتاً اس پر ایک ضرب پڑتی ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار دگنی ہو جاتی ہے اور اس کی حرکت کی سمت بقدر نصف زاویہ قائمہ کے تبدیل ہو جاتی ہے۔ ضرب کی سمت معلوم کرو اور وہ رفتار معلوم کرو جس سے جسم حرکت کرتا اگر وہ ضرب سے پیشتر ساکن ہوتا۔

(۲۳۸) ۵۔ ایٹوڈ کی مشین کی ڈوری سے اس کے سروں پر کمیتیں $ک_۱$، $ک_۲$ بندھی ہیں جن میں $ک_۱$ زیادہ بھاری ہے۔ ڈوری کے ایک ثانیہ تک حرکت میں رہنے کے بعد کمیت $ک_۱$ فرش سے ٹکراتی ہے۔ معلوم کرو (ا) کمیت $ک_۲$ کتنی دیر تک چڑھنا جاری رکھے گی، (ب) کمیت $ک_۱$ پھر کس رفتار سے حرکت میں آئے گی جبکہ ڈوری تن جائے۔

۶۔ کسی خاص دن ایک انچ بارش ۱ گھنٹوں میں ہوئی جبکہ قطرے ۲۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گرے۔ ایک ڈیرے کی چھت پر جو دبیز کپڑے سے بنا ہے اوسط دباؤ فی مربع فٹ معلوم کرو جو بارش کے قطروں کے تصادم سے پیدا ہوا تھا، یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ چھت افقی ہے۔ (پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن $\frac{1}{2}$ ۶۲ پونڈ ہے)۔

۷۔ زمین جو اپنے مدار میں رفتار v سے حرکت کر رہی ہے چھوٹے شہابیوں کے ایک گروہ سے متصادم ہوتی ہے جس کی کثافت فی مکعب میل

ایک کیلوگرام ہے اور جو رفتار و سے ٹھیک اُس سمت کے خلاف حرکت کر رہے ہیں جو زمین کی حرکت کی ہے ۔ شہابوں کے تصادم کی وجہ سے زمین کی رفتار میں تخفیف کی شرح معلوم کرو اور نیز زمین کی سطح پر کے مختلف نقطوں پر بار پیما کے ارتفاع میں اضافہ معلوم کرو ' یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ تمام شہاب زمین کی سطح پر پہنچنے سے قبل گرد میں تبدیل ہو جاتے ہیں ۔ (زمین کی کمیت ۶ × ۱۰^۲۷ گرام ہے اور اس کا قطر ۷۹۲۷ میل ہے)

۸ ۔ ایک ایکساں زنجیر ایک افقی مستوی پر ڈھیر کی شکل میں گول لپٹی پڑی ہے اور ایک شخص اس کا ایک سرا ہاتھ میں لیکر اس کو رفتار و سے یکساں طور پر اوپر اٹھاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ جب اُس کا ہاتھ مستوی سے ارتفاع لا پر ہوتا ہے تو اس کے ہاتھ پر دباؤ زنجیر کے لا + $\frac{و^2}{ج}$ طول کے وزن کے مساوی ہے ۔

لچک

۱۹۳ ۔ یہ عام تجربہ کی بات ہے کہ اگر ہم فولاد کے ایک گولے کو سخت فرش پر گرائیں تو وہ کچھ ارتفاع تک بازگشت کرے گا لیکن اگر لکڑی کے گولے کو گرائیں تو وہ اس سے بہت کم ارتفاع تک بازگشت کرے گا اور روئی ، کاغذ یا چکنی مٹی کا گولہ تو بازگشت ہی نہ کرے گا ۔

جب دو جسموں کی سطحوں کے درمیان تماس ایسی نوعیت کا ہو کہ تصادم کے بعد وہ بالکل بازگشت ہی نہیں کرتے تو ہم کہتے ہیں کہ تماس کامل طور پر بے لچک ہے لیکن اگر جسم بازگشت کریں تو ہم کہتے ہیں کہ تماس لچکدار ہے ۔ صریحاً لچک کے مختلف درجے ہوتے ہیں ۔

بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ

۱۹۴ ۔ تصادم کی سب سے زیادہ معروف مثال جس میں لچک بہت بڑی ہوتی ہے غالباً بلیرڈ کے دو گولوں کے تصادم سے بہم پہنچتی ہے ۔ ہم

اِس تصادم پر بہترین طریقے سے بحث کر سکیں گے اگر دوسرے گولے کی حرکت کا حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیا جائے جو پہلے گولے کے ساتھ حرکت کرے۔ تصادم سے قبل دوسرے گولے کا مرکز پہلے گولے کے مرکز کے قریب آرہا ہے اور تصادم کے بعد اُس سے پَرے ہٹ رہا ہے۔ اِس لیے اثنائے تصادم میں کسی لمحہ پر اِس کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے پَرے ہٹنے کی حرکت میں تبدیل ہو جانی چاہئے، اِس لمحہ پر گولوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ اقل تھا۔ (۲۳۹)

فرض کرو کہ تجربہ کرنے سے بیشتر ہم نے گولوں کے اُن دو رخوں پر سفیدی لگا دی ہے جن پر تصادم واقع ہوتا ہے۔ تصادم کے بعد گولوں کا امتحان کرنے سے معلوم ہوگا کہ سفیدی میں خلل پڑ گیا ہے نہ صرف ایک واحد نقطہ پر بلکہ ایک پورے دائرہ پر جو کافی بڑا ہے۔ اگر گولے اچھی رفتار سے حرکت کر رہے ہوں تو اِس دائرہ کا قطر نصف انچ بھی ہو سکتا ہے۔ اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اُس لمحہ پر جس پر گولوں کے مرکز ایک دوسرے سے قریب ترین تھے اُن کا درمیانی فاصلہ اُس فاصلہ سے کم تھا جو ان کے درمیان ہوتا اگر گولے سکون کی حالت میں ایک دوسرے کو مس کرتے ہوے رکھے جاتے۔ یعنے اثنائے تصادم میں گولے پچک گئے تھے۔

وہ لمحہ جس پر مرکز قریب ترین ہوتے ہیں بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے۔

بالعموم جب کوئی دو سطحیں تصادم میں ہوتی ہیں تو وہ لمحہ جس پر مشترک عماد کی سمت میں اضافی رفتار معدوم ہوتی ہے بڑے سے بڑے پچکاؤ کا لمحہ کہلاتا ہے۔ صریحاً یہ وہ لمحہ ہے جس پر اِن دو سطحوں کی حرکت قریب آنے کی حرکت سے پرے ہٹنے کی حرکت میں تبدیل ہوتی ہے۔

۱۶۵۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر پہنچنے سے پہلے بالعموم دونوں اجسام کی رفتاریں تبدیل ہو چکتی ہیں اور اِس لیے اِس تبدیلی کے پیدا کرنے میں

قوتیں بہ عمل ہونی چاہئیں۔ اِن قوتوں کے عمل کا پورا وقت (یعنے اُس لمحہ سے جس پر اجسام ابتداً مس کرتے ہیں اُس لمحہ تک جس پر بڑے سے بڑا پچکاؤ واقع ہوتا ہے) اس قدر کم ہوتا ہے کہ اِن کو دھکے والی قوتیں سمجھا جا سکتا ہے۔ اِن دو جسموں پر عمل کرنے والے دھکے، عمل اور رتعامل ہونے کی وجہ سے مساوی اور مخالف ہونے چاہئیں۔ اگر سطحیں چکنی ہیں تو اِن دھکوں کی سمت مشترک عماد کی سمت ہونی چاہئے۔ اگر سطحیں کھردری ہیں تو ہم سمت کی تخصیص نہیں کر سکتے جب تک کہ ایک دوسرے پر سطحوں کی پھسلن کی سمت معلوم نہ ہو۔ ہر صورت میں فرض کرو کہ مشترک عماد کی سمت میں دھکے کا جزوِ ترکیبی د سے تعبیر ہوتا ہے۔ مقدار د کو پچکاؤ کا دھکہ کہتے ہیں۔ صریحاً یہ مقدار اُن قوتوں کو تعبیر کرتی ہے جن سے دھکہ ترکیب پاتا ہے اور جو اضافی عمادی رفتار کو صفر میں تحویل کرتی ہیں۔

(۲۴۰) بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ کے بعد قوتوں کا ایک دوسرا نظام بہ عمل آنا چاہئے تاکہ وہ رفتاریں پیدا ہوں جن سے اجسام ایک دوسرے سے جدا ہوتے ہیں۔ فی الحقیقت بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر اجسام کے پچکے ہوئے حصے کسی ہوئی کمانی کے مانند عمل کرتے ہیں اور ہم فرض کر سکتے ہیں کہ افتراق کی رفتاریں اِس خیالی کمانی کے عمل سے پیدا ہوئی ہیں۔ یہ قوتیں بھی جو جسموں کو جدا کرتی ہیں دھکے والی قوتیں سمجھی جا سکتی ہیں اور مشترک عماد کی سمت میں اِس دھکے کے جزوِ ترکیبی کو دَ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ دھکے دَ کو عود کا دھکہ کہتے ہیں۔

۱۹۶ — جب تصادم سے قبل اجسام کی حرکت معلوم ہوتی ہے تو ہم معیار حرکت کے بقا کا اصول استعمال کر کے بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر رفتاریں معلوم کر سکتے ہیں۔ اس لئے پچکاؤ کے دھکہ د کو محسوب کرنا ممکن ہے۔

برخلاف اس کے دھکہ دَ کی مقدار متصادم اجسام کے تماس کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے، اگر اجسام کامل طور پر بے لچک ہیں تو تصادم کے بعد افتراق

نہیں ہوگا اور اس لیے دَ = ۰ ۔ تجربہ کی بنا پر بالعموم یہ معلوم ہوا ہے کہ دھکہ دَ اور دھکہ د میں حسب ذیل سادہ ربط ہے :

دَ = چ د

جہاں چ ایک مقدار ہے جو صرف دو متصادم سطحوں کے تماس کی نوعیت پر منحصر ہے اور دھکہ د کی مقدار پر منحصر نہیں ہے ۔ مقدار چ کو اِن دو اجسام کی لچک کی قدر کہتے ہیں ۔

یہاں اِس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا ضروری ہے کہ لچک کی یہ قدر وہ مقدار ہے جو اُن قدروں یا لچک کے مستقلات سے بالکل مختلف ہے جو لچکدار اجسام کے نظریہ میں واقع ہوتے ہیں ۔ واقعہ یہ ہے کہ اصطلاح لچک کی قدر جن معنوں میں مقدار چ کو تعبیر کرنے کے لیے یہاں مستعمل ہوئی ہے وہ نامناسب ہے کیونکہ اس سے جس چیز کی پیمائش ہوتی ہے اِس کو لچک کی بجائے **بازگشتگی** کہنا زیادہ مناسب ہے اور بلاشبہ لچک کی قدر کی بجائے بازگشتگی کی قدر کہنا زیادہ ٹھیک ہے ۔ لیکن بالعموم اصطلاح لچک کی قدر استعمال کی جاتی ہے ۔

۱۹۷ ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ چ کی قیمت کامل طور پر بے لچک اجسام کے لیے صفر ہے ۔ لوہا سیسے سے ٹکرائے تو چ کی قیمت تقریبًا ۱۴ء ہے، لوہا لوہے سے ٹکرائے تو اس کی قیمت ۶۶ء ہے اور سیسا سیسے سے ٹکرائے تو ۲۰ء ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ بازگشتگی دو اجسام کے درمیانی تماس کی نوعیت پر منحصر ہوتی ہے اور اِس لحاظ سے رگڑ کی قدر کے مشابہ ہے ۔ بازگشتگی کچھ ایک جسم سے اور کچھ دوسرے جسم سے پیدا نہیں ہوتی کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو چ کی قیمت جبکہ لوہا سیسے سے ٹکرائے اُن قیمتوں کے درمیان ہوتی جو لوہا لوہے سے اور سیسا سیسے سے ٹکرانے میں حاصل ہوتی ہیں ۔

اُن اجسام کی مثالیں جن کے لیے لچک کی قدر بڑی ہے حسب ذیل معلوم ہوئی ہیں، ہاتھی دانت کے دو گولے جب متصادم ہوتے ہیں تو چ کی قیمت تقریبًا ۸۱ء ہے اور شیشا شیشے سے متصادم ہوتا ہے تو چ کی قیمت ۹۴ء ہے ۔ سب سے زیادہ کامل لچک جو تصور کی جا سکتی ہے

اُن دو اجسام کی ہے جن کے لیے چ = ۱، اِس صورت میں عود کا دھکہ پچکاؤ کے دھکے کے مساوی ہوگا۔ ایسے اجسام کو کامل طور پر لچکدار کہا جاتا ہے۔ کامل طور پر لچکدار اجسام کی یہ خصوصیت ہے کہ تصادم سے کسی توانائی کا نقصان نہیں ہوتا۔ یہ ظاہر ہے کہ چ کی قیمت اکائی سے تجاوز نہیں کر سکتی کیونکہ اگر اِس کی قیمت اکائی سے متجاوز ہو تو عود کے دھکے سے جو توانائی بالحرکت ظہور پذیر ہوگی وہ اُس توانائی سے زیادہ ہوگی جو پچکاؤ کا دھکہ جذب کرتا ہے اور اِس لیے مجموعی توانائی بڑھ جائے گی جو ناممکن ہے۔
اب ہم اِن اصولوں کو تصادم کی چند اہم صورتوں پر استعمال کریں گے۔

ذرہ جو ایک ثابت سطح سے ٹکرائے

راست تصادم

۱۹۸ — اول فرض کرو کہ تصادم راست ہے یعنے ٹکر کے لمحہ پر ذرہ سطح کے اُس نقطہ کے عماد پر حرکت کر رہا ہے جس پر وہ آکر ٹکراتا ہے۔ فرض کرو کہ اِس کی کمیت ک ہے اور تصادم سے قبل اِس کی رفتار و ہے۔ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے لمحہ پر ذرہ مستوی کے لحاظ سے ساکن ہوگا اور اِس لیے اِس کا معیار حرکت پچکاؤ کے دھکے کی وجہ سے ک و سے صفر میں تحویل ہوگا۔ اِس لیے

$$د = ک\ و$$

اگر لچک کی قدر چ ہے تو

$$دَ = چ\ د = چ\ ک\ و$$

اِس طرح مقدار چ ک و کا ایک عمادی دھکہ ظہور پذیر ہوگا اور (۲۴۲) اِس کی وجہ سے ذرہ میں رفتار چ و پیدا ہوگی۔ کوئی مماسی دھکہ موجود نہیں ہے کیونکہ سطحیں ایک دوسرے پر نہیں پھسلتیں۔ پس رفتار بازگشت سطح کے

عماد کی سمت میں چ و ہے۔

مائل تصادم۔ چکنا تماس

۱۹۹۔ اگر تصادم مائل ہے تو فرض کرو کہ تصادم سے قبل مماس مستوی اور عماد کی سمتوں میں رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و ہیں۔ حسب سابق

د = ک و ، دَ = چ ک و

اِس لیے تصادم کے بعد عماد کی سمت میں رفتار (فرض کرو وَ)

وَ = چ و

ہے۔

اگر تماس کو چکنا فرض کیا جائے تو مماس مستوی میں کوئی قوت نہیں ہو سکتی اور اس لیے مماس مستوی میں معیار حرکت غیر متغیر رہتا ہے اِس طرح مماس مستوی میں رفتار ع کے مساوی رہتی ہے اور اس لیے تصادم کے بعد رفتار وہ ہوگی جس کے اجزائے ترکیبی ع، چ و ہیں۔ فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو رفتار تصادم سے پیشتر عماد کے ساتھ بناتی ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد متناظر زاویہ فہ ہے۔ تب

مس طہ = ع / و

مس فہ = ع / چ و

شکل (۱۲۶)

اسلیے مس طہ = چ مس فہ

اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہیں تو چ = ۱ اور اس لیے طہ = فہ یعنی ذرہ ایسے زاویہ پر بازگشت کرتا ہے جو زاویہ وقوع کے مساوی ہے۔ اِس کا انعکاس اُسی قانون کے تحت ہوتا ہے جو نور کی کرن کا ہے۔

اگر اجسام کامل لچکدار نہیں ہیں تو طہ < فہ اور اس لیے بازگشت کا

راستہ عماد سے زیادہ ہٹا ہوا ہوگا۔

اگر اجسام کامل طور پر بے لچک ہیں تو چ = ۰ اور اس لیے فہ = $\frac{\pi}{2}$
ذرہ مستوی پر صرف پھسلیگا اور صریحاً ایسا ہی ہونا چاہیئے کیونکہ دَ = ۰

تصادم سے قبل توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2} ک (ع^2 + و^2) \quad (۲۴۳)$$

ہے اور تصادم کے بعد

$$\frac{1}{2} ک (ع^2 + وَ^2)$$

ہے۔ اِس لیے توانائی بالحرکت میں نقصان کی مقدار

$$\frac{1}{2} ک (و^2 - وَ^2)$$

ہے یعنے

$$\frac{1}{2} ک و^2 (۱ - چ^2)$$

یہ نقصان معدوم ہوگا اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہوں یعنے چ = ۱۔ باقی تمام صورتوں میں توانائی کا نقصان ضروری ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ چ اکائی سے بڑا نہیں ہو سکتا ورنہ اجسام کو ایک دوسرے سے ٹکرا کے توانائی میں اضافہ کرنا ممکن ہوتا۔

مائل تصادم۔ کھردرا تماس

۲۰۰۔ چکنے تماس کی صورت کی طرح ہمیں ربط دَ = چ د حاصل ہوتا ہے جو عماد کی سمت میں رفتار کے اجزائے ترکیبی کو مربوط کرتا ہے۔ لیکن تعامل کلاً عماد کی سمت میں عمل نہیں کرتا اور اس لیے اب یہ کہنا درست نہیں ہے کہ رفتار کا مماسی جزو ترکیبی غیر متغیر رہتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم اُس صورت پر غور کرتے ہیں جس میں ذرہ کی سطح ثابت سطح پر اُس پورے وقفہ میں جس میں یہ دو سطحیں ایک دوسرے کو مس کرتی ہیں ایک ہی سمت میں پھسلتی ہے۔ تب تصادم کے ہر لمحہ پر ایک مماسی قوت ہوگی جو عمادی قوت کے مہ گنا کے مساوی ہوگی اور اِس لیے کُل مماسی دھکہ عمادی دھکے کے مہ گنا کے مساوی ہونا چاہیئے اور اِسلیے مہ (د + دَ) کے مساوی۔

اِس لیے اگر تصادم کے بعد مماسی رفتار ع َ ہے تو

$$ک (ع - عَ) = مہ (دَ + د)$$

$$= مہ (۱ + چ) د$$

$$= مہ (۱ + چ) ک و$$

اس طرح $$عَ = ع - (۱ + چ) مہ و$$

(۲۴۴) حسب سابق اگر ہم فرض کریں کہ ذرہ کا راستہ تصادم سے قبل اور اِس کے بعد عماد کے ساتھ زاویے طہ، فہ بناتا ہے (دیکھو شکل ۱۲۶) تو

$$مس\ طہ = \frac{ع}{و}$$

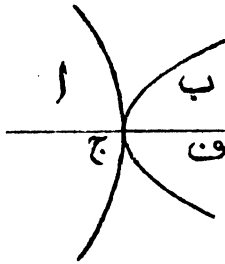
$$مس\ فہ = \frac{عَ}{وَ} = \frac{ع - (۱ + چ) مہ و}{چ و}$$

اِس لیے $$چ\ مس\ فہ = مس\ طہ - (۱ + چ) مہ$$

(۱ + چ) مہ کی قیمت ہمیشہ مثبت ہوگی اور اِس لیے فہ ہمیشہ اُس قیمت سے کم ہوگا جو مُستوی کے چکنے ہونے کی صورت میں حاصل ہوتی ہے، دوسرے الفاظ میں مُستوی کا کھُردراپن ذرہ کو عماد سے قریب تر بازگشت کرانے کا موجب ہوتا ہے۔

لیکن یہ مساوات صرف بعض حدود کے اندر درست رہتی ہے کیونکہ ہم نے یہ مان لیا ہے کہ تصادم کے پورے وقفہ میں پھسلن واقع ہوتی ہے۔ یہ ہوسکتا ہے کہ حرکت کی کسی خاص منزل پر پھسلن موقوف ہو اور ذرہ لُڑھکنا شروع کرے اور اگر ایسا ہو تو محعلہ بالا مساوات جائز نہیں ہوگی۔

دو متحرک اجسام کا تصادم

۲۰۱ — فرض کرو کہ کمیتوں ک، کَ کے دو جسم ا، ب، نقطہ ج پر متصادم ہوتے ہیں اور ج پر مشترک عماد ج ف ہے۔ فرض کرو کہ تصادم کے

لمحہ پر اِن اجسام کے مراکز ثقل دونوں
خط ج ف پر واقع ہیں اور فرض
کرو کہ کمیتوں ا، ب کے مرکز ثقل
کی رفتاروں کے اجزائے ترکیبی عماد
ج ف کی سمت میں
ع، عَ تصادم سے قبل
و، وَ بڑے سے بڑے پچکاؤ کے
لمحہ پر

شکل (۱۲۷)

اور و، وَ تصادم کے بعد
ہیں۔ اب اگر پچکاؤ کے دھکے کو د سے تعبیر کیا جائے اور عود کے دھکے کو دَ سے تو

$$د = ک\,(ع - و) = -کَ\,(عَ - و) \qquad (۸۵)$$

$$دَ = ک\,(و - و) = -کَ\,(و - وَ) \qquad (۸۶)$$

پہلی مساوات سے

$$ع = و + \frac{د}{ک} ،$$

$$عَ = و - \frac{د}{کَ}$$

اِس لیے

$$ع - عَ = د\left(\frac{1}{ک} + \frac{1}{کَ}\right)$$

یہ مساوات تصادم سے پیشتر جو اضافی رفتار ہے اُس کو د سے مربوط کرتی ہے۔

اسی طرح مساواتوں (۸۶) سے

$$و - وَ = -دَ\left(\frac{1}{ک} + \frac{1}{کَ}\right)$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ تجربی ربط دَ = ج د ، ربط

و - وَ = - ج (ع - عَ)

کے ٹھیک مماثل ہے یعنے الفاظ میں : تصادم کے بعد مراکز ثقل کی اضافی رفتار کا عمادی جزو ترکیبی، تصادم سے قبل اضافی رفتار کا ج گنا اور اسکی مخالف سمت میں ہوتا ہے۔

اِس قانون کو نیوٹن کا تجربی قانون کہتے ہیں، اِس سے مادہ کی وہی خاصیت بیان ہوتی ہے جو ربط دَ = ج د سے ظاہر ہے۔

ایک اور رشتہ جو تصادم سے قبل اور اِس کے بعد کی رفتاروں کو مربوط کرتا ہے معیار حرکت کے بقا کے اصول سے حاصل ہوتا ہے چنانچہ

ک و + کَ وَ = ک ع + کَ عَ

اِس کو مساوات (۸۷) کے ساتھ ملانے سے ہم تصادم کے بعد کی رفتاروں و، وَ کو تصادم سے قبل کی رفتاروں ع، عَ کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں۔

اِن مساواتوں کو حل کرنے سے معلوم ہوگا کہ

$$و = \frac{ک\,ع + کَ\,عَ - ج\,کَ\,(ع - عَ)}{ک + کَ} \qquad (۸۸)$$

$$وَ = \frac{ک\,ع + کَ\,عَ + ج\,ک\,(ع - عَ)}{ک + کَ} \qquad (۸۹)$$

اِن سے عمادی رفتاریں حاصل ہوں گی۔

اگر اجسام کھُردرے ہیں تو ہم مماسی رفتاروں کو اسی طریقے سے معلوم کرتے ہیں جو دفعہ ۲۰۰ میں بیان کیا جا چکا ہے، لیکن اگر اجسام چکنے ہیں تو ج ف کی عمودار سمتوں میں رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں۔

(۲۱۶) اگر اِن دو اجسام کا مرکز ثقل ساکن ہو یا اگر ہم تمام رفتاروں کو مرکز ثقل کے لحاظ سے پیمائش کریں جس کا مطلب بھی وہی ہے تو

$$\text{ک ع} + \text{کَ عَ} = \text{۰}$$

اس لیے $$\text{و} = -\text{چ}\,\frac{\text{کَ (ع} - \text{عَ)}}{\text{ک} + \text{کَ}}$$

$$\text{وَ} = \text{چ}\,\frac{\text{ک (ع} - \text{عَ)}}{\text{ک} + \text{کَ}}$$

ربط $\text{ک ع} = -\text{کَ عَ}$ کو استعمال کرنے سے یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$\text{و} = -\text{چ ع}\,،$$
$$\text{وَ} = -\text{چ عَ}$$

اور اس لیے اجسام ایک دوسرے سے بازگشت کرتے ہیں گویا کہ وہ لچک چ کے ایک ثابت مستوی پر متصادم ہوئے تھے۔

توانائی بالحرکت، تصادم سے قبل یا بعد، دو توانائیوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگی (۱) اُس واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہے (۲) نظام کی توانائی بالحرکت بلحاظ مرکز ثقل کے۔ اول الذکر توانائی تصادم سے غیر متغیر رہتی ہے اور اس لیے تصادم کی وجہ سے کل توانائی بالحرکت میں جو نقصان واقع ہوتا ہے وہ اُس توانائی کے نقصان کے مساوی ہے جو مرکز ثقل کے لحاظ سے ہے۔

اگر اجسام چکنے ہیں تو توانائی بالحرکت کا یہ نقصان

$$= \tfrac{1}{2}\left(\text{ک ع}^2 + \text{کَ عَ}^2 - \text{ک و}^2 - \text{کَ وَ}^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\text{ک ع}^2 + \text{کَ عَ}^2\right)\left(\text{۱} - \text{چ}^2\right)$$

اِس طرح توانائی بالحرکت کا نقصان، مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی بالحرکت کے $(\text{۱} - \text{چ}^2)$ گنے کے مساوی ہے۔ اگر اجسام کامل طور پر لچکدار ہیں تو $\text{چ} = \text{۱}$ اور اس لیے توانائی میں کوئی نقصان واقع نہیں ہوتا۔ لیکن اگر $\text{چ} = \text{۰}$ تو مرکز ثقل کے لحاظ سے ابتدائی توانائی پوری کی پوری نقصان میں آجاتی ہے۔

دو چکنے کروں کا تصادم

۲۰۲ — فرض کرو کہ تصادم کے بعد دو چکنے کروں کی حرکت معلوم کرنے میں ہم اوپر کے اصولوں کو استعمال کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ تصادم کے لمحہ پر کروں کے مرکز ثقل ا، ب ہیں اور اِس لیے خط اب، تصادم کے نقطہ ج پر سطحوں کا مشترک عماد ہے۔

(۲۴۷) حسب سابق فرض کرو کہ تصادم سے قبل اب پر رفتاریں ع، عَ ہیں اور اِن دونوں کو سمت اب میں پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ تصادم کے بعد اسی سمت میں رفتاریں و، وَ ہیں۔ تب معیار حرکت کے بقا کی رُو سے اب پر

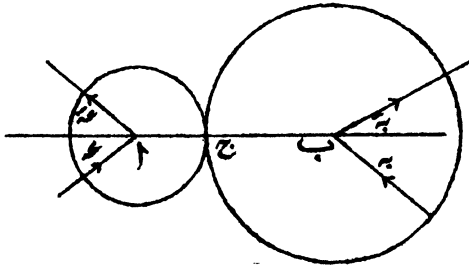
$$ک ع + کَ عَ = ک و + کَ وَ$$

اور نیوٹن کے قانون سے $و - وَ = ج (ع - عَ)$

اِن سے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) حسب سابق حاصل ہوتی ہیں۔

اگر تصادم سے قبل اور بعد ا کی رفتاریں اب کے ساتھ زاوئے عہ، عہَ بناتی ہیں (حسب شکل) تو تصادم سے قبل اور بعد مماسی رفتاریں

$$ع مس عہ، \quad و مس عہَ$$

ہیں۔ لیکن چونکہ مماسی رفتاریں غیر متغیر رہتی ہیں اس لیے

شکل (۱۲۸)

و مس عہَ = ـ ع مس عہ

اِسی طرح ب کی حرکت سے

و مس بہَ = ـ عَ مس بہ

اس لیے مساواتیں (۸۸) اور (۸۹) ہو جاتی ہیں

$$مم\ عہَ = - \frac{ک ع + کَ عَ - چ کَ (ع - عَ)}{(ک + کَ) ع} مم\ عہ،$$

$$مم\ بہَ = - \frac{ک ع + کَ عَ + چ ک (ع - عَ)}{(ک + کَ) عَ} مم\ بہ$$

اور اِن سے عہَ، بہَ ابتدائی حرکت کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں۔

(۲۴۸) اگر کُرے مساوی کمیت کے ہوں اور دوسرا کرہ ابتدا ً ساکن ہو جیسے کہ بلیرڈ کے کھیل میں ہوتا ہے تو ک = کَ، عَ = ۰۔ اور اِس لیے

$$مم\ عہَ = - \frac{۱}{۲} (۱ - چ) مم\ عہ،\ بہَ = ۰.$$

اِس طرح ب، مرکزوں کے خط پر حرکت کی ابتداء کرتا ہے اور صریحًا ایسا ہی ہونا چاہئے کیونکہ وہ قوتیں جو اِس کو حرکت میں لاتی ہیں اِس خط پر عمل کرتی ہیں۔

چونکہ چ ہمیشہ اکائی سے کم ہوتا ہے اور عہ ضرور حادہ ہے اس لیے مم عہَ منفی ہونا چاہئے اور اِس لیے عہَ منفرجہ ہوگا۔ اگر چ = ۱ تو عہَ = ۹۰°۔ چنانچہ اگر کرُے کامل چکنے اور کامل لچکدار ہوں تو تصادم کے بعد کرُہ ا مرکزوں کے خط کے علی القوائم حرکت کرے گا، اِس کی حرکت وہی ہوگی جو ہوتی اگر وہ کامل چکنے اور بے لچک مستوی سے ٹکراتا۔

توضیحی مثال

ایک کھُردرُے میز پر چند مشابہ سکّوں کو مساوی فاصلوں پر ایک خطِ مستقیم میں رکھا گیا ہے۔ پہلے سکہ کو اِس خط پر

اِس طرح متحرک کیا جاتا ہے کہ وہ دوسرے سکّہ سے راست ٹکرائے۔ حاصل حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ دو سکوں کے درمیان تصادم کے لیے لچک کی قدر چ ہے اور سکوں اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ فرض کرو کہ ہر سکہ کی کمیت ک ہے اور دو متصل سکوں کے قریب ترین نقطوں کے درمیان فاصلہ ف ہے۔

ایک سکہ اور میز کے درمیان عمادی تعامل ک ج ہے اور اس لیے سکہ کی حرکت میں مزاحم رگڑ کی قوت مہ ک ج ہے اور پیدا شدہ ابطاء مہ ج ہے۔ پس اگر ایک سکہ اپنے ابتدائی محل سے رفتار و سے چلے تو اِس کی رفتار دوسرے سکّہ تک پہنچنے میں ع ہو جائے گی جہاں

$$و^2 - ع^2 = ۲ \, مہ \, ج \, ف \qquad (ا)$$

اب ہمارے پاس مساوی کمیت کے دو سکّے ہیں جو رفتاروں ع، ۰ سے ٹکراتے ہیں تصادم کے بعد اِن کی رفتاریں و، وَ حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں:

$$و - وَ = - چ \, ع \quad (\text{قانون نیوٹن})$$

$$و + وَ = ع \quad (\text{معیار حرکت کا بقا})$$

اِس لیے

$$و = \frac{1}{2} ع (۱ - چ)$$

$$وَ = \frac{1}{2} ع (۱ + چ)$$

تصادم کے بعد وہ سکہ جو ابتداً حرکت میں تھا رفتار و حاصل کرتا ہے اور رگڑ کی قوت سے اِس میں ابطاء مہ ج پیدا ہوتا ہے۔ اِس لیے وہ ساکن ہو جائے گا اگر وہ اِس اثناء میں فاصلہ س طے کرنے کے بعد پھر نہ ٹکرائے جہاں س، مساوات

$$و^2 = ۲ \, مہ \, ج \, س$$

یا

$$س = \frac{و^2}{۲ \, مہ \, ج} = \frac{ع^2 (۱ - چ)^2}{۸ \, مہ \, ج} \qquad (ب)$$

(۳۴۹)

سے حاصل ہوگا۔ وہ سکہ جو تصادم کی وجہ سے حرکت میں آیا ہے رفتار

$$وَ = \frac{۱}{۲} ع (۱ + چ) \qquad (ج)$$

سے حرکت کی ابتدا کرتا ہے۔ اس سے پہلے کا سکہ رفتار و سے حرکت کی ابتدا کیا تھا یہ رفتار مساوات (ا) سے حاصل ہوتی ہے۔ اب مساواتوں (ا) اور (ج) سے ع کو ساقط کیا جائے تو ابتداءً حرکت میں آنے کی متواتر رفتاروں کے درمیان رشتہ

$$وَ^۲ = ۲ مہ ج ف + \frac{۴ وَ^۲}{(۱ + چ)^۲} \qquad (د)$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ ربط مستقل سروں والی فرق کی مساوات ہے۔

اگر چ = ۱ تو ہم مساوات (ب) سے دیکھتے ہیں کہ س = ۰ اور اس لیے ہر سکہ اپنے سامنے کے سکے سے ٹکرانے کے بعد مطلقاً ساکن ہو جاتا ہے، وہ اپنا پورا معیار حرکت اُس سکہ میں منتقل کر دیتا ہے۔ نیز مساوات (ا) سے

$$وَ^۲ - وَ^۲ = ۲ مہ ج ف$$

جب ن سکوں کے درمیان معیار حرکت منتقل ہو چکتا ہے تو رفتار کے مربع کی قیمت بقدر ۲ ن مہ ج ف کے گھٹ جاتی ہے۔ اس طرح کسی نقطہ پر متحرک سکہ کی رفتار وہ رفتار ہوتی ہے جو ایسے سکہ کی ہوتی جو رفتار و سے حرکت کی ابتدا کرتا اور وہ فاصلہ طے کرتا جو اُن سکوں کے درمیانی تمام وقفوں کے مجموعے کے مساوی ہے جن پر سے حرکت منتقل ہوئی ہے۔

اگر ف = ۰ یعنے اگر سکے ابتداءً ایک دوسرے کو مس کر رہے ہوں تو

$$و = \frac{۲ وَ}{۱ + چ}$$

پس اگر ن سکے ہیں تو ن واں سکہ رفتار

$$و \left(\frac{۱ + چ}{۲}\right)^{ن-۱}$$

سے حرکت کی ابتدا کرے گا۔

مثالیں

۱۔ اولے ایک منجمد تالاب کی سطح پر ایسی سمت میں ٹکراتے مشاہدہ کیئے گئے ہیں جو انتصابی کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے اور وہ ٹکرانے کے بعد ۶۰° کے زاویہ پر بازگشت ہوتے ہیں۔ تماس کو چکنا تسلیم کرکے لچک کی قدر معلوم کرو۔

۲۔ اگر مثال ماسبق کے اولے تصادم کے بعد ۲ فٹ کے ارتفاع تک اچھلیں تو وہ رفتار معلوم کرو جس سے وہ ابتداً زمین سے ٹکرائے تھے۔

۳۔ مثال ماسبق میں وہ ارتفاع معلوم کرو جہاں تک اولے برف پرسے دوسری بار بازگشت کرنے میں اچھلیں گے۔

۴۔ ایک گولے کو ایک اُفقی فرش پر گرایا گیا ہے جو دو مرتبہ بازگشت کرنے کے بعد ایک ایسے ارتفاع تک اچھلتا ہے جو اس ارتفاع کا نصف ہے جہاں سے وہ گرایا گیا تھا۔ لچک کی قدر معلوم کرو۔

۵۔ ایک گولی ایک کھردرے نشانہ پر ۴۵° کے زاویہ پر ٹکراتی ہے اور اسی زاویہ پر بازگشت ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$م = \frac{۱ - چ}{۱ + چ}$$

۶۔ ایک گولہ جس کو فاصلہ ا سے سر کیا گیا ہے ایک نشانہ سے زاویہ قائمہ پر ٹکراتا ہے اور بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ نشانہ سے فاصلہ ا چ پر گرے گا (ہوا کی مزاحمت نظرانداز کرو)۔

۷۔ کمیت ک کا ایک کرہ کمیت کَ کے ایک ساکن کرہ سے ٹکراتا ہے ان کے درمیان تماس چکنا ہے اور تصادم کے بعد ان کے راستے ایک دوسرے کے علی القوائم مشاہدہ کیئے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ک = چ کَ۔

۸۔ بلیرڈ کے دو گولے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور ساکن ہیں، ایک تیسرا گولہ ایک ساتھ ان سے ٹکراتا ہے اور تصادم کے بعد ساکن

(۲۵۰)

ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ $چ = \frac{۱}{۲}$

۹۔ ایک چکنے افقی مستوی پر کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ کو رفتار و کے ساتھ ارتفاع عہ پر پھینکا گیا ہے اور یہ ذرہ مستوی سے ٹکرانے کے بعد مستوی پر متعدد مرتبہ بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی پرواز کا کل وقت $\frac{۲\, و\, جب\, عہ}{ج\,(۱ - چ)}$ ہے اور اس کا کل ٹپہ $\frac{و^۲\, جب\, ۲\, عہ}{ج\,(۱ - چ)}$ ہے۔

۱۰۔ ایک کھلاڑی ایک دیوار سے افقی فاصلہ ف پر کھڑا ہے اور وہ ایک گولے کو دیوار کی جانب افقی سے میلان عہ پر پھینکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر گولہ بازگشت کرنے کے بعد کھلاڑی کے پاس واپس ہو تو جس رفتار و سے کھلاڑی نے اسے پھینکا ہے وہ حسب ذیل ہونی چاہئے:۔

$$و^۲ = \frac{(۱ + چ)\, ج\, ف}{۲\, چ\, جم\, عہ\,(جب\, عہ - مہ\, جم\, عہ)}$$

جہاں چ اور عہ، لچک اور رگڑ کی قدریں ہیں۔

۱۱۔ مثال ماسبق میں حسب ذیل صورتوں پر غور کرو:

(ا) $چ = ۰$، (ب) $مہ = مس\, عہ$، (ج) $مہ > مس\, عہ$

عام مثالیں

۱۔ ایک چکنا فانہ ایک افقی میز پر پھسل سکتا ہے۔ اس کے رخ پر ایک ذرہ رکھا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ فانے کو کس طرح متحرک کرنا چاہئے کہ ذرہ نہ اوپر چڑھے نہ نیچے اترے۔ نیز ذرے اور فانے کے درمیان دباؤ معلوم کرو۔

۲۔ ریل کا ایک ہموار برقی راستہ ہے جس پر نصف میل کے فاصلوں سے اسٹیشن ہیں۔ اس راستہ پر ۱۰۰ ٹن کی ٹرینوں کو ۱۲ میل فی گھنٹہ کی اوسط رفتار سے چلانا مقصود ہے جس میں ہر اسٹیشن پر نصف منٹ کا قیام بھی شامل ہے۔ ثابت کرو کہ برقی حرکا کے کم از کم مزید ۸ ٹن وزنی ہونے چاہئیں اگر رگڑ کی قدر $\frac{۱}{۲}$ ہو

اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ٹرینوں میں مسلسل بریک لگے ہوئے ہیں۔ (انفعالی مزاحمتوں کو نظرانداز کرو)۔

ثابت کرو کہ اس ریلوے کو جاذبہ ارض سے چلایا جا سکتا ہے اگر راستہ اسٹیشنوں کے درمیان تقریباً ۶۰۰۰ فٹ کے نصف قطر تک نیچے وار منحنی ہو اور یہ کہ اسٹیشنوں کے درمیان میلان (Dip) تقریباً ۲۰۰ فٹ، اسٹیشنوں پر ڈھال تقریباً ۳۳ میں ۱ اور اعظم رفتار تقریباً $\frac{1}{2}$۲۲ میل فی گھنٹہ۔

۳۔ ارتفاع ف اور قطر و کا ایک اسطوانہ ایل کے ایک ڈبہ کے فرش پر استادہ ہے اور ڈبہ دفعتاً اسراع ع کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ ڈبے کے لحاظ سے صرف اُس وقت ساکن رہے گا جبکہ ع، م ج اور $\frac{و ج}{ف}$ دونوں سے کم ہو۔

۴۔ ایک دائری طوق پھینکا گیا ہے جو یکساں گھومتا ہوا غیر منقلب حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا مرکز ایک قطع مکافی مرتسم کرے گا اور کور کا تناؤ کور کے طول $\frac{و^2}{ج}$ کے وزن کے مساوی ہوگا جہاں و، طوق کے مرکز کے لحاظ سے کور کی رفتار کو تعبیر کرتا ہے۔

(۲۵۱) ۵۔ ۶ فٹ لمبی ایک یکساں زنجیر جس کی کمیت فی فٹ ۲ پونڈ ہے ایک کھردرے افقی میز پر خط مستقیم کی شکل میں پڑی ہے اور اس کا کچھ حصہ میز کے کنارے پر سے نیچے لٹک رہا ہے اور پھسلن عین واقع ہونے کو ہے۔ زنجیر اور میز کے درمیان رگڑ کی قدر $\frac{1}{2}$ ہے۔ اگر ذرا سے خلل سے زنجیر پھسلنے لگے تو میز کے کنارے پر زنجیر کا تناؤ معلوم کرو جبکہ اس کا لا فٹ طول پھسل چکے۔

۶۔ دو مساوی گولے ا، ب جن میں سے ہر ایک کی کمیت ک ہے ایک دوسرے سے فاصلہ ا پر ہیں۔ ا پر دھکہ د سمت ا ب میں عمل کرتا ہے اور ب پر ایک مستقل قوت ف اُسی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ ا، ب سے نہ ملیگا اگر

د۲ > ۲ ا ف ک

۷ — ایک گولی کا وزن ایک اونس ہے، اِس کو ایک درجہ کے ارتفاع پر رفتار ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ سے فائر کیا گیا ہے، یہ گولی اپنے راستہ کے بلند ترین نقطہ پر ایک پرندے سے جا لگتی ہے جس کا وزن ۲ ½ پونڈ ہے — یہ فرض کر کے کہ جب گولی پرندے پر پڑی تھی تو وہ ساکن تھا اور اِس کے بعد پیوست شدہ گولی کے ساتھ نیچے گرا معلوم کرو کہ فائر کرنے کے نقطہ سے کتنی دور پرندہ گرا ہو گا —

۸ — ایک گولی کا وزن و پونڈ ہے، اِس کو رفتار ر سے ایک جسم پر فائر کیا گیا ہے جو رفتار م سے آگے جا رہا ہے اور جس کا وزن و ہے۔ ثابت کرو کہ جسم کی رفتار گولی کی ضرب پڑنے کے بعد

$$\frac{و م - و ر}{و + و} \quad \text{یا} \quad م - \frac{و}{و}(ر - ۶)$$

ہو جائے گی بموجب اِس کے کہ گولی جسم میں پیوست ہو جائے یا اِس کو چھید کر رفتار ۶ سے حرکت کرے —

آزاد شدہ توانائی محسوب کرو اور پھر جسم کی اوسط مزاحمت گولی سے چھدے ہوئے طول کے ذریعہ معلوم کرو —

۹ — ایک وزن اوپر سے ایک میخ پر گرتا ہے اور اپنے متواتر دھکوں سے میخ کو زمین میں دھکیلتا جاتا ہے — ہر ضرب پر میخ جس حد تک زمین میں دھنستی ہے وہ کس طرح (ا) وزن کی مقدار پر اور (ب) اِس کو جس ارتفاع تک اٹھا کر چھوڑا گیا ہے اِس پر منحصر ہو گی ؟

اگر وزن ایک ٹن ہے اور جس ارتفاع سے وہ گرتا ہے وہ ۱۰ فٹ ہے اور میخ زمین میں $\frac{1}{10}$ انچ دھنسے تو مزاحمت (ٹنوں میں) معلوم کرو —

۱۰ — ایک بے لچک میخ کی کمیت ک پونڈ ہے اور ایک ہتوڑی جس کی کمیت کٔ پونڈ ہے انتصاباً فاصلہ ف میں سے گر کر اِس پر ضرب لگاتی ہے اور ہر ضرب پر میخ زمین میں ا فٹ انتصاباً دھنستی ہے۔ ثابت کرو کہ میخ کو زمین میں بتدریج دھکیلنے کے لیے جو وزن سرے پر رکھنا ہو گا وہ

$$\text{ک} + \frac{\text{ک}^{2}\,\text{ف}}{(\text{ک} + \text{ک})\,\text{ا}}\ \text{پونڈ}$$

ہے ۔

۱۱ ۔ ایک ہتوڑی کا سِرا و پونڈ ہے، یہ سِر ا رفتار ر فٹ فی ثانیہ سے حرکت کرکے ایک بے لچک کیلے پر پڑتا ہے جس کا وزن و پونڈ ہے اور وہ ک پونڈ کے ایک حرکت پذیر تختے میں نصب ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر کیلے کے دھنسنے میں تختے کی اوسط مزاحمت ر پونڈ کی ایک قوت ہو تو ہر ضرب پر کیلا تختے میں

$$\frac{\text{ک}\,\text{و}^{2}}{(\text{ک} + \text{و} + \text{و})(\text{و} + \text{و})}\ \frac{\text{ر}^{2}}{۲\,\text{ج}\,\text{ر}}\ \text{فٹ}$$

دھنسیگا ۔

(۲۵۲) ۱۲ ۔ چرخیوں کے اُس نظام میں جس کا بیان دفعہ ۱۲۸ میں کیا گیا ہے ثابت کرو کہ اگر ف ایک وزن ہو جو $\frac{\text{و}}{\text{ن}}$ کے مساوی نہیں ہے تو وزن و میں پیدا شدہ اِسراع

$$\frac{\text{ن}\,\text{ف} - \text{و}}{\text{ن}^{2}\,\text{ف} + \text{و}}\ \text{ج}$$

ہوگا ۔

۱۳ ۔ دو کمیتیں کَ، ک ایک لچکدار ڈوری کے ذریعہ ملحق ہیں اور ایک چکنے افقی میز پر رکھی گئی ہیں، کمیتیں ساکن ہیں اور ڈوری بے تنی ہوئی ہے ۔ دھکہ ف کی ایک ضرب پہلی کمیت پر لگائی گئی ہے اُس سمت میں جو دوسری کمیت کی سمت کے مخالف ہے ۔ ثابت کرو کہ جب ڈوری پھر بے تنی ہوئی حالت میں ہوتی ہے تو دوسری کمیت کی رفتار

$$\frac{۲\,\text{ف}}{\text{ک} + \text{کَ}}$$

ہے ۔

۱۴ ۔ ایک نا امتداد پذیر ڈوری کے سِروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی

ذرے باندھے گئے ہیں اور ڈوری کو پوری طرح تنی ہوئی حالت میں ایک چکنے میز پر رکھا گیا ہے ۔ وسطی ذرہ جھٹکے کے ساتھ اُس سمت میں حرکت میں آتا ہے جو دوسرے ذروں کو ملانے والے خط پر عمود ہے ۔ توانائی کا نقصان معلوم کرو جب دوسرے ذرے جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتے ہیں ۔

۱۵ ۔ کوئلہ لیجانے والی ایک ٹرین میں متعدد مشابہ ڈبے ہیں جن کو ایک انجن کھینچتا ہے جس کا وزن تین ڈبوں کے عین مساوی ہے ۔ ٹرین ہموار راستہ پر ساکن ہے اور جوڑک (Couplings) جو مساوی طول کے ہیں سب کے سب برابر ڈھیلے ہیں ۔ انجن ایک مستقل جری قوت کے ساتھ حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور ہر ڈبہ جھٹکے کے ساتھ حرکت میں آتا ہے جبکہ اسکا جوڑک تن جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ انجن کی چال بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ دسواں جھٹکہ عین واقع ہونیکو ہو ۔

۱٦ ۔ برف ایک چھت پر مساوی طور پر پھیلی ہوئی ہے ۔ اگر اس کی کچھ کمیت پھسلنا شروع کرے اور جاتے ہوئے ایکساں عرض کا راستہ بناتے جائے تو ثابت کرو کہ اس کا اسراع مستقل ہے اور اُس اسراع کے ایک ثلث کے مساوی ہے جو اُس کمیت کا ہوگا جو آزادانہ چھت کے نیچے پھسلے ۔

۱۷ ۔ ایک وزنی اور کامل ملائم یکساں ڈوری انتصاباً لٹک رہی ہے اور اس کا زیر ترین نقطہ ایک بے لچک افقی مستوی کے اوپر ارتفاع ف پر ہے ۔ اگر اس کو مستوی پر گرنے کے لیے دفعتاً چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب میز پر ڈوری کا طول لا گر پڑتا ہے تو میز پر دباؤ

(۳ لا + ۲ ف) ک ج

ہے ۔

۱۸ ۔ اگر دو مساوی گولے رفتاروں $\frac{۱ + ج}{۱ - ج}$ و اور ۔ و کے ساتھ متصادم ہوں تو ثابت کرو کہ اول الذکر ساکن ہو جائے گا ۔

۱۹ ۔ ثابت کرو کہ ایک کرہ کی وہ کمیت ک جو کمیت ک کے ایک ساکن کرہ اور رفتار و سے ٹھیک اس کی جانب حرکت کرنے والے کمیت ک کے

ایک دوسرے کرہ کے درمیان رکھی رہنی چاہیئے تاکہ اول الذکر کرہ تصادم سے بڑی سے بڑی رفتار حاصل کر سکے یا $\sqrt{ک کَ}$ ہوگی اور حاصل کردہ رفتار

$$\frac{کَ و (۱ + ج)^۲}{ک + کَ + ۲ ک}$$

ہوگی۔

(۲۵۳)

۲۰ — ایک لچکدار گولے کو ایک سخت فرش پر ارتفاع ف فٹ سے انتصاباً گرایا گیا ہے اور گولہ فرش سے جس رفتار سے ٹکراتا ہے ہر دفعہ اس کی ج گنی رفتار سے انتصاباً بازگشت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ گولہ ساکن ہونے سے پیشتر

$$\frac{۱ + ج^۲}{۱ - ج^۲} \text{ ف فٹ، } \frac{۱ + ج}{۱ - ج}\sqrt{\frac{۲ ف}{ج}} \text{ ثانیوں میں}$$

طے کرے گا۔

ف = ۱، ج = $\frac{۵}{۹}$ کے لیے اس کا حساب لگاؤ۔

۲۱ — ارتفاع ف کے ایک مینار کی چوٹی سے ایک گولہ گرایا گیا ہے اور اسی وقت مساوی وزن کے ایک دوسرے گولے کو رفتار $\sqrt{۲ ج ف}$ کے ساتھ مینار کے قاعدے سے اوپر وار پھینکا گیا ہے جو گرتے ہوئے گولے کے ساتھ راست متصادم ہوتا ہے۔ اگر عود کی قدر ج ہو تو ثابت کرو کہ گرتا ہوا گولہ بازگشت میں ارتفاع ف $-\frac{ف}{۴}(۱ - ج^۲)$ تک اچھلے گا۔

۲۲ — ایک لڑکا ریل کے ایک ڈبے کی افقی چھت پر جو پل کے نیچے سے رفتار ۱۵ میل فی گھنٹہ سے جا رہا ہے ایک گولے کو چھوڑتا ہے۔ اگر چھت اور گولے کے درمیان م = $\frac{۱}{۲}$، ج = $\frac{۲}{۳}$ تو چھت کے اوپر لڑکے کے ہاتھ کا کم از کم ارتفاع معلوم کرو تاکہ گولے کی دوسری بازگشت چھت کے اسی نقطہ سے ہو جس سے پہلی بازگشت ہوئی تھی۔

اگر لڑکے کا ہاتھ اس سے زیادہ ارتفاع پر ہے تو کیا واقع ہوگا۔

۲۳ — ایک کامل طور پر لچکدار ذرہ کو پھینکا گیا ہے، یہ ذرہ ایک گردشی سطح کے اندرونی حصہ سے ٹکراتا ہے، گردشی سطح کا محور ایک معلومہ انتصابی

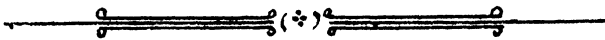
خط ہے۔ ثابت کرو کہ ان سب مکافیوں کے راس جو متواتر بازگشتوں سے مرتسم ہوتے ہیں ایک سطح پر واقع ہوتے ہیں جس کی شکل گردشی سطح کی شکل پر منحصر نہیں ہوتی۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ قطر ا کے ایک چکنے بلیرڈ گولے کی حرکت کی سمت میں ایک دوسرے ساکن مساوی گولے پر تصادم کے ذریعہ زیادہ سے زیادہ ممکن انحراف پیدا کرنے کے لیے قبل الذکر کو ایک ایسی سمت میں پھینکنا ہوگا جو مرکزوں کو ملانے والے خط (طول ج) کے ساتھ زاویہ

$$\text{جب}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ج}}\sqrt{\frac{1-\text{چ}}{3-\text{چ}}}\right)$$

بنائے۔

۲۵۔ ایک رقاص اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کا لنگر ایک چکنے انتصابی مستوی کو عین مس کرتا ہے۔ لنگر کو ایک جانب کھینچا گیا یہاں تک کہ وہ پہلے کی بہ نسبت ۵ انچ زیادہ بلند ہوا اور پھر اس کو چھوڑ دیا گیا تاکہ مستوی سے عماد کی سمت میں ٹکرائے، پہلی بازگشت میں وہ انتصاباً ۴ انچ اچھلتا ہے۔ اگر رقاص کو اسی زاویہ میں سے ایک جانب کھینچا جائے لیکن اس طور پر کہ لنگر مستوی سے ایسے زاویے ٹکرائے جو عماد کے ساتھ °۶۰ کا زاویہ بنائے تو بازگشت میں لنگر انتصاباً کتنا اچھلے گا۔

(۲۵۴)

دسواں باب

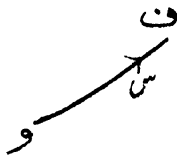
متغیر قوت کے تحت ذرہ کی حرکت

۲۰۳ — ابتک ہم نے ذرہ کی حرکت کی صرف اُن صورتوں پر بحث کی ہے جن میں ذرہ پر عمل کرنے والی قوتیں اس کی حرکت کے پورے راستہ میں مستقل تھیں اور اس لیے ذرہ کا اسراع مستقل تھا۔ اب ہم ایک ایسے ذرہ کی حرکت پر غور کریں گے جس پر وہ قوتیں عمل کرتی ہیں جو ذرہ کے راستے پر نقطہ بہ نقطہ متغیر ہوتی ہیں ۔

اِس قسم کی حرکت کے مسائل دو جماعتوں میں تقسیم کئے جا سکتے ہیں، ایک تو وہ جس میں راستہ جو ذرہ طے کرتا ہے مسئلہ کے معطیات کے طور پر دیا گیا ہو اور دوسری وہ جس میں یہ راستہ نامعلوم ہو۔ اول الذکر جماعت سادہ ترین ہے اور اس لیے اول ہم اسی پر غور کریں گے۔ اِس میں وہ مثالیں شامل ہیں جو نمونتاً حسب ذیل ہیں: رقاص کی حرکت جس میں رقاص کا لنگر، رقاص کے لٹکانے کی میکانیت کی وجہ سے ایک دائرہ مرتسم کرنے پر مجبور ہے؛ تار میں پروئے ہوئے منکے کی حرکت جس میں منکا وہ راستہ طے کرنے پر مجبور رہے جو تار سے نشان زدہ ہے۔

حرکت کی مساوات

۲۰۴ — فرض کرو کہ ذرہ اپنے راستہ کا فاصلہ س کسی لمحہ ت پر طے کرتا ہے،

یہ فاصلہ راستہ کے کسی ثابت نقطہ و سے پیمائش کیا جاتا ہے۔ اب راستہ پر ذرہ کی رفتار $\frac{فر س}{فر ت}$ ہے۔ اِس کو د سے تعبیر کرنے سے ذرہ کا اسراع $\frac{فر د}{فر ت}$ یا $\frac{فر^۲ س}{فر ت^۲}$ حاصل ہوتا ہے۔

اگر عمل کرنے والی قوتیں معلوم ہوں تو بھی ہم اسراع کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اِس کے لیے تمام قوتوں کو جو ذرہ پر عمل کرتی ہیں راستہ کی سمت میں تحلیل کرنا چاہئے۔ اگر اِس سمت میں قوت کا جزو ترکیبی س ہے تو حرکت کے دوسرے قانون کی رُو سے ذرہ کی حرکت کی مساوات

ف
س
و
شکل (۱۲۹)

(د ۲۵)

$$س = ک \frac{فر د}{فر ت} \qquad (۹۰)$$

یا

$$س = ک \frac{فر^۲ س}{فر ت^۲} \qquad (۹۱)$$

ہوگی۔

ہم فرض کریں گے کہ قوت کا میدان دائمی ہے اور اِس لیے مقدار س کے متعلق یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ صرف اُسی محل پر منحصر ہوتی ہے جو ذرہ اپنے راستہ پر اختیار کرتا ہے اور اِس لمحہ پر منحصر نہیں ہوتی جس پر وہ وہاں پہنچتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر س، س کا ایک تفاعل ہے نہ کہ ت کا۔ مساوات (۹۱) س اور ت میں ایک تفرقی مساوات ہے اور اگر ہم اِس کو حل کر سکیں تو ذرہ کی حرکت کا پورا علم ہو جائیگا بشرطیکہ اِس کا راستہ معلوم ہو۔

یہ مساوات دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات ہے لیکن اِس کو آسانی کے ساتھ پہلے رتبہ کی مساوات میں مستحیل کیا جا سکتا ہے۔ کیونکہ

$$\frac{فر^۲ س}{فر ت^۲} = \frac{فر د}{فر ت} = \frac{فر د}{فر س} \frac{فر س}{فر ت} = د \frac{فر د}{فر س}$$

اس لیے مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$س = ک و \frac{فر و}{فر س}$$

اب چونکہ س، س کا تفاعل ہے اِس مساوات کو س کے لحاظ سے تفرق کیا جا سکتا ہے، چنانچہ

$$مر + \int س \; فر س = \frac{1}{2} ک \, و^{2} \qquad (۹۲)$$

جہاں مر تکمل کا مستقل ہے۔

چونکہ و، $\frac{فر س}{فر ت}$ کے مساوی ہے اسلیے اِس مساوات کو شکل

$$\frac{فر س}{فر ت} = \sqrt{\frac{2}{ک} \left(مر + \int س \; فر س \right)} \qquad (۹۳)$$

میں رکھا جا سکتا ہے اور یہ درجۂ اول کی مساوات ہے۔ اگر یہ حل ہو سکے تو مسئلہ مکمل طور پر حل ہو جائے گا۔

(۲۵۶) ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۲) کی بائیں جانب، ذرہ کی توانائی بالحرکت ہے۔ نیز چونکہ ذرہ کے راستہ کی سمت میں اِس کی حرکت میں مزاحم قوت۔ س ہے اِس لیے ذرہ کی توانائی بالقوہ

$$- \int س \; فر س$$

ہے۔ پس مساوات (۹۲) سے واضح ہے کہ توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ مستقل رہتا ہے، یہ مساوات ذرہ کی حرکت کے لیے توانائی کی مساوات ہے۔ اگر ہمیں ذرہ کی حرکت کے کسی لمحہ پر کُل توانائی معلوم ہو تو ہم مستقل مر متعین کر سکتے ہیں اور پھر مساوات (۹۳) کو تکمل کیا جا سکتا ہے اگر وہ ممکن ہے۔

توضیحی مثال

یہ تسلیم کر کے کہ جاذبہ کی قیمت، زمین کے مرکز سے فاصلہ کے

مُربع کے بالعکس بدلتی ہے ایک مرمی کی حرکت معلوم کرو جس کو ہوا میں انتصاباً پھینکا گیا ہے، جاذبہ کی تخفیف کا لحاظ رکھو۔

فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ا ہے اور اس کی سطح پر جاذبہ کی قیمت ج ہے تب زمین کے مرکز سے ر فاصلہ پر جاذبہ کی قیمت $\frac{ج ا^2}{ر^2}$ ہوگی۔

چونکہ ذرہ، زمین کے مرکز سے کھینچے ہوئے ایک نصف قطر پر حرکت کرتا ہے اس لیے ہم تمام فاصلوں کو زمین کے مرکز سے پیمائش کر سکتے ہیں اور دفعہ ۴۰۲ کے محدد س کی بجائے فاصلہ ر لے سکتے ہیں۔ قوت س کی قیمت، مرمی کے راستہ کی سمت میں تحلیل شدہ، $-\frac{ک ج ا^2}{ر^2}$ ہے اور اس لئے حرکت کی مساوات

$$ک \frac{فر^2 ر}{فرت^2} = -\frac{ک ج ا^2}{ر^2}$$

ہے۔ توانائی کی مساوات بموجب مساوات (۹۲) حسب ذیل ہے:

$$م - \int \frac{ک ج ا^2}{ر^2} فرر = \frac{1}{2} ک و^2$$

یا

$$م + \frac{ک ج ا^2}{ر} = \frac{1}{2} ک و^2 \qquad (ا)$$

فرض کرو کہ ذرہ کو زمین کی سطح سے رفتار و کے ساتھ پھینکا گیا تھا۔ مساوات (ا) میں ر = ا رکھنے سے و کی قیمت و حاصل ہونی چاہئے اور اس لیے

$$م + ک ج ا = \frac{1}{2} ک و^2 \qquad (ب)$$

اس مساوات سے م معلوم ہوگا۔ مساواتوں (ا) اور (ب) سے م کو ساقط کیا جائے تو

$$ج ا \left(1 - \frac{ا}{ر}\right) = \frac{1}{2} (و^2 - و^2)$$

$$\therefore \quad و = \sqrt{و^2 - 2 ج ا \left(1 - \frac{ا}{ر}\right)} \qquad (ج)$$

(۲۵۷)

اس سے کسی نقطہ پر رفتار معلوم ہو گی۔ نیز چونکہ $و = \frac{فر ر}{فر ت}$ اس لیے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{فر ر}{فر ت} = \sqrt{و^{۲} - ۲ ج ا \left(۱ - \frac{ا}{ر}\right)} \qquad (د)$$

اس لیے

$$ت = \int \frac{فر ر}{\sqrt{و^{۲} - ۲ ج ا + \frac{۲ ج ا^{۲}}{ر}}} \qquad (ع)$$

تکمل کے عمل کی تکمیل کرنے سے وہ وقت معلوم ہو سکتا ہے جو راستہ کا کوئی حصہ طے ہونے میں لگتا ہے۔ فرض کرو کہ ہم حل کے مختلف نمونوں پر غور کرتے ہیں۔
ہم مساوات (ج) سے دیکھتے ہیں کہ و معدوم ہوتا ہے جبکہ

$$ر = \frac{۲ ج ا^{۲}}{۲ ج ا - و^{۲}}$$

اس لیے اگر $و^{۲} < ۲ ج ا$ تو $+ا$ اور $+\infty$ کے درمیان ر کی ایک مثبت قیمت ہے جس کے لیے رفتار معدوم ہوتی ہے۔ پس اگر $و^{۲} < ۲ ج ا$ تو مرمی اس نقطہ تک جاتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے $\frac{۲ ج ا^{۲}}{۲ ج ا - و^{۲}}$ ہے اور پھر زمین پر واپس گرتا ہے۔ اگر $و^{۲} > ۲ ج ا$ تو ر کی کوئی مثبت قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کے لیے و معدوم ہو اور اس لیے ذرہ لاتناہی تک چلا جاتا ہے، وہ زمین کے جاذبہ سے صاف بچ نکلتا ہے۔

اگر $و^{۲} = ۲ ج ا$ تو رفتار لاتناہی پر معدوم ہوتی ہے، اس لیے ذرہ زمین کی کشش سے عین بچ جاتا ہے لیکن صرف صفر رفتار کے ساتھ۔ پھینکنے میں اس کی توانائی بالحرکت زمین کی کشش پر غالب آنے میں عین کافی ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ہم اول اس خاص صورت $و^{۲} = ۲ ج ا$ پر غور کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (ع)

$$ت = \int \frac{فر ر}{\sqrt{\frac{۲ ج ا^{۲}}{ر}}}$$

$$= \frac{۲}{۳} \frac{ر^{\frac{۳}{۲}}}{\sqrt{۲ج ا^۲}} + مَ$$

میں تحویل ہوتی ہے جہاں مَ تکمل کا ایک نیا مستقل ہے۔

اگر ہم وقت کو پھینکنے کے لمحہ سے شمار کریں تو ت = ۰ حاصل ہونا چاہیئے جبکہ ر = ا اور اِس لیے

$$۰ = \frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{ا}{۲ج}} + مَ$$

اور مَ کو ساقط کرنے پر

$$ت = \frac{۲}{۳ ا\sqrt{۲ج}} \left(ر^{\frac{۳}{۲}} - ا^{\frac{۳}{۲}}\right) \qquad (ف)$$

(۲۵۸) اُس صورت میں جبکہ وَ^۲ > ۲ج ا مساوات (ع) کو تکمل کرنے کے بعد حاصل ہوتا ہے

$$ت = -\frac{ج ا^۲}{و^۲-۲ج ا}\left\{\frac{۱}{\sqrt{و^۲-۲ج ا}}\, لوک \frac{\sqrt{و^۲-۲ج ا+\frac{۲ج ا^۲}{ر}} - \sqrt{و^۲-۲ج ا}}{\sqrt{و^۲-۲ج ا+\frac{۲ج ا^۲}{ر}} + \sqrt{و^۲-۲ج ا}} + \frac{۲ب}{ر}\sqrt{و^۲-۲ج ا+\frac{۲ج ا^۲}{ر}}\right\} + مَ \qquad (گ)$$

جہاں مَ تکمل کا ایک نیا مستقل ہے۔ اگر وقت کو اُس لمحہ سے شمار کیا جائے جبکہ ذرہ کو پھینکا گیا تھا تو ت = ۰ کے لیے ر = ا حاصل ہونا چاہیئے، اور اس لیے

$$۰ = -\frac{ج ا^۲}{و^۲-۲ج ا}\left\{\frac{۱}{\sqrt{و^۲-۲ج ا}}\, لوک \frac{و-\sqrt{و^۲-۲ج ا}}{و+\sqrt{و^۲-۲ج ا}} + \frac{۲ب و}{ا}\right\} + مَ$$

اور مَ کو ساقط کرنے پر ہم پھر وہ وقت معلوم کرسکتے ہیں جو راستہ کا کوئی حصہ طے ہونے میں مطلوب ہوتا ہے۔ صورت وَ^۲ < ۲ج ا پر بھی اسی طرح بحث کی جاسکتی ہے۔

اس کو طالب علم پر بطور مشق کے چھوڑا جاتا ہے ۔

مثالیں

۱ ۔ پچھلی توضیحی مثال میں فرض کرو $و^2 > ۲ ج ا$ اور معلوم کرو

(ا) بلند ترین ارتفاع جہاں تک ذرہ پہنچتا ہے،

(ب) ذرہ کی پرواز کا وقت

۲ ۔ ایک شہاب زمین پر گرتا ہے ۔ فرض کرو کہ وہ لاتناہی سے صفر رفتار کے ساتھ نکلا تھا اور راست زمین پر گرا ۔ زمین کی سطح پر جس رفتار سے وہ پہنچتا ہے اس کو معلوم کرو ۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو شہاب اس نقطہ سے زمین کی سطح پر گرنے میں لیتا ہے جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے ر ہے ۔

۳ ۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے قوت کے ایک مرکز پر گرتا ہے جو قانون $\frac{م}{ر^2}$ کی بموجب کشش کرتی ہے ۔ ثابت کرو کہ راستہ کے نصف حصہ پر اوسط رفتار کو راستہ کے دوسرے نصف حصہ پر اوسط رفتار کے ساتھ حسب ذیل نسبت ہے:

$$\pi - 2 : \pi + 2$$

۴ ۔ قوت کے ایک مرکز پر گرنے کا وقت معلوم کرو جو قانون $م ر^{\frac{5}{3}}$ کی بموجب کشش رکھتی ہے ۔

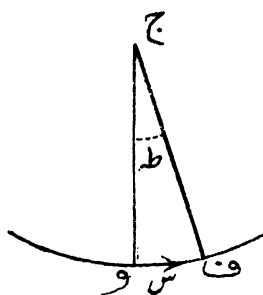
۵ ۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے کشش کے ایک مرکز کی جانب خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے ۔ قوت کا قانون $\frac{م}{ر^3}$ ہے ۔ ثابت کرو کہ مرکز تک پہنچنے میں جو وقت مطلوب ہے وہ $\frac{ا^2}{\sqrt{م}}$ ہے ۔

۶ ۔ ایک ذرہ فاصلہ ا سے ایک ثابت مرکز کی جانب حرکت کرنا شروع کرتا ہے ۔ قوت کا مرکز قانون م ر کی بموجب دفع کرتا ہے ۔ اگر ذرہ کی ابتدائی رفتار $\sqrt{م}\, ا$ ہے تو ثابت کرو کہ وہ ثابت مرکز کی جانب مسلسل بڑھتا جائے گا لیکن اس تک کبھی بھی نہ پہنچیگا ۔

سادہ رقاص

(۲۵۷)

۲۰۵ ۔ متغیر قوت کی اہم ترین صورتوں میں سے ایک سادہ رقاص کی

حرکت سے مہیا ہوتی ہے۔ پہلا تقرب حاصل کرنے کے لیے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ رقاص کا پورا وزن اس کے لنگر میں مُرتکز ہے جس کو ایک ذرہ خیال کیا جا سکتا ہے۔ اِس لنگر کو ایک ثابت نقطہ سے ایک بے وزن ڈوری یا ڈنڈے کے ذریعہ لٹکایا جاتا ہے اور اِس لیے وہ ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرنے پر مجبور ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اِس دائرہ پر ذرہ جو فاصلہ طے کرتا ہے اُس کو س سے تعبیر کیا گیا ہے جہاں س کو زیریں ترین نقطہ و سے پیمائش کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ ڈوری اور انتصابی کے درمیان زاویہ ف ج و، طہ سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لیے س = ا طہ جہاں ا ڈوری کا طول ہے۔ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت اِس کے وزن اور ڈوری کے تناؤ پر مشتمل ہے۔ بعد الذکر اُس سمت میں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے کوئی جزو ترکیبی نہیں رکھتی۔ اول الذکر کا جزو ترکیبی اِس سمت میں ۔ک ج جب طہ ہے۔

ج

طہ

و س ف

شکل (۱۳۰)

اِس لیے حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2 \text{س}}{\text{فر ت}^2} = -\text{ج جب طہ} \qquad . \qquad (۹۴)$$

جہاں طہ $= \frac{\text{س}}{\text{ا}}$ ۔

۲۰۶ — اِس مساوات کو ابتدائی ریاضی کے ذریعہ حل نہیں کیا جا سکتا اِلّا اُس سادہ صورت کے جس میں زاویہ طہ چھوٹا ہو یعنے جس میں رقاص انتصابی سے ایک چھوٹے زاویہ سے زیادہ نہ جھولنے پائے۔ اِس صورت پر اپنی توجہ محدود رکھنے سے ہم جب طہ کی بجائے طہ رکھ سکتے ہیں اور طہ کی

بجائے $\frac{س}{ا}$ ۔ چنانچہ حرکت کی مساوات شکل

$$\frac{ف^۲ س}{ف ت^۲} = -\left(\frac{ج}{ا}\right) س$$

میں لکھی جا سکتی ہے ۔

اِس طرح رقاص کے لنگر کا اسراع، و کی جانب اور و سے اِس کے فاصلے کے متناسب ہوتا ہے ۔

مساوات کو شکل

$$و \frac{ف و}{ف س} = -\left(\frac{ج}{ا}\right) س$$

میں لکھنے اور س کے لحاظ سے تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(۲۶۰)

$$و^۲ = م - \left(\frac{ج}{ا}\right) س^۲ \quad (۹۵)$$

صریحاً مستقل م کو مثبت ہونا چاہئے اور رفتار معدوم ہو گی جوں ہی س ایسی قیمت پر پہنچے کہ

$$م = \left(\frac{ج}{ا}\right) س^۲$$

فرض کرو کہ اِس مساوات کو پورا کرنے والی س کی قیمتیں ± س. سے تعبیر ہوتی ہیں، تب لنگر کی حرکت صریحاً اُن نقطوں کے اندر مقید رہتی ہے جو نقطہ و سے اِس کی مخالف سمتوں میں فاصلہ س. پر ہیں ۔ ہم س. کو اہتزاز کا حیطہ کہہ سکتے ہیں ۔

م کی بجائے $\left(\frac{ج}{ا}\right) س_.^۲$ رکھنے سے مساوات (۹۵) ہو جاتی ہے

$$و^۲ = \frac{ج}{ا}\left(س_.^۲ - س^۲\right)$$

اس لیے $$\frac{\text{ف س}}{\text{ف ت}} = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{د}}(\text{س}_0^2 - \text{س}^2)}$$

اور اس مساوات کا تکملہ ہے

$$\text{ت} = \int \frac{\text{ف س}}{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{د}}(\text{س}_0^2 - \text{س}^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{د}}}\ \text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}_0}\right) + \text{صہ}$$

جہاں صہ تکمل کا مستقل ہے۔

اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}_0}\right) = \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{د}}}\ (\text{ت} - \text{صہ})$$

اس لیے $$\text{س} = \text{س}_0\ \text{جم}\left\{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{د}}}\ (\text{ت} - \text{صہ})\right\}$$

(۲۶۱) اس مساوات میں مسئلہ کا پورا حل شامل ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ س کی قیمتیں وقت ت_0 کے وقفوں سے مسلسل تکرار پاتی ہیں جہاں ت_0، مساوات

$$\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{د}}}\ \text{ت}_0 = 2\pi$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح رقاص کی حرکت لاانتہا مرتبہ خود تکرار پاتی ہے۔ اُن دو لمحات کے درمیان وقفہ جن پر رقاص ایک ہی محل میں ہوتا ہے یعنے وقفہ ت_0 مساوات

$$\text{ت}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\text{د}}{\text{ج}}}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور اس کو رقاص کا دَور کہتے ہیں ۔

۲۰۷ ۔ ثانیوں کا رقاص ۔ اُس رقاص کو بنانے کے لیے جو ثانیوں کو ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرے ہم اکو ایسا لیتے ہیں کہ ت ' دو ثانیوں کے مساوی ہو کیونکہ ثانیوں کا رقاص ایسا رقاص ہونا چاہیئے جو بائیں جانب سے سیدھی جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ اور پھر سیدھی جانب سے بائیں جانب حرکت کرنے میں ایک ثانیہ لے ۔ اس لیے

$$\pi \sqrt{\frac{ا}{ج}} = ۱$$

فٹ ثانیہ اکائیوں میں ہم لندن کے لیے ج = ۳۲٫۱۹ لے سکتے ہیں اور اس طرح حاصل ہوتا ہے

ا = ۳۹٫۱۴ انچ

یعنی لندن کے لیے ثانیوں کے رقاص کا طول ۳۹٫۱۴ انچ ہونا چاہیئے ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ کسی رقاص کا دَور اس کے طول کے جذر المربع کے متناسب ہوتا ہے ۔ مثلاً اُس رقاص میں جو نصف ثانیوں کو ضربوں کے ذریعہ ظاہر کرتا ہے اس کا طول ثانیوں کے رقاص کے طول کا صرف ایک چوتھائی ہوگا اور اس لیے لندن میں ۹٫۷۸ انچ ۔

چونکہ ج کی قیمت زمین کی سطح پر نقطہ بہ نقطہ بدلتی رہتی ہے اس لیے ثانیوں کے رقاص کا طول بھی متغیر ہوگا ۔ اگر ہم رقاص کا طول دیکھیں اور نیز وقت پیما سے اس کا دَور معلوم کریں تو ہم اُس مقام پر جہاں تجربہ کیا جا رہا ہے ج کی قیمت محسوب کر سکتے ہیں ' فی الحقیقت یہ طریقہ زمین کی سطح کے کسی نقطہ پر ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے سب سے زیادہ آسان اور صحیح ترین ہے ۔

توضیحی مثال

(۲۶۲) ایک رقاص نیویارک میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں کے ذریعہ ظاہر

کرتا ہے، اِس کو فیلیڈلفیا لیجانے پر معلوم ہوا کہ وہ وہاں ۲ ثانئے فی یوم تیز رہتا ہے۔ نیویارک اور فیلیڈلفیا پر ج کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

فیلیڈلفیا میں رقاص $۲۴ \times (۶۰)^۲$ ثانیوں میں $۲۴ \times (۶۰)^۲ + ۲$ بار ضربیں ظاہر کرتا ہے۔ اِس لیے ایک ضرب کا وقت

$$\frac{۲۴ \times (۶۰)^۲}{۲۴ \times (۶۰)^۲ + ۲}$$

ہے اور یہ $\pi \sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}}$ کے مساوی ہے جہاں ا، رقاص کا طول ہے اور ج، فیلیڈلفیا میں جاذبہ کی قیمت ہے۔ اگر نیویارک میں جاذبہ کی قیمت ج. سے تعبیر ہو تو

$$\text{ج.} = \pi^۲ \text{ا}$$

$$\text{ج} = \pi^۲ \text{ا} \left[\frac{۲۴ \times (۶۰)^۲ + ۲}{۲۴ \times (۶۰)^۲} \right]$$

$$= \pi^۲ \text{ا} \left(۱ + \frac{۴}{۲۴ \times (۶۰)^۲} \right) \text{ تقریباً}$$

اِس لیے

$$\text{ج} = \text{ج.} \left(۱ + \frac{۴}{۲۴ \times (۶۰)^۲} \right)$$

$$= \text{ج.} \left(۱ + \frac{۱}{۲۱۶۰۰} \right) \text{ تقریباً}$$

اِس طرح نیویارک کی بہ نسبت فیلیڈلفیا میں جاذبہ تقریباً ۲۱۶۰۰ میں ایک حصہ زیادہ ہے۔

مثالیں

۱۔ ایک رقاص کا طول محسوب کرو جو ایک منٹ میں ۱۰۰ دفعہ ضربوں کے ذریعہ وقت کی پیمائش کرتا ہے۔

۲۔ ایک رقاص لندن میں ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے، اگر یہ رقاص نیویارک میں ہو تو اس سے صحیح وقت کی پیمائش ہوتی ہے اگر اس کے طول کو بقدر ایک ہزارویں حصہ کے چھوٹا کر دیا جائے۔ لندن اور نیویارک میں جاذبہ کی قیمتوں کا مقابلہ کرو۔

۳۔ زمین کی سطح پر عرض بلد لہ میں ایک نقطہ پر ج کی قیمت

ج = ج. (۱ ـ ۰۰۲۵۷۰. جم ۲ لہ)

ہے جہاں ج. (= ۳۲٫۱۷) عرض بلد ۴۵° میں ج کی قیمت ہے۔ ثابت کرو کہ وہ عرض بلد جس میں معلومہ طول کا ایک چھوٹا سفر رقاص گھڑی کی شرح میں بڑی سے بڑی خطا پیدا کرتا ہے عرض بلد ۴۵° ہے، اس عرض بلد میں خطا فی میل معلوم کرو۔ (عرض بلد کا ایک دقیقہ = ۶۰۷۵ فٹ)

۴۔ ایک عمارت میں زمین سے اوپر ف ارتفاع پر جاذبہ کی قیمت

ج ـ ۰۰۰۰۰۳, ف

ہے جہاں ج، عمارت کے پائین پر جاذبہ کی قیمت ہے نیویارک میں ج = ۳۲٫۱۴۔ رقاص گھڑی کی شرح میں وہ خطا معلوم کرو جو اس کو زمین سے ۴۰۰ فٹ بلند عمارت کی چھت پر لیجانے سے پیدا ہوتی ہے۔

۵۔ ایک رقاص کا طول ل ہے اور وہ ن ضربیں فی یوم ظاہر کرتا ہے، اگر اس طول کو ل + ڶ میں بدل دیا جائے تو ثابت کرو کہ رقاص تقریباً

$\frac{ن ڶ}{ل}$ ضربیں فی یوم کھو دیگا۔

۶۔ ایک غبارہ مستقل اسراع کے ساتھ بلند ہوتا ہے اور دو منٹ میں ۳۶۰۰ فٹ کے ارتفاع تک پہنچ جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس چڑھاؤ میں رقاص گھڑی تقریباً ایک ثانیہ تیز ہوگئی ہوگی۔

۷۔ طول ل کے ایک رقاص کو اس کے لنگر کے صرف ایک چھوٹے حصہ کو حرکت دیکر ٹھیک بنایا جا سکتا ہے، اس حصہ کی کمیت کل لنگر کی کمیت کا $\frac{۱}{ن}$ ہے۔ اس کو کتنی دور تک حرکت دینی چاہئے کہ ف ثانئے فی یوم کی خطا کی

تصحیح ہو جائے۔

سادہ موسیقی حرکت

۲۰۸ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر کوئی رقاص اس طور پر حرکت کرے کہ انتصابی کے ساتھ اس کا اعظم میلان چھوٹا ہو تو اس کی کل حرکت میں جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ اس کے راستہ کے وسطی نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہوتا ہے اور اسراع کی سمت اس نقطہ کی جانب ہوتی ہے۔ اگر کوئی نقطہ اس طریقہ پر حرکت کرے تو ہم کہتے ہیں کہ وہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے۔ چنانچہ اگر ایک نقطہ سادہ موسیقی حرکت کرے اور ایک ثابت نقطہ سے اس کا فاصلہ س ہو تو شکل

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = -\text{ک}^2\text{س}$$

کی ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جہاں ک ایک مستقل ہے۔

تکمل کرنے سے حسب سابق (مقابلہ کرو مساوات (۹۶) کے ساتھ) مساوات

$$\text{و}^2 = \text{ک}^2(\text{س}_\cdot^2 - \text{س}^2)$$

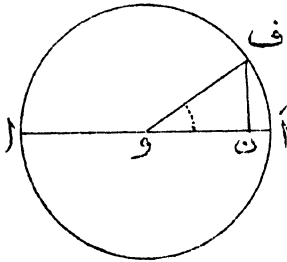
حاصل ہوتی ہے اور پھر اس سے مساوات

$$\text{س} = \text{س}_\cdot \text{ جم ک } (\text{ت} - \text{صہ}) \qquad (۹۷)$$

ملتی ہے۔

مستقل ک کو حرکت کا **تعدد** کہتے ہیں۔ مثلاً کسی سادہ رقاص کا **تعدد** $\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ ہے۔

۲۰۹ — سادہ موسیقی حرکت کی ایک آسان ہندسی توجیہ کیجا سکتی ہے اور اس سے اس حرکت کا پورا علم تکملی احصاء یا تفرقی مساواتوں کے نظریہ کے استعمال کے بغیر ہو جاتا ہے۔ شکل ۱۳۱ میں فرض کرو کہ خط و ف و کے

گرد یکساں زاویٔ رفتار ک کے ساتھ گردش کرتا ہے اور اس لیے ف، یکساں رفتار ک ا کے ساتھ نصف قطر ا کا ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ف سے ایک ثابت قطر ا اَ پر عمود ف ن کھینچا گیا ہے۔ اب معلوم ہوگا کہ نقطہ ن، خط ا اَ پر سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ آگے اور پیچھے حرکت کرتا ہے۔ (۲۶۴)

ف کا اسراع بموجب دفعہ ۱۲ ف و کی سمت میں ک۲ ا ہے۔ اس اسراع کو دو اسراعوں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) ن کے لحاظ سے ف کا اسراع جس کو ن ف پر ہونا چاہئے (۲) و کے لحاظ سے ن کا اسراع جس کو و ن پر ہونا چاہئے۔ پس ن کا اسراع، ف کے اسراع کا وہ جزو ترکیبی ہے جو سمت ا اَ میں ہے۔ لیکن یہ جزو ترکیبی ک۲ ا جم طہ یا ک۲ × و ن ہے اور اس کی سمت ن و ہے۔ و ن کو س کے مساوی لینے سے اسراع ک۲ س اُس سمت میں حاصل ہوتا ہے جس میں س کی پیمائش ہوئی ہے یعنے و ن۔ اس لئے نقطہ ن سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔

ف
ا
و
ن
اَ

شکل (۱۳۱)

سادہ موسیقی حرکت کی اس ہندسی توجیہ سے و اور س کے لیے جملے راست حاصل کئے جا سکتے ہیں س کی قیمت و ن یا ا جم طہ ہے۔ فرض کرو کہ ت = صہ وہ لمحہ ہے جس پر نقطہ ف، دائرہ کے گرد اپنی حرکت میں نقطہ اَ میں سے گذر رہا تھا، تب اس کے بعد کسی لمحہ ت پر وقت ت - صہ ہوگا اور اس لیے و ف سے مرتسم شدہ زاویہ طہ = ک (ت - صہ) ہوگا۔ اس لیے

س = و ن = ا جم ک (ت - صہ) (۹۸)

یہ وہی نتیجہ ہے جو مساوات (۹۷) میں مندرج ہے ۔ ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت کا حیطہ س، وہی ہے جو دائرہ کا نصف قطر ا ہے اور تعدد ک، زاویائی رفتار کے مماثل ہے ۔ مساوات (۹۸) کو تفرق کرنے سے رفتار کے لیے فوراً حاصل ہوتا ہے

$$و = \frac{فر س}{فر ت} = -ک\ ا\ جب\ ک\ (ت - صم)$$

$$= ک \sqrt{ا^2 - س^2}$$

اِس نتیجہ کو اِس طریقہ پر بھی حاصل کیا جا سکتا ہے کہ متحرک نقطہ ف کی رفتار ک ا کو ا اَ کی سمت میں اور اِس کے علی القوائم سمت میں تحلیل کیا جائے ۔ اول الذکر صریحاً ا اَ پر ن کی رفتار ہے اور اِسکی مقدار -ک ا جب طہ یا　(۲۶۵)

$$و = -ک\ ا\ جب\ ک\ (ت - صم)$$

$$= ک \sqrt{ا^2 - س^2}$$

حسب سابق فوراً حاصل ہوتی ہے ۔

اِس حرکت میں سادہ رقاص کی حرکت کی طرح مقدار ا کو حیطہ کہتے ہیں اور وقت $\frac{۲\pi}{ک}$ کو جس کے بعد حرکت خود تکرار پاتی ہے دَور کہتے ہیں ۔

مثالیں

۱ ۔ ایک ذرہ، ۱۲ ثانیوں کے دَور کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور ۵ فٹ کا حیطہ رکھتا ہے ۔ اِس کی اعظم رفتار معلوم کرو اور یہ اعظم رفتار جس لمحہ پر واقع ہوتی ہے اِس کے ایک ثانیہ بعد ذرہ کا محل اور اِس کی رفتار معلوم کرو ۔

۲ — ایک ذرہ جو دَور ت کی سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اپنے اوسط محل سے فاصلہ ل پر رفتار و رکھتا ہے۔ اِس کا حیطہ معلوم کرو۔

۳ — ایک ذرہ ایک خط ا ب پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ اِس پر ایک قوت جاذبہ عمل کرتی ہے جو ا ب کے ایک نقطہ ف سے اِس کے فاصلے کے متناسب ہے اور اِس لیے ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کی اوسط توانائی بالحرکت اِس کی اوسط توانائی بالقوہ کے مساوی ہے۔

۴ — ایک ذرہ سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کر رہا ہے اور اس کے اوسط محل سے فاصلوں ۴ اور ۳ فٹ پر اِس کی رفتاریں علی الترتیب ۳ اور ۴ فٹ فی ثانیہ ہیں — اِس کا حیطہ اور دَور معلوم کرو۔

۵ — ایک ذرہ ایک فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے اور خود فریم بھی ایک دوسرے فریم کے لحاظ سے سادہ موسیقی حرکت رکھتا ہے اِن دو حرکتوں کی سمتیں متوازی ہیں اور اِن کے دَور ایک ہی ہیں۔ ثابت کرو کہ دوسرے فریم کے لحاظ سے متحرک نقطہ کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہے جس کی سمت اور دَور وہی ہیں جو فریم کی حرکت کے ہیں۔

۶ — طبعی طول ل اور مقیاس لہ کی ایک لچکدار ڈوری سے ایک وزن و باندھا گیا ہے اور اِس کو توازن کی حالت میں انتصاباً لٹکنے چھوڑ دیا گیا ہے۔ اب وزن کو انتصاباً نیچے مزید فاصلہ ف تک کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ وزن کو آزاد چھوڑ دینے پر وہ حیطہ ف کی سادہ موسیقی حرکت رکھیگا بشرطیکہ اِس میں ڈوری کی غیر تنی ہوئی حالت کبھی بھی وقوع پذیر نہ ہو۔ حرکت کا دَور معلوم کرو۔

تدویری رقاص

۲۱۰ — ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقاص کی حرکت صرف اُس وقت تک سادہ موسیقی حرکت رہتی ہے جب تک کہ حرکت کا

حیطہ چھوٹا رہتا ہے۔ لیکن جاذبہ کے تحت ذرہ کی حرکت کو اس طریقہ سے مقید کرنا ممکن ہے کہ اس کی حرکت سادہ موسیقی حرکت ہو دراں حالیکہ حیطہ خواہ کتنا ہی بڑا ہو۔

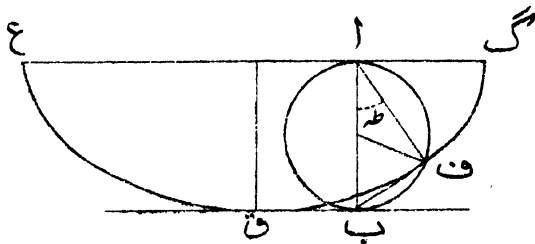
وہ منحنی معلوم کرنے کے لیے جس میں ذرہ کی حرکت کو مقید کرنا پڑتا ہے فرض کرو کہ ہم مساوات (۹۴) یعنے (۲۶۶)

$$\frac{\text{فر}^{2}\,\text{س}}{\text{فر ت}^{2}} = -\text{ج جب ط}$$

پر عود کرتے ہیں جو ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی مساوات ہے جو کسی منحنی میں حرکت کرنے پر مجبور ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو منحنی کے اُس نقطہ پر کا ماس اُفقی کے ساتھ بناتا ہے جسکا فاصلہ منحنی پر س ہے۔ یہ مساوات سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرے گی اگر اسراع $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{س}}{\text{فر ت}^{2}}$ ، -ک^{2} س کے مساوی ہو۔ اس لیے

$$\text{ج جب ط} = \text{ک}^{2}\,\text{س}$$

اور اس لیے جب ط ، س کے متناسب ہونا چاہئے۔

۲۱۱ — اِس ربط سے خط تدویر کی ایک خاصیت معلوم ہوتی ہے یعنے اُس منحنی کی جس کو ایک دائرہ کے محیط پر کا ایک نقطہ فضا میں مرتسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک خط مستقیم پر لُڑھک رہا ہو شکل (۱۳۲) میں فرض کرو کہ ایک خط تدویر ہے جو خط ع گ پر ایک دائرہ کے لڑھکنے سے بنا ہے ف کوئی نقطہ ہے۔

شکل (۱۳۲)

جب متحرک دائرہ کے محیط پر کا نقطہ ف پر ہو تو فرض کرو کہ دائرہ کا وہ نقطہ جو خط ع گ کو مس کرتا ہے ا ہے اور فرض کرو کہ ا میں سے گذرنیوالا قطر اب ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر دائرہ کے محیط پر کے نقطہ ف کی حرکت خط اف پر عمود دوار ہے (دیکھو مثال ا صفحہ ۱۳)۔ چونکہ اف ب قائمہ زاویہ ہے اس لیے یہ حرکت ب ف پر ہونی چاہئے۔ اس لیے ب ف خط تدویر کا مماس ہے۔ اگر ع گ کو افقی فرض کیا جائے تو ف پر کے مماس اور افقی کے درمیان زاویہ طہ زاویہ ف اب کے مساوی ہے، اور اس لیے ف میں سے گذرنیوالا دائرہ کا نصف قطر انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ طہ بنائے گا۔ (۲۶۷)

فرض کرو کہ دائرہ ع گ پر لڑھکتا ہے تاآنکہ ف پر خط تدویر کا مماس افقی کے ساتھ زاویہ طہ + فرطہ بنائے۔ اب ف پر کے نصف قطر کو انتصابی کے ساتھ زاویہ ۲ (طہ + فرطہ) بنانا چاہئے اور اس لیے دائرہ زاویہ ۲ فرطہ میں سے گردش کر چکا ہوگا۔ اب چونکہ ف کی حرکت کو ا کے گرد گردش کی حرکت سمجھا جا سکتا ہے اس لئے راستہ کا وہ چھوٹا عنصر فرس جو ف سے مرتسم ہوتا ہے

$$\text{فرس} = \text{اف} \times ۲\,\text{فرطہ}$$

سے حاصل ہوگا۔

اب اف = اب جم طہ = د جم طہ جہاں د، دائرہ کا قطر ہے۔ اس طرح

$$\text{فرس} = ۲\,\text{د}\,\text{جم طہ فرطہ}$$

اور تکمل کرنے پر

$$\text{س} = ۲\,\text{د}\,\text{جب طہ}$$

تکمل کے مستقل کی ضرورت نہیں ہے اگر ہم س کو اس نقطہ سے پیمائش کریں جس پر طہ = ۰۔ یعنی خط تدویر کا زیر ترین نقطہ۔

خط تدویر کی خاصیت ثابت ہو چکی اور ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۹۹) ایک نقطہ کی کل حرکت میں درست رہتی ہے جبکہ یہ نقطہ ایک خط تدویر

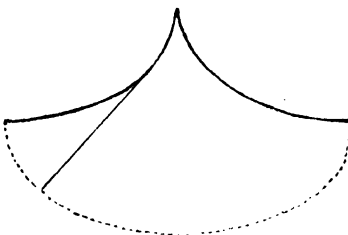
مرتسم کرتا ہے جس کی تکوین قطر د کے ایک دائرہ کے لڑھکنے سے ہوتی ہے جہاں

$$۲ د = \frac{ج}{ک^۲}$$

۲۱۲ — اگر خط تدویر دیا گیا ہو تو سادہ موسیقی حرکت کا تعدد ک، $\sqrt{\frac{ج}{۲ د}}$ کے مساوی ہوگا اور دَور $\frac{۲ \pi}{ک}$ ہے یعنی

$$۲ \pi \sqrt{\frac{۲ د}{ج}}$$

اِس لیے حرکت کا دَور وہی ہے جو طول ۲ د کے سادہ رقاص کا ہوتا ہے

۲۱۳ — تدویری حرکت کی اہمیت حسب ذیل ہے۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک سادہ رقاص کی حرکت صرف اُس وقت سادہ موسیقی حرکت ہوتی ہے (۲۶۸) جبکہ حیطہ اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو صغیر سمجھا جا سکے۔ محدود حیطوں کے لئے حرکت سادہ موسیقی نہیں ہوتی اور اِس لیے دَور اُس سادہ موسیقی حرکت کے دَور سے مختلف ہوتا ہے جو حیطہ کے بہت چھوٹا ہونے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس دَور حیطہ پر منحصر ہوتا ہے، چنانچہ کوئی گھڑی جو صحیح ثانیوں کا ضربوں کے ذریعہ اظہار کرتی ہے جبکہ رقاص ایک زاویہ میں سے جھولے تیز یا سست ہوگی جبکہ رقاص کسی مختلف زاوئے میں سے جھولنے لگے۔ حیطہ کے تغیرات کسی رقاص کی حرکت کی اثنا میں ہمیشہ وقوع پذیر ہونے چاہئیں اور اُنکی وجہ سے گھڑی کی وقت نمائی میں بے قاعدگیاں پیدا ہوتی ہیں۔

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر ایک ذرہ ایک خط تدویر مرتسم کرے تو دَور حیطہ پر منحصر نہیں ہوتا اور اِس لیے حیطہ کے تغیرات کسی ایسے ذرہ کی وقت نمائی کو متاثر نہیں کرسکتے۔

شکل (۱۳۳)

ذرہ کو ایک خط تدویر میں حرکت کرنے کے لیے مقید کرنے کا سادہ ترین طریقہ عملاً یہ ہے کہ اس کو ایک ثابت نقطہ سے ایک ڈوری کے ذریعہ اس طریقہ پر لٹکایا جاتا ہے کہ ذرہ کی حرکت میں ڈوری دو انتصابی رُخوں پر خود لپٹتی اور کھلتی جاتی ہے۔ اگر اِن رُخوں کے منحنی کو ٹھیک طور پر منتخب کیا جائے تو ذرہ ایک خط تدویر مرتسم کرے گا اور یہ آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اِن رخوں کے منحنی دو تدویروں کے حصے ہونے چاہئیں جن میں سے ہر ایک اُس تدویر کے مساوی ہو جس کو ذرہ مرتسم کرتا ہے۔

مثالیں

۱۔ تدویری حرکت میں ثابت کرو کہ ذرہ کی رفتار کا انتصابی جزو ترکیبی بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ وہ اپنے انتصابی اُتار کا نصف طے کر چکے۔

۲۔ ایک ذرہ جاذبہ کے تحت ایک خط تدویر میں اہتزاز کرتا ہے، حرکت کا محیطہ ب اور دَور نہ ہے۔ ثابت کرو کہ سکون کے محل سے پیمائش شدہ وقت ت پر اِس کی رفتار $\frac{۲ \pi ب}{نہ}$ جب $\frac{۲ \pi ت}{نہ}$ ہوگی۔

۳۔ کمیت ک کا ایک ذرہ ایک چکنے خط تدویر پر اِس کے قرن سے پھسلنا شروع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر دباؤ ۲ ک ج جم پہ ہے جہاں پہ، ذرہ کی حرکت کی سمت کا میلان اُفق کے ساتھ ہے۔

قوت کے ایک مرکز کے گرد ذرہ کی حرکت

فاصلہ کے متناسب قوت

(۲۶۹)

۲۱۴۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ صرف ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی سمت ایک ثابت نقطہ و کی جانب ہے اور جو و سے اِس کے فاصلے کے متناسب ہے حرکت کرتا ہے اور کوئی دوسری قوتیں ذرہ پر عمل نہیں کرتیں۔

و کو مبداء لو اور فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ذرہ کے محل ف کے محدد لا، ما، ی ہیں ۔ فرض کرو کہ ذرہ پر عمل کرنے والی قوت مہ × و ف ہے جس کی سمت ف و ہے اور مہ ایک مستقل ہے ۔ اِس قوت کے اجزائے ترکیبی محددوں کے محوروں کے متوازی

$$- \text{مہ لا}،\ - \text{مہ ما}،\ - \text{مہ ی}$$

ہیں اور اسراع کے اجزائے ترکیبی حسب دفعہ ۱۷۱

$$\frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر ت}^2}،\ \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر ت}^2}،\ \frac{\text{فر}^2 \text{ی}}{\text{فر ت}^2}$$

ہیں ۔

پس ذرہ کی حرکت کی مساواتیں حسب ذیل ہوتی ہیں:

$$\text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فر ت}^2} = - \text{مہ لا} \qquad (100)$$

$$\text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر ت}^2} = - \text{مہ ما} \qquad (101)$$

$$\text{ک} \frac{\text{فر}^2 \text{ی}}{\text{فر ت}^2} = - \text{مہ ی} \qquad (102)$$

یہ تین مساواتیں ایک ہی نمونے کی ہیں یعنے اُس نمونے کی جو سادہ موسیقی حرکت کو تعبیر کرتا ہے ۔ اِس لیے اُس عمود کا پائین جو متحرک ذرہ سے محددوں کے محوروں میں سے کسی ایک پر کھینچا گیا ہو سادہ موسیقی حرکت کے ساتھ حرکت کرتا ہے ۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ مساوات (۱۰۰) کا حل

$$\text{لا} = \text{ا جم ف (ت - صہ)}$$

ہے جہاں $\text{ف}^2 = \frac{\text{مہ}}{\text{ک}}$ ۔ اس کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{لا} = \text{ا جم ف صہ جم ف ت} + \text{ا جب ف صہ جب ف ت}$$

یا

$$\text{لا} = \text{ج جم ف ت} + \text{د جب ف ت}$$

(۲۷۰) جہاں ج اور د نئے مستقل ہیں جو اجم ف صہ اور اجیب ف صہ کی جگہ رکھے گئے ہیں۔ دوسری دو مساواتوں کے حل اسی کے مشابہ ہیں اور اس لیے مکمل حل حسب ذیل ہے:

لا = ج جم ف ت + د جب ف ت (۱۰۳)

ما = جَ جم ف ت + دَ جب ف ت (۱۰۴)

ی = جً جم ف ت + دً جب ف ت (۱۰۵)

ہم ہمیشہ مساواتوں

ج + ر جَ + س جً = ۰ (۱۰۶)

د + ر دَ + س دً = ۰ (۱۰۷)

کو حل کر سکتے ہیں اور ر اور س کی ایسی قیمتیں حاصل کر سکتے ہیں جو ان مساواتوں کو پورا کرتی ہیں۔ فرض کرو کہ ہم مساواتوں (۱۰۴) اور (۱۰۵) کو ر اور س کی ان قیمتوں سے ضرب دیتے ہیں اور متناظر طرفوں کو مساوات (۱۰۳) کی متناظر طرفوں میں جمع کرتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

(لا + ر ما + س ی) = (ج + ر جَ + س جً) جم ف ت
+ (د + ر دَ + س دً) جب ف ت = ۰

(۱۰۸)

کیونکہ مساواتیں (۱۰۶) اور (۱۰۷) پوری ہوتی ہیں۔ مساوات (۱۰۸) کے یہ معنے ہیں کہ ت کی تمام قیمتوں کے لیے ربط لا + ر ما + س ی = ۰ درست ہے اور اس لیے ذرہ کی پوری حرکت میں وہ اس مستوی میں رہتا ہے جس کی یہ مساوات ہے۔

محددوں کے محور اختیاری طور پر منتخب ہوئے ہیں۔ ہم ہمیشہ ان محوروں کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ مستوی جس میں پوری حرکت وقوع پذیر ہوتی ہے لا ما کا مستوی ہو۔ تب حرکت حسب ذیل دو مساواتوں سے معلوم ہوگی:

لا = ج جم ف ت + د جب ف ت ،

$$\text{ما} = \text{جَ جم ف ت} + \text{دَ جب ف ت}$$

اِن مساواتوں کو جب ف ت اور جم ف ت کے لیے حل کرنے سے

$$\text{جب ف ت} = \frac{\text{جَ لا} - \text{ج ما}}{\text{جَ د} - \text{ج دَ}}$$

$$\text{جم ف ت} = \frac{\text{دَ لا} - \text{د ما}}{\text{جَ د} - \text{ج دَ}}$$

اس لئے مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$(\text{جَ لا} - \text{ج ما})^2 + (\text{دَ لا} - \text{د ما})^2 = (\text{جَ د} - \text{ج دَ})^2 \qquad (۲۷۱)$$

یہ قطع ناقص کی مساوات ہے۔

اِس لئے وہ عام ترین حرکت جو ذرہ کے لیے ممکن ہے ایک ہی قطع ناقص کو بار بار مرتسم کرنے پر مشتمل ہوتی ہے۔ اِس حرکت کا دور $\frac{۲\pi}{\text{ف}}$ ہے اور یہ وہ وقت ہے جو جم ف ت اور جب ف ت کو اپنی قیمتیں دُہرانے کے لیے مطلوب ہوتا ہے۔

۲۱۵ — محاور لا، ما ابتک غیر متعین ہیں۔ فرض کرو کہ ہم اُنہیں قطع ناقص کے صدر محاور خیال کرتے ہیں۔

اب اگر ہم فرض کریں کہ وقت کی پیمائش اُس لمحہ سے کی گئی ہے جس پر ذرہ محور اعظم کے سروں میں سے ایک پر تھا تو ہمیں شکل ذیل کی مساواتیں حاصل ہوں گی:-

$$\text{لا} = \text{ا جم ف ت}،$$

$$\text{ما} = \text{ب جب ف ت}$$

اس طرح ذرہ جس قطع ناقص کو مرتسم کرتا ہے اِس کا خارج المرکز زاویہ ف ت ہے اور اس لیے یہ زاویہ یکساں زاویٔی رفتار ف یا $\sqrt{\frac{\text{مـ}}{\text{ل}}}$ کے ساتھ بڑھتا ہے۔ حرکت تکرار پاتی ہے جب، ف، ۲π تک بڑھ جاتا ہے

اِس لئے تعدد ف یا $\sqrt{\frac{ک}{مہ}}$ ہے اور دَور $2\pi\sqrt{\frac{مہ}{ک}}$ ہے۔

۲۱۶ ۔ اِس حرکت کی مثال اُس رقاص کی حرکت سے ملسکتی ہے جو ایک انتصابی مستوی میں حرکت کرنے پر مجبور نہ ہو لیکن انتصابی سے اِس کے انحراف چھوٹے ہوں۔

فرض کرو کہ رقاص کا طول ل ہے اور فرض کرو کہ اس کا لنگر اپنے توازن کے محل و سے قریب کے محل ف تک ہٹا ہے اتنا کہ زاویہ ف ج و کو چھوٹا سمجھا جاسکتا ہے۔

اِس زاویہ کو ط سے تعبیر کرو تو لنگر کے وزن کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے، (۱) ک ج جم ط سمت ج ف میں

(۲) ک ج جب ط سمت ف و میں ۔ (۱) کی تعدیل ڈوری کے تناؤ سے ٹھیک طور پر ہو جاتی ہے۔ پس

شکل (۱۳۴)

(۲) میں اگر ط چھوٹا ہے تو جب ط کو ط کے مساوی اور اِس لیے $\frac{وف}{ل}$ کے مساوی رکھا جاسکتا ہے۔ اِس لیے لنگر پر ایک قوت $\frac{ک ج}{ل}$ وف سمت و ف میں عمل کرتی ہوئی فرض کی جاسکتی ہے۔ اِس لیے حرکت اُس قسم کی ہے جس کو اوپر بیان کیا گیا ہے، مہ کی قیمت $\frac{ک ج}{ل}$ ہے اور اِس لئے ف کی قیمت $\sqrt{\frac{ج}{ل}}$ ہے۔ اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر کسی لٹکے ہوئے وزن کو اس کے توازن کے محل سے ہٹا کر کسی طریقہ پر پھینکا جائے تو وہ ہمیشہ اُس افقی مستوی میں ایک قطع ناقص مرتسم کرے گا جس میں وہ حرکت کرنے میں آزاد ہے اور وہ نقطہ اِس (۲۷۲)

قطع ناقص کا مرکز ہوگا جو اُس نقطہ کے عین نیچے ہے جس سے وزن لٹکایا گیا ہے۔
انگلستان کے دیہاتی میلوں میں بعض اوقات ایک ایسا انتظام دیکھا جا سکتا ہے جس میں تماشہ گر بڑی ہوشیاری سے اِس نتیجہ سے فائدہ اٹھاتا ہے۔ ایک وزن ایک ڈوری سے لٹکا ہوا ہوتا ہے اور فرش پر ٹھیک اُس نقطہ کے نیچے جس سے وزن لٹکا ہوا ہے ایک اسکیٹل (لکڑی کی چھوٹی مینج) رکھی ہوتی ہے تماشہ گر تماش بینوں سے کہتا ہے: آؤ، داخلہ کی فیس دیکر اندر آؤ اور انعام کیلئے ایک مقابلہ میں شریک ہو جو اُس شخص کو دیا جائے گا جو وزن کو اِس طریقہ سے پھینکے کہ وہ واپس ہوتے ہوئے اسکیٹل سے ٹکرائے۔ بلاشبہ یہ مسئلہ اتنا ہی ناممکن ہے جتنا ایک ایسے قطع ناقص کو بنانے کا ہے جو خود اپنے مرکز میں سے گذرتا ہو۔

۲۱۷ — ایک اور طریقہ جس کے ذریعہ متذکرۂ بالا حرکت کی مثال مِل سکتی ہے حسب ذیل ہے: طبعی طول ل کی ایک لچکدار ڈوری کے ایک سرے سے ایک چھوٹا ذرہ بندھا ہوتا ہے اور یہ ذرہ ایک چکنی افقی میز پر حرکت کرنے میں آزاد رہتا ہے۔ ڈوری کا دوسرا سِرا میز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گذرتا ہے اور ایک ثابت نقطے سے جس کا فاصلہ سوراخ سے ل ہے بندھا ہوتا ہے۔ اگر ذرہ کو سوراخ سے فاصلہ ر تک کھینچا جائے تو ڈوری کا کُل طول ل + ر ہوگا اور اس لیے اِس کا تناؤ $\frac{ر}{ل}$ لہ ہوگا جہاں لہ لچک کا مقیاس ہے۔ اِس لیے ذرہ پر عمل کرنے والی قوت یعنی ڈوری کا تناؤ اُس فاصلے کے متناسب ہے جو ذرہ کا ایک ثابت نقطہ یعنی سوراخ سے ہے اور اِس قوت کی سمت سوراخ کی جانب ہے۔ اِس کو چھوڑ دینے پر ذرہ میز پر ایک قطع ناقص میں حرکت کرے گا۔

مثالیں

۱۔ نقطہ ف ایک قطع ناقص کو ایک تجاذبی قوت کے تحت جس کی

سمت مرکز کی جانب ہے مرتسم کر رہا ہے اور امدادی دائرہ پر متناظر نقطہ ف ہے۔ ثابت کرو کہ ف اس امدادی دائرہ کے گرد یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔

۲۔ ایک ذرہ قوت کے ایک مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے، کشش راست فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص کے مرکز سے ذرہ تک جو سمتی نصف قطر کھینچا جائے وہ مساوی اوقات میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے۔

۳۔ ایک ذرہ ایک قوت کے تحت جو فاصلے کے متناسب ہے ایک قطع ناقص مرتسم کر رہا ہے، اس پر ناقص کے محور اعظم کی متوازی سمت میں ایک دھکہ پڑتا ہے۔ ثابت کرو کہ نئے مدار کا محور اصغر وہی ہے جو پرانے مدار کا تھا اور بتاؤ کہ محور اعظم میں پیدا شدہ تبدیلی کس طرح معلوم کی جا سکتی ہے۔

۴۔ ایک ذرہ قوت کے متعدد مرکزوں کی کششوں کے زیر عمل ہے جن میں سے ہر کشش فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے۔ (۲۷۳)

اس حرکت کی تمثیل کے لیے میکانیکی نمونہ کس طرح بنایا جا سکتا ہے۔

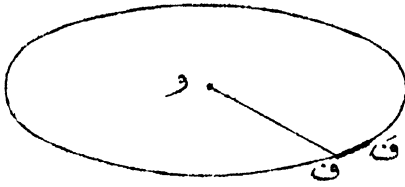
۵۔ ایک ذرہ ایک دفاعی قوت کے زیر عمل ہے جو قوت کے مرکز سے اس کے فاصلے کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ ایک قطع زائد مرتسم کرتا ہے۔

۶۔ مثال ماسبق میں ثابت کرو کہ ذرہ اور قوت کے مرکز کو ملانے والا سمتی نیم قطر مساوی اوقات میں مساوی رقبے مرتسم کرتا ہے۔

قوت کے ایک مرکز کے گرد حرکت کا عام نظریہ

۲۱۸ — فرض کرو کہ ایک ذرہ ہے جس پر صرف ایک قوت عمل کرتی ہے جس کی سمت قوت کے ایک ثابت مرکز کی جانب ہے اور اس قوت کی مقدار اس فاصلہ کا کوئی تفاعل ہے جو ذرہ کا ثابت مرکز سے ہے۔

فرض کرو کہ قوت کا مرکز و ہے اور کسی لمحہ پر ذرہ کا محل ف ہے

اور اس لمحہ پر ذرہ کی رفتار کی سمت ف فَ ہے۔ اب مستوی و ف فَ میں ذرہ کی رفتار اور نیز اس کا اسراع واقع ہیں، رفتار ف فَ پر اور اور اسراع ف و پر ہے۔ پس کسی چھوٹے وقفہ کے بعد ذرہ کی رفتار پھر بھی مستوی و ف فَ میں ہوگی۔ نیز ذرہ بھی اسی مستوی میں ہوگا (فرض کرو نقطہ فَ پر) اور اس لیے اسراع بھی جو فَ و پر ہے اسی مستوی میں ہوگا۔ اسی طرح ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ ایک اور چھوٹے وقفہ کے بعد ذرہ کا محل، رفتار، اور اسراع سب کے سب مستوی و ف فَ میں ہوں گے اور علیٰ ہذا اس عمل کو جہاں تک چاہیں جاری رکھا جاسکتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ذرہ مستوی و ف فَ کو کبھی بھی نہیں چھوڑے گا اور اس لئے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

شکل (۱۳۵)

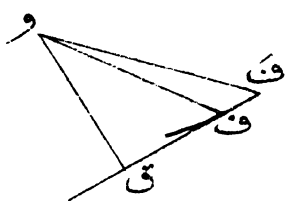
وہ مدار جس کو ایک ذرہ قوت کے ایک ثابت مرکز کے گرد مرتسم کرتا ہے کُلاً ایک مستوی میں واقع ہوتا ہے۔

دفعہ ۱۱۴ میں اس مسئلہ کی ایک تمثیل دیجا چکی ہے، یہ تمثیل اُس مدار سے متعلق ہے جس کو ذرہ ایسی کشش کے تحت مرتسم کرتا ہے جو مرکز سے فاصلہ کے متناسب ہے

رفتار کا معیار

(۲۷۴)

۲۱۹ — کسی نقطہ کی رفتار ایک سمتی ہے اور اس سمتی کے خط عمل کو وہ خط سمجھا جاسکتا ہے جو متحرک نقطہ میں سے اس کی رفتار کی سمت میں کھینچا گیا ہو۔ ہم رفتار کے معیار کی عین اسی طریقہ پر تعریف کرسکتے ہیں جس طریقہ پر قوت کے معیار کی تعریف کی جاچکی ہے۔ مزید برآں قوت کے

معیاروں کے تمام خواص اِس واقعہ سے مستنبط کیے گئے تھے کہ قوتوں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے اور اِس لیے وہی خواص رفتاروں کے معیاروں کے لیے بھی درست ہوں گے کیونکہ رفتاروں کو بھی قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ف ایک ذرہ ہے جو و کے گرد ایک مدار مرتسم کر رہا ہے اور فرض کرو کہ و سے اس خط پر جو ف میں سے گذرتا ہے اور ذرہ کی رفتار کی سمت میں کھینچا گیا ہے عمود و ق نکالا گیا ہے۔ پس ذرہ کی رفتار کا معیار و کے گرد و ق × (ذرہ کی رفتار) ہے۔

شکل (۱۳۶)

فرض کرو کہ وقت کے چھوٹے وقفہ فرث کے بعد ذرہ فَ پر ہے۔ فَ پر اس کی رفتار، ف پر اس کی رفتار اور ف پر اس کے اسراع کے فرث گنا سے مرکب ہے۔ اِس لیے

(فَ پر رفتار کا معیار و کے گرد)

= (ف پر رفتار کا معیار و کے گرد)

+ [(فرث × ف کا اسراع) کا معیار و کے گرد]

ف پر اسراع کی سمت ف و ہے اور اِس لیے اِس مساوات کی آخری رقم صفر ہے اور اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ف اور فَ پر کی رفتار کے معیار و کے گرد مساوی ہیں۔

ہم اِس کی توسیع پچھلے مسئلہ کی طرح نقطہ بہ نقطہ کر سکتے ہیں اور بالآخر حسب ذیل مسئلہ پر پہنچتے ہیں:

اگر ایک ذرہ، و کے گرد ایک مدار مرتسم کر رہا ہو تو ذرہ کی

رفتار کا معیار و کے گرد مستقل ہوتا ہے۔

۲۲۰ — ہم نے فرض کیا ہے کہ ذرہ ف سے فَ تک وقت فرت میں حرکت کرتا ہے اور اس لیے ف پر اس کی رفتار و ہو تو ف فَ = و فرت۔ جب ذرہ اپنا مدار مرتسم کرتا ہے تو اس اثناء میں خط و ف مدار کے مستوی میں ایک رقبہ مرتسم کرتا ہے۔ وقت فرت میں مرتسم شدہ رقبہ چھوٹے مثلث و ف فَ کا رقبہ ہے۔ چنانچہ (۲۷۵)

وقت فرت میں مرتسم شدہ رقبہ

= رقبہ و ف فَ

$= \frac{1}{2}$ و ق × ف فَ

$= \frac{1}{2}$ و ق × و فرت

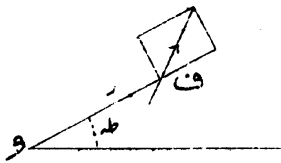
$= \frac{1}{2}$ فرت × رفتار کا معیار و کے گرد

پس فی اکائی وقت مرتسم شدہ رقبہ، و کے گرد رفتار کے معیار کا نصف ہے اور پچھلے دفعہ کی رو سے یہ مستقل ہے۔ اس لیے حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے:

مساوی رقبے مساوی وقتوں میں مرتسم ہوتے ہیں۔

مدار کی تفرقی مساوات

۲۲۱ — اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ اور توانائی کے بقاء کے مسئلہ کو ایک ساتھ لینے سے ہم اس مدار کی مساوات معلوم کر سکتے ہیں جس میں ذرہ حرکت کرتا ہے۔ اس مساوات کو سب سے زیادہ سہولت کے ساتھ قطبی محددوں میں بیان کیا جا سکتا ہے جبکہ قوت کے

ف
طہ
و

شکل (۱۳۷)

مرکز کو مبدا، فرض کیا گیا ہو۔

اگر ذرہ کے محدد ر، طہ ہوں تو رفتار کو دو رفتاروں کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) رفتار $\frac{فرر}{فرت}$ سمت و ف میں، (۲) رفتار ر $\frac{فرطہ}{فرت}$ سمت و ف کے علی القوائم۔

اس لیے رفتار

$$و^۲ = \left(\frac{فرر}{فرت}\right)^۲ + ر^۲\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)^۲$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

و کے گرد رفتار کا معیار دوسرے جزو ترکیبی کے معیار کے مساوی ہے کیونکہ پہلے جزو ترکیبی کا معیار معدوم ہوتا ہے۔ اس لئے و کے گرد رفتار کا معیار ر × ر $\frac{فرطہ}{فرت}$ ہے اور چونکہ اس کی قیمت مستقل ہے (فرض کرو ھ) اس لیے حاصل ہوتا ہے:

$$ر^۲ \frac{فرطہ}{فرت} = ھ \qquad (۱۰۹)$$

(۲۷۶) اگر ذرہ کی کمیت ک ہو اور اگر فی اکائی کمیت کشش ف (ر) ہو جبکہ ذرہ و سے فاصلہ ر پر ہے تو ذرہ کی توانائی بالقوہ

$$ک \int_{ر}^{\infty} ف\ (ر)\ فرر$$

ہے اور توانائی بالحرکت $\frac{۱}{۲}$ک $و^۲$ یا

$$\frac{۱}{۲}ک\left[\left(\frac{فرر}{فرت}\right)^۲ + ر^۲\left(\frac{فرطہ}{فرت}\right)^۲\right]$$

ہے۔ اب چونکہ مجموعی توانائی مستقل ہوتی ہے اس لیے

$$\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{ر}^2\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 + 2\int \text{ف}(\text{ر})\,\text{فرر} = \text{ع} \qquad (110)$$

جہاں ع مستقل ہے۔

مساواتوں (۱۰۹) اور (۱۱۰) سے مدار کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔چونکہ ر اور طہ دونوں ت کے تفاعل ہیں اس لیے

$$\frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$$

اور اس لیے مساوات (۱۱۰) کو شکل

$$\left[\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2 + \text{ر}^2\right]\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 + 2\int \text{ف}(\text{ر})\,\text{فرر} = \text{ع}$$

میں بیان کیا جا سکتا ہے۔اور پھر اس مساوات اور (۱۰۹) سے $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}$ کو ساقط کرنے سے مدار کی تفرقی مساوات

$$\left[\left(\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}\right)^2 + \text{ر}^2\right]\frac{\text{ھ}^2}{\text{ر}^4} + 2\int \text{ف}(\text{ر})\,\text{فرر} = \text{ع} \qquad (111)$$

حاصل ہوتی ہے۔

معکوس مربع کا قانون

۲۲۲ — اب فرض کرو کہ کشش، فاصلے کے معکوس مربع کے قانون کے تابع ہے اور اس لیے

$$\text{ف}(\text{ر}) = \frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2}$$

جہاں مہ مستقل ہے۔تب

$$\int \text{ف}(\text{ر})\,\text{فرر} = -\frac{\text{مہ}}{\text{ر}} \qquad (112)$$

(۲۷۷) اور مساوات (۱۱۱) ہو جاتی ہے

$$\frac{ھ^2}{ر^4}\left[\left(\frac{فر\,ر}{فر\,طہ}\right)^2+ر^2\right]-\frac{2\,مہ}{ر}=ع$$

اس لیے حاصل ہوتا ہے

$$فر\,طہ=\frac{ھ\;فر\,ر}{ر\sqrt{ع\,ر^2+2\,مہ\,ر-ھ^2}}$$

اور تکمل کرنے سے

$$طہ=جب^{-1}\frac{\frac{ھ}{ر}-\frac{مہ}{ھ}}{\sqrt{ع+\frac{مہ^2}{ھ^2}}}+صہ$$

جہاں صہ تکمل کا مستقل ہے۔
مختصر کرنے پر

$$\frac{ھ}{ر}-\frac{مہ}{ھ}=\sqrt{ع+\frac{مہ^2}{ھ^2}}\;جب\,(طہ-صہ) \qquad (۱۱۳)$$

اور اگر ہم مساوات

$$\frac{ل}{ر}-1=ز\;جم\;طہ$$

کے ساتھ اِس کا مقابلہ کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات (۱۱۳) ایک مخروطی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ماسکہ مبداء ہے اور وتر خاص $ل=\frac{ھ^2}{مہ}$ اور خروج المرکز $ز=\sqrt{1+\frac{ع\,ھ^2}{مہ^2}}$ ہے۔ مخروطی کے محور اعظم پر منطبق کرنے کے لیے صہ کی قیمت کو $-\frac{\pi}{2}$ کے مساوی رکھنا چاہئے۔

۲۲۳ — ہم دیکھتے ہیں کہ اگر

ع مثبت ہو تو ز > ۱ اور مدار قطع زائد ہے،
ع صفر ہو تو ز = ۱ اور مدار قطع مکافی ہے،
ع منفی ہو تو ز < ۱ اور مدار قطع ناقص ہے۔
اس لئے مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف ع کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے اور ھ کی قیمت پر منحصر نہیں ہوتی۔ یہ معلوم رہے کہ اگر وہ نقطہ معلوم ہو جس سے ذرہ پھینکا گیا ہے اور نیز پھینکتے وقت ذرہ کی رفتار بھی معلوم ہو تو ع کی قیمت متعین ہو جاتی ہے کیونکہ مساوات (۱۱۰) کی رو سے

$$ع = و^2 - \frac{2\,مہ}{ر}$$

پس مرتسم شدہ مخروطی کی قسم صرف پھینکنے کی رفتار پر منحصر ہوتی ہے اور سمت پر منحصر نہیں ہوتی۔ مخروطی ایک قطع زائد، قطع مکافی، یا قطع ناقص ہوگا بموجب اس کے کہ (۲۷۸)

$$و^2 > = یا < \frac{2\,مہ}{ر}$$

اصلی خروج المرکز، ع اور ھ دونوں پر منحصر ہوتا ہے کیونکہ اگر ز خروج المرکز ہو تو

$$ز^2 = 1 + \frac{ع\,ھ^2}{مہ^2}$$

۲۲۴ — اگر ذرہ کو ایک دائرہ مرتسم کرنا ہے تو حاصل ہونا چاہئے ز۲ = ۰ اور اس لئے

$$1 + \frac{ع\,ھ^2}{مہ^2} = 0$$

اب ع = و۲ − $\frac{2\,مہ}{ر}$ اور ھ = ف و رکھنے سے (اس لئے ف وہ عمود ہے جو قوت کے مرکز سے پھینکنے کی سمت پر کھینچا گیا ہے) مساوات بالا

$$\frac{\text{مہ}^2}{\text{ف}^2}-\frac{2\,\text{مہ}}{\text{ر}}\,\text{و}^2+\text{و}^4=0$$

$$\text{یا}\qquad\left(\text{و}^2-\frac{\text{مہ}}{\text{ر}}\right)^2+\text{مہ}^2\left(\frac{1}{\text{ف}^2}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)=0$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

چونکہ ف، ر سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے اِن دو رقموں میں سے کوئی منفی نہیں ہو سکتی۔ اس لیے اِس مساوات کے پورا ہونے کے لیے دونوں رقمیں معدوم ہونی چاہئیں اور حاصل ہونا چاہئے

$$\text{ف}=\text{ر}\quad\text{اور}\quad\text{و}^2=\frac{\text{مہ}}{\text{ر}}$$

پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ ذرہ کو پھینکنے کی سمت اُس خط کے علی القوائم ہونی چاہئے جو ذرہ کو قوت کے مرکز سے ملاتا ہے۔ دوسری مساوات جس کو شکل

$$\frac{\text{و}^2}{\text{ر}}=\frac{\text{مہ}}{\text{ر}^2}$$

میں لکھا جا سکتا ہے اِس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ تجاذبی قوت کو عین اتنا اسراع پیدا کرنا چاہئے جو نصف قطر ر کے ایک دائرہ میں حرکت کے لیے مناسب ہے۔

(۲۷۹) **۲۲۵** — ناقصی مدار کے لیے مدّت دَوران وہ ہے جو رقبہ π ا ب مرتسم کرنے کے لیے مطلوب ہوتی ہے جہاں ا، ب ناقص کے نیم محور ہیں۔ چونکہ رقبہ بشرح $\frac{1}{2}$ ھ فی اکائی وقت سے مرتسم ہوتا ہے اِس لیے مدت دَوران ت،

$$\text{ت}=\frac{\pi\,\text{ا ب}}{\frac{1}{2}\,\text{ھ}}$$

ہوگی لیکن نیم وترخاص ل $=\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$ اور نیز $=\frac{\text{ھ}^2}{\text{مہ}}$، اِس لیے

$$ب = \sqrt{ا\,ل} = ہ\sqrt{\frac{ا}{مہ}}$$

اِس لیے $$ت = \frac{2\pi\,ا\,ب}{ہ} = \frac{2\pi\,ا^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{مہ}} \qquad (114)$$

چونکہ ت، خروج المرکز پر منحصر نہیں ہے اِس لیے یہ ظاہر ہے کہ کسی مدار کی مدت دَوران وہی ہے جو اُس دائری مدار کی ہے جس کا نصف قطر نیم محور اعظم کے مساوی ہو۔

۲۲۶ ــ معکوس مربع کا قانون تجاذب کا قانون ہے، اِس لیے وہ قانون جس کی تحقیق میں ہم مصروف تھے وہ ہے جس کے تحت سورج کے گرد سیارے اپنے مداروں میں اور نیز شہاب اور دمدار ستارے حرکت کرتے ہیں۔ ان اسباب کی تشریح یہاں نہیں کی جا سکتی جن کی بنا پر سیاروں سے مُرتسم شدہ مخروطی سب کے سب چھوٹے خروج المرکز کے قطعات ناقص ہیں۔ دُمدار ستاروں کے مداروں میں زیادہ وسعت پائی جاتی ہے۔ یہ اجرام بالعموم نظام شمسی کے باہر بہت دُور سے آتے ہیں۔ تقریبی طور پر ہم سمجھ سکتے ہیں کہ وہ لاتناہی سے چلے آرہے ہیں اور اُنھوں نے نسبتاً چھوٹی رفتار سے حرکت کی ابتدا کی ہے۔ اِس صورت میں مدار تقریباً مکافی ہوتا ہے۔

کپلر کے قوانین

۲۲۷ ــ سیاروں کے مداروں کے نظریہ کے انکشاف سے بہت پہلے جس کو نیوٹن نے باقاعدہ محسوب کیا تھا کپلر نے وہ تین خاص قوانین تجربی طور پر معلوم کئے تھے جن کے تحت سیاروں کی حرکتیں جاری ہیں۔ کپلر کے یہ تین قوانین حسب ذیل ہیں:

قانون (۱) ــ ہر سیارہ ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے

جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہوتا ہے۔

(۲۸۰) قانون (۲) ۔ وہ رقبے جو سیّارہ اور سورج کو ملانے والا نصف قطر سیّارہ کے مدار میں مرتسم کرتا ہے اُن وقتوں کے متناسب ہوتے ہیں جن میں یہ رقبے مرتسم ہوتے ہیں۔

قانون (۳) ۔ اِن مختلف مداروں کے دَوری مدتوں کے مربع اِن کے محاورِ اعظم کے مکعبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

اِن میں سے پہلے قانون سے نیوٹن نے ثابت کیا کہ سیّاروں اور سورج کے درمیان قوت کا قانون معکوس مُربع کا قانون ہونا چاہیئے۔ تیسرے قانون سے اُسی واقعہ کا اظہار ہوتا ہے جس کو مساوات (۱۱۴) بیان کرتی ہے۔

دو ذرّوں کی حرکت ایک دوسرے کے گِرد

۲۲۸ ۔ اجرام کا وہ زوج جس کو دُوہرا تارہ کہتے ہیں آسمان میں عام طور پر دیکھا جا سکتا ہے۔ یہ تارہ دو ستاروں پر مشتمل ہوتا ہے جو ایک دوسرے کے گِرد مدار مرتسم کرتے ہیں اور اِن میں سے کوئی ثابت نہیں ہوتا۔

نویں باب میں ثابت شدہ مسئلوں سے اِن دو ستاروں کا مرکزِ ثقل یا تو ساکن رہنا چاہیئے یا یکساں رفتار سے ایک خطِ مستقیم میں حرکت کرنا چاہیئے اور اِس صورت میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اِس کو ثابت سمجھا جا سکتا ہے اگر تمام حرکت کو ایک ایسے حوالے کے فریم کے لحاظ سے پیمائش کیا جائے جو اِس نقطہ کے ساتھ حرکت کرے۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر اِن دو ستاروں کے محل ا، ب ہیں اور فرض کرو کہ اِن کا مرکزِ ثقل ث ہے۔ فرض کرو کہ ستاروں کی کمیتیں ک، کَ ہیں

اور فرض کرو کہ ث سے اِن کے فاصلے ا، ب ہیں۔ اب

$$\frac{ک}{ب} = \frac{کَ}{ا} = \frac{ک + کَ}{ا + ب} \qquad (۱۱۵)$$

تجاذب کا پورا قانون، قانون

$$ف = جہ \frac{ک کَ}{ر^۲}$$

میں بیان ہو جاتا ہے جہاں ک، کَ کمیتیں ہیں اور اِن کے درمیان فاصلہ ر ہے اور جہ ایک مستقل ہے جس کی قیمت تجربہ سے معلوم کی جا سکتی ہے اور اِن دو کمیتوں کے درمیان تجاذبی قوت ف ہے۔ پس ستارہ ب پر عمل کرنے والی قوت

$$ف = جہ \frac{ک کَ}{(ا + ب)^۲}$$

ہے اور اس کی سمت ب ا ہے۔ اِس قوت کے متعلق ہمیشہ یہ فرض (۲۸۱) کیا جا سکتا ہے کہ وہ ثابت نقطہ ث سے عمل کر رہی ہے کیونکہ اِس کا خطِ عمل ہمیشہ ب ث رہتا ہے۔ نیز اِس قوت کی مقدار، ستارہ ب کی فی اکائی کمیت پر

$$\frac{جہ ک}{(ا + ب)^۲}$$

ہے یا رشتوں (۱۱۵) کی مدد سے

$$\frac{جہ کَ^۳}{(ک + کَ)^۲ ب^۲}$$

ہے۔ یہ ایک قوت $\frac{مہ}{ر^۲}$ ہے جو ث کی جانب عمل کرتی ہے اگر ہم رکھیں

$$مہ = \frac{جہ کَ^۳}{(ک + کَ)^۲}$$

پس اِن دو ستاروں میں سے ہر ایک، مشترک مرکز ثقل ث کے گرد ایک مخروطی مرتسم کرتا ہے۔ اِن مخروطیوں کے مداروں کی مدت دوران ت اور محاور اعظم کی قیمتوں کا ہیئتی طور پر مشاہدہ کرنا ممکن ہے۔ اِن مقداروں سے ہم مہ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لیے

$$\frac{ک^3}{(ک + کَ)^2} \quad ، \quad \frac{کَ^3}{(ک + کَ)^2}$$

کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں اور پھر اِن سے ک، کَ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اِس طریقہ پر بعض ستاروں کی کمیتیں معلوم کرنا ممکن ہے۔

مثالیں

(تجاذبی مستقل جہ کو سنتی میتر گرام ثانیہ اکائیوں میں $۶٫۶۶ \times ۱۰^{-۹}$ کے مساوی لو)

۱۔ اگر زمین جذب کرے گویا کہ اس کی کمیت اِس کے مرکز پر مرتکز ہے اور اگر خطِ اِستواء پر جس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے $۶٫۳۷۸ \times ۱۰^{۸}$ سنتی میتر ہے ج کی قیمت ۹۷۸٫۱ سنتی میتر فی ثانیہ فی ثانیہ ہو تو زمین کی کمیت معلوم کرو۔

۲۔ زمین اور چاند کی کمیتوں کو علی الترتیب $۶٫۱۴ \times ۱۰^{۲۷}$ اور $۷٫۹۴ \times ۱۰^{۲۵}$ گرام لیکر اور اِن کے درمیان فاصلہ $۳٫۸۴ \times ۱۰^{۱۰}$ تسلیم کرکے چاند کی مدت دَوران معلوم کرو۔

۳۔ سورج کی کمیت کو ۲×۱۰^{۳۳} گرام اور سال کو ۳۶۵٫۴ یوم لیکر زمین کے مدار کا نیم محور اعظم معلوم کرو جبکہ سورج کو قوت کا ثابت مرکز سمجھا گیا ہو۔

۴۔ اگر سورج کی کمیت زمین کی کمیت کا ۳۲۴۰۰۰ گنا ہو تو معلوم کرو کہ سوال (۳) کے نتیجہ کو کس قدر تبدیل کرنا چاہیئے جبکہ سورج کی حرکت کا بھی لحاظ رکھا جائے۔

(۲۸۲) ۵۔ مشتری کی کمیت کو سورج کی کمیت کا $\frac{1}{1080}$ اور سورج سے اِس کے بڑے سے بڑے فاصلہ کو ۴۹۸۵۰۰۰۰ میل لیکر ثابت کرو کہ مشتری کی کشش کی

وجہ سے سورج ایک قطع ناقص مرتسم کرے گا جس کا نیم محور اعظم تقریباً ۴۶۱۰۰ میل کے مساوی ہوگا۔ نیز مشتری کے سال کا طول معلوم کرو۔

۶۔ وہ اعظم رفتار جو زمین اپنے مدار میں حاصل کرتی ہے ۳۰۰۰۰۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے اور اس کی اقل رفتار ۲۹۲۰۰۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے۔ زمین کے مدار کا خروج المرکز معلوم کرو۔

عام مثالیں

۱۔ ایک ذرہ جس کو ڈوری کے ذریعہ ایک نقطہ سے باندھا گیا ہے ایک انتصابی دائرے میں مکمل گردشیں کرنے کے لیے عین توانائی رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ڈوری کا تناؤ صفر ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے بلند ترین نقطہ پر ہوگا لیکن ذرہ کے وزن کا چھ گنا ہوگا جبکہ ذرہ اپنے راستے کے زیر ترین نقطہ پر ہوگا۔

۲۔ ایک ذرہ ایک چکنی دائری قوس کے محدب رُخ پر نیچے پھسلتے ہوئے جاذبہ کے تحت ایک انتصابی دائرہ میں حرکت کرتا ہے۔ اگر اس کی رفتار وہ ہو جو مرکز کے اوپر ارتفاع ف کی وجہ سے ہو سکتی ہے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ سے اُڑ کر نکل جائے گا جبکہ اُس کا ارتفاع مرکز کے اوپر $\frac{۲}{۳}$ ف ہو جائے۔

۳۔ اگر زاویہ عہ جس میں سے ایک سادہ رقاص انتصابی کی ہر ایک جانب جھولتا ہے چھوٹا ہو مگر صغیر نہ ہو تو ثابت کرو کہ پہلے تقرب تک اہتزاز کا وقت

$$۲\text{ط}\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}\left(۱+\frac{۱}{۱۶}\text{عہ}^{۲}\right)$$

ہے۔ اس سے اخذ کرو کہ وہ رقاص جو ثانیوں کو صحیح طور پر ضربوں سے ظاہر کرتا ہے جبکہ وہ صغیر اہتزاز کر رہا ہو تقریباً ۴۰ ثانیہ فی یوم سست ہو جائے گا اگر اس کو ایک گھڑی میں لگا دیا جائے جو اس کو انتصابی کی ہر ایک جانب °۵ اہتزاز کرنے پر مجبور کرے۔

۴۔ ایک ٹرین ایک منحنی کے گرد ۶۰ میل فی گھنٹہ کی ایکساں رفتار سے

حرکت کررہی ہے، اور اس کے ایک ڈبے میں ثانیوں کا ایک رقاص دو دقیقوں میں ۱۲۱ دفعہ ضربوں کا اظہار کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ منحنی کا نصف قطر تقریباً ایک چوتھائی میل ہے ۔

۵ ۔ ایک لچکدار ڈوری کا طبعی طول ا اور لچک کا مقیاس لہ ہے ۔ اس کے ایک سرے کو چکنے افقی میز کے ایک ثابت نقطہ سے باندھا گیا ہے اور اس کا دوسرا سرا کمیت ک کے ایک ذرہ سے بندھا ہے جو میز پر ساکن پڑا ہے۔ اگر ڈوری کے دوسرے سرے سے اس کمیت کو فاصلہ ۲ ا تک کھینچکر چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ ذرہ اپنے ابتدائی محل پر باقاعدہ وقفوں $۲(\pi+۲)\sqrt{\frac{\text{ا ک}}{\text{لہ}}}$ کے بعد واپس ہوتا جائے گا ۔

۶ ۔ دو گولے جن کے وزن $و_1$ اور $و_2$ ہیں ایک تاگے سے جس کا طول ا ہے مربوط ہیں۔ $و_1$ کو ہاتھ میں پکڑ کر $و_2$ کو گول گھمایا گیا ہے ۔ اگر $و_1$ کو اس وقت چھوڑ دیا جائے جبکہ $و_2$ ارتفاع ع پر رفتار ط سے حرکت کر رہا ہو تو ظہور پذیر حرکت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ہوا میں تاگے کا تناؤ (۲۸۴)

$$\frac{و_1\, و_2}{و_1+و_2}\;\frac{ط^2}{\text{ج ا}}\;\text{پونڈ}$$

ہے ۔

۷ ۔ دو کمیتیں $ک_1$ اور $ک_2$ ایک بے وزن کمانی سے مربوط ہیں جس کی طاقت ایسی ہے کہ جب $ک_1$ کو مضبوط پکڑا جاتا ہے تو $ک_2$ ن ارتعاش فی ثانیہ کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اگر $ک_2$ کو مضبوط پکڑ لیا جائے تو $ک_1$ $ن\sqrt{ک_2/ک_1}$ ارتعاش فی ثانیہ کرے گا اور جب دونوں کمیتیں آزاد ہوں تو وہ $ن\sqrt{\frac{ک_1+ک_2}{ک_1}}$ ارتعاش فی ثانیہ کرینگی ۔ ہر صورت میں ارتعاش کمانی کے خط میں واقع ہوتے ہیں۔

۸ ۔ کمیت ک کا ایک ذرہ کسی شکل کی ایک چکنی منحنی نلی میں حرکت کرکے دو لچکدار ڈوریوں کے تناؤں کے تحت جو نلی میں ہیں توازن میں ہے، ان ڈوریوں کے

طبعی طول ل، لَ اور لچک کے مقیاس لہ، لہَ ہیں) اور ان کے دوسرے سرے نلی کے ثابت نقطوں سے بند ہے ہوے ہیں۔ اگر ذرہ نلی میں اہتزاز کرے چھوٹے یا بڑے تو ثابت کرو کہ اہتزاز کی مدت

ہے۔

۹۔ ایک ڈوری ایک چکنے افقی میز کے ایک چھوٹے سوراخ میں سے گذرتی ہے اور اس کے سروں سے مساوی ذرے بندھے ہوے ہیں جن میں سے ایک انتصاباً لٹک رہا ہے اور دوسرا میز پر سوراخ سے فاصلہ ا پر پڑا ہے۔ اس دوسرے ذرہ کو ڈوری کے عمود وار رفتار $\sqrt{ج ا}$ کے ساتھ اچھالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ لٹکتا ہوا ذرہ ساکن رہے گا اور یہ کہ اگر اس حالت سکون میں خفیف طور پر خلل پڑے تو چھوٹے اہتزاز کی مدت $۲\pi\sqrt{\frac{۲ ا}{۳ ج}}$ ہوگی۔

۱۰۔ ایک ذرہ نصف قطر ا کی ایک دائری نالی میں ایک کشش $\frac{م}{ر^۲}$ کے تحت جو نقطہ ف کی جانب ہے حرکت کرتا ہے، نقطہ ف دائرہ کے مستوی میں ہے اور اس کے مرکز سے فاصلہ ب پر ہے۔ ذرہ کو رفتار و کے ساتھ دائرہ کے اس نقطہ سے پھینکا گیا ہے جو ف سے قریب ترین ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ مکمل گردشیں کرے گا اگر $و^۲$، $\frac{۴ م ب}{ا^۲ - ب^۲}$ سے کم نہ ہو۔

۱۱۔ ایک چکنے قطع ناقص کے نیم محور ا اور ب ہیں، اس کو اس طور پر رکھا گیا ہے کہ اس کا محور اعظم انتصابی ہے۔ ایک ذرہ کو ناقص کی قوس کے مقعر رخ پر ایسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو مرکز کے اوپر ارتفاع ف کی باعث پیدا ہو سکتی ہے۔ وہ نقطہ معلوم کرو جس پر ذرہ قوس کو چھوڑ دے گا اور نیز ثابت کرو کہ وہ ناقص کے مرکز میں سے گذرے گا اگر

$$\text{ف} = \frac{\text{٨ ا}^{٢} + \text{ب}^{٢}}{\text{٢ ا}\sqrt{\text{٣}}}$$

(٢٨٤)

١٢ــــ ایک ذرہ نصف قطر ا کے ایک دائرہ میں کشش مہ ر فی اکائی کمیت کے تحت حرکت کرنے کے لیے مقید ہے، کشش دائرہ کے اندر ایک نقطہ کی جانب ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ف ہے۔ اگر ذرہ کو اِس نقطہ سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر رکھکر صغیر رفتار سے متحرک کیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ دائرہ کے دوسرے رُبع پر سے وقت

$$\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{مہ ف}}}\ \text{لوک}\left(\sqrt{\text{٢}} + \text{١}\right)$$

میں گذر جائے گا۔

١٣ــــ ایک ذرہ ایک ناقص کو قوت کے ایک مرکز کے گرد جو ماسکہ پر ہے مُرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ محور اصغر کے سرے پر کی رفتار کسی قطر کے سروں پر کی رفتاروں کے درمیان وسط تناسب ہے۔

١٤ــــ ایک دُمدار تارہ ایک قطع مکافی کو مرتسم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اِسکی رفتار جو اِس کے مدار کے محور پر عمود ہے سورج سے سمتی نیم قطر کے بالعکس متناسب ہے۔

١٥ــــ کمیت ک کا ایک دُمدار تارہ جو سوُرج کے گرد ایک قطع مکافی مرتسم کر رہا ہے، مساوی کمیت ک کے ایک ساکن ذرہ سے ٹکراتا ہے اور یہ دونوں کمیتیں باہم حرکت کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اِن کا مرکز ثقل سورج کے گرد ایک دائرہ مرتسم کرے گا جس کا مرکز سورج ہوگا۔

١٦ــــ یہ مان کر کہ ایک مَرمی جاذبہ کے تغیرات کی رعایت رکھنے کے بعد زمین کے مرکز کے گرد ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کا ایک ماسکہ زمین کے مرکز پر ہے ثابت کرو کہ نقطہ رمیدگی میں سے گذرنے والے ایک افقی مُستوی پر معلومہ رفتار د کے لیے بڑے سے بڑا ٹپّہ

$$\frac{\text{٤ ج و}^{٢}\text{ر}^{٢}}{\text{٤ ج}^{٢}\text{ر}^{٢} - \text{و}^{٤}}$$

ہے جہاں س' زمین کے مرکز سے نقطہ رسید گی کا فاصلہ ہے ۔

۱۷ ۔ جب زمین اپنے مدار کے محور اعظم کے سرے پر پہنچتی ہے تو ایک چھوٹا شہاب جس کی کمیت سورج کی کمیت کا م واں حصہ ہے اچانک سورج میں گرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ سال کا طول بقدر اپنے پہلے طول کے $\frac{۱}{۲م}$ ویں حصے کے گھٹ جائے گا ۔

۱۸ ۔ ایک سیارہ ث پر جو سورج س کے گرد حرکت کر رہا ہے ایک چھوٹا شہاب گرتا ہے جس کی وجہ سے اس کی رفتار بقدر اپنی پہلی رفتار کے $\frac{۱}{ن}$ ویں حصہ کے گھٹ جاتی ہے اگرچہ اس کی سمت نہیں بدلتی ۔ ن کو چھوٹا سمجھ کر ثابت کرو کہ سیارہ کے مدار کا خروج المرکز بقدر ۲ ن (ز + جم ط) کے گھٹ جائے گا جہاں ط وہ زاویہ ہے جو س ث اور مدار کے محور اعظم کے درمیان ہے ۔

نیز ثابت کرو کہ نیا محور اعظم پرانے محوروں کے ساتھ زاویہ $\frac{۲ن\ جب\ ط}{ز}$ بنائیگا ۔

۱۹ ۔ ایک ذرہ ماسکے کے گرد ایک قطع ناقص کو مرتسم کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ بڑی سے بڑی اور کم سے کم زاوئی رفتاریں محور اعظم کے سروں پر واقع ہوتی ہیں اور نیز یہ کہ اگر یہ زاوئی رفتاریں عہ اور بہ ہوں تو اوسط زاوئی رفتار

$$\frac{۲\ (عہ\ بہ)^{\frac{۳}{۴}}}{\left(\sqrt{عہ} + \sqrt{بہ}\right)^{۲}}$$

ہے ۔

۲۰ ۔ ایک دمدار تارہ ایک قطع مکافی کو سورج کے گرد مرتسم کرتا ہے اور اس کا سورج سے قریب ترین فاصلہ زمین کے مدار کے نصف قطر کا ایک ثلث ہے جہاں زمین کے مدار کو دائری فرض کیا گیا ہے ۔ زمین کے مدار کے اندر کتنے دنوں تک دمدار تارہ رہے گا ؟ (۲۸۴)

۲۱ ۔ اگر ایک ذرہ پر کشش ایسی بدلے جیسے قوت کے مرکز و سے فاصلے کے مربع کے بالعکس تو ثابت کرو کہ دو سمتیں ہیں جن میں کسی ذرہ کو ایک دئے ہوئے نقطہ ف سے اس طور پر پھینکا جا سکتا ہے کہ اس کے مدار کا محور اعظم معلومہ

محورِ اعظم ہو۔ اگر و ف = ج اور اگر $عہ_1$، $عہ_2$ وہ زاویے ہوں جو پھینکنے کی سمتیں و ف کے ساتھ بناتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$مم\, عہ_1\, مم\, عہ_2 = \frac{ج}{ا} - 1$$

جہاں ا نیم محورِ اعظم ہے۔

۲۲۔ ایک ذرہ کو ایک نقطہ ف سے ایک قوت کے تحت جو ایک ثابت نقطہ س کی جانب ہے جس کا فاصلہ ف سے ر ہے اِس طور پر پھینکا گیا ہے کہ ذرہ ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جو س میں سے گذرتا ہے۔ ابتدائی رفتار و ہے اور رفتار کا معیار س کے گِرد ہ ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ وقت

$$\frac{ر^2}{4ہ^3}\left(\pi\, و^2 ر^2 \pm 4ہ\sqrt{و^2 ر^2 - ہ^2}\right)$$

میں ایک نیم دائرہ مرتسم کرے گا۔

۲۳۔ کمیت ک′ کا ایک کُندہ جس کے بالائی اور زیریں رُخ چکنے افقی مُستوی ہیں متوازی مُستوی میں ایک نالی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے اور کمیت ک کا ایک ذرہ اِس کے بالائی رُخ میں ایک ثابت نقطہ پر ایک لچکدار ڈوری سے بندھا ہوا ہے جس کا طبعی طول ا اور مقیاس لہ ہے۔ اگر یہ نظام سکون سے حرکت میں آئے جبکہ ذرہ اِس کے بالائی رُخ پر ہو اور ڈوری نالی کے متوازی اپنے طبعی طول کا ۱ + ن گنا تنی ہوئی ہو تو ثابت کرو کہ کُندہ حیطہ

$$\frac{(ن+1)\, ا\, ک}{ک' + ک}$$

اور دَور

$$2\left(\pi + \frac{2}{ن}\right)\sqrt{\frac{ا\, ک\, ک'}{لہ\,(ک'+ک)}}$$

کے اہتزاز کرے گا۔

(۲۸۶)

گیارہواں باب

اُستواراجسام کی حرکت

۲۲۹ — اس باب میں اُستواراجسام کی حرکت سے بحث کی جائے گی جبکہ حرکت ایسی ہو کہ اجسام ذرے متصور نہ ہو سکیں —

دفعہ ۶۶ میں ثابت کیا جا چکا ہے کہ اُستواراجسام کی عام سے عام ممکن حرکت حرکت انتقال اور گردشی حرکت سے مرکب ہوتی ہے۔ کسی قسم کی قوتوں کے زیر عمل کسی اُستوار جسم کی عام حرکت پر بحث کرنے سے بیشتر گردشی حرکت کے خواص کا پہلے سے زیادہ تفصیل کے ساتھ امتحان کرنا مناسب ہوگا۔

زاویئی رفتار

۲۳۰ — ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۶۷) کہ کسی اُستوار جسم کی ہر حرکت کے لئے جس میں ایک نقطہ ف ثابت رہے گردش کا ایک محور ہوتا ہے جو ف میں سے گذرنے والا ایک خط ہے جس کا ہر نقطہ ثابت رہتا ہے۔ اگر اُستوار جسم مسلسل حرکت کر رہا ہو تو ہم اس کی حرکت کی تحلیل حسب ذیل طریقہ پر کر سکتے ہیں — ہم اُستوار جسم کا ایک معیّن نقطہ ف منتخب کرتے ہیں اور حرکت کا حوالہ ایک ایسے حوالے کے فریم سے دیتے ہیں جس میں

نقطہ ف مبدا ہوتا ہے اور جو (فریم) اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ہمیشہ اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتا ہے۔ اس فریم کے لحاظ سے کسی دو لمحات کے درمیان جسم کی حرکت، ف کے گرد گردشی حرکت ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ وقفہ فرت کی اثنا میں جسم کی گردش، گردش کے محور ف ق کے گرد زاویہ فرط ہے۔ تب شرح $\frac{\text{فرط}}{\text{فرت}}$ کی انتہا کو جبکہ فرت (۲۸۷)

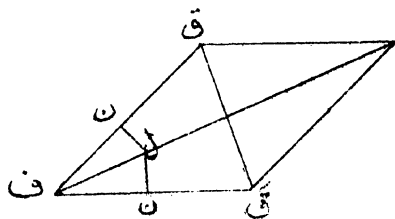
لا انتہا چھوٹا بنا دیا گیا ہو جسم کی زاوئی رفتار کہتے ہیں۔ اس زاوئی رفتار سے اُس زاویہ کی پیمائش ہوتی ہے جس میں سے جسم فی اکائی وقت گھومتا ہے۔

اس لیے کسی لمحہ پر ایک اُستوار جسم کی حرکت کا پورا علم حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل امور معلوم ہونے چاہئیں:

(ا) حوالے کے فریم کے لیے منتخب شدہ نقطہ ف کی رفتار کی سمت اور مقدار،

(ب) ف میں سے گذرنے والے گردش کے محور کی سمت،

(ج) گردش کے محور کے گرد زاوئی رفتار کی مقدار۔

۲۳۱ — زاوئی رفتار کے ساتھ دو چیزیں وابستہ ہوتی ہیں: سمت — گردش کا محور — اور مقدار۔ اس لیے اس کو ایک خط سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ اب ہم ثابت کریں گے کہ وہ ایک سمتی ہے یعنے یہ کہ زاوئی رفتاروں کو قانون متوازی الاضلاع کی بموجب مرکب کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم، ف کے گرد گردش کرتا ہے جو (ا) ایک محور ف ق کے گرد زاوئی رفتار سہ کی

شکل (۱۳۸)

ایک گردش اور (ب) ایک دوسرے محور ف قَ کے گرد زاوی رفتار سہ کی ایک گردش سے مرکب ہے۔ فرض کرو کہ طول ف ق اور ف قَ، سہ اور سَہ کے متناسب لیے گئے ہیں اور اس لیے خطوط ف ق اور ف قَ، اسی پیمانہ پر زاوی رفتاروں کی سمتوں اور مقداروں کو تعبیر کریں گے۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع ف ق ر قَ کی تکمیل کیگئی ہے اور فرض کرو کہ اس کے وتر ف ر پر کوئی نقطہ ل ہے۔ فرض کرو کہ ف ق اور ف قَ پر ل سے عمود ل ن اور ل نَ کھینچے گئے ہیں پہلی زاوی رفتار کی وجہ سے اُستوار جسم وقت فرت میں ف ق کے گرد زاویہ سہ فرت میں سے گھومتا ہے۔ اس گردش کا اثر یہ ہوگا کہ جسم کا وہ ذرہ جو ابتداً ل پر منطبق تھا مستوی ف ل ن کے علی القوائم فاصلہ ل ن × سہ فرت میں سے حرکت کرے گا۔ اسی طرح ف قَ کے گرد گردش کا یہ اثر ہوگا کہ وہی ذرہ مستوی کے علی القوائم فاصلہ ل نَ × سَہ × فرت میں سے حرکت کرے گا لیکن اُس سمت میں جو پہلی حرکت کی سمت کے مخالف ہے۔ اس لیے ذرہ کا کل ہٹاؤ (۲۸۸)

ل ن سہ فرت ـ ل نَ سَہ فرت (۱۱۶)

ہے۔

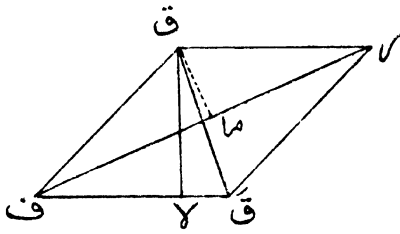
اب چونکہ ل، متوازی الاضلاع کے وتر پر ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث ف ل ق کا رقبہ، مثلث ف ل قَ کے رقبہ کے مساوی ہے اور اس لیے

ل ن × ف ق = ل نَ × ف قَ

نیز چونکہ ف ق : ف قَ = سہ : سَہ اس لیے یہ مساوات شکل

ل ن × سہ = ل نَ × سَہ

میں لکھی جا سکتی ہے اور اس کا مقابلہ مساوات (۱۱۶) کے ساتھ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ ذرہ ل کا ہٹاؤ معدوم ہوتا ہے۔

اِس لیے مفروضہ دو زاویٔی رفتاروں کا حاصل ایک ایسی حرکت ہے کہ نقطے ف اور ل دونوں ساکن رہتے ہیں۔ اِس لیے یہ حرکت وہ زاویٔی رفتار ہے جس کی گردش کا محور متوازی الاضلاع کا وتر ف ر ہے۔
اِس کے بعد زاویٔی رفتار کی مقدار معلوم کرنی چاہئے۔ فرض کرو کہ یہ مقدار طا سے تعبیر ہوتی ہے۔ ق سے ف قَ اور ف ر پر عمود ق لا، ق ما کھینچو۔

ذرہ ق کا ہٹاؤ وقت فرت میں ق ما × طا × فرت ہوگا اور یہ ہٹاؤ مُستوی کے علی القوایم ہوگا۔ لیکن اس ہٹاؤ کو اُن ہٹاؤں کے مرکب کرنے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے جو

ق، ر، ما، ف، لا، قَ

شکل (۱۳۹)

زاویٔی رفتاروں سہ، سہَ سے پیدا ہوتے ہیں۔ اول الذکر رفتار سے پیدا شدہ ہٹاؤ صفر ہے کیونکہ ق گردش کے محور پر ہے، اور ثانی الذکر سے پیدا شدہ ہٹاؤ ق لا سہَ فرت ہے۔ اِس لیے

$$\text{ق ما} \times \text{طا فرت} = \text{ق لا} \times \text{سہَ فرت} \qquad (۱۱۷)$$

لیکن

$$\text{ق ما} \times \text{ف ر} = \text{ق لا} \times \text{ف قَ}$$

کیونکہ ہر ایک متوازی الاضلاع کے رقبہ کے مساوی ہے، اِس لیے اِس کو ربط (۱۱۷) کے ساتھ لینے سے

$$\frac{\text{طا}}{\text{ف ر}} = \frac{\text{سہَ}}{\text{ف قَ}}$$

اِس طرح اگر سہَ کو ف قَ سے تعبیر کیا گیا ہے تو طا اُسی پیمانہ پر ف ر سے تعبیر ہوگا۔ پس ہم نے ثابت کر دیا کہ (۲۸۹)
ایک متوازی الاضلاع ف ق ر قَ کے اضلاع

ف ق، ف قَ سے تعبیر شدہ دو زاوئی رفتاروں کا حاصل ایک زاوئی رفتار ہے جو متوازی الاضلاع کے وتر ف ر سے تعبیر ہوتی ہے۔

پس زاوئی رفتار ایک سمتی ہے اور اس کے وہی خواص ہیں جو تمام سمتیوں کے لیے ثابت کئے جا چکے ہیں۔

۲۳۲ — پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گردش کے ایک محور کے گرد جس کی سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہیں زاوئی رفتار طا ہو تو طا کی بجائے تین زاوئی رفتاریں $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$ محددوں کے محوروں کے گرد لی جا سکتی ہیں ایسی کہ

$$س_۱ = ل\ طا،\quad س_۲ = م\ طا،\quad س_۳ = ن\ طا \qquad (۱۱۸)$$

مُربع لیکر جمع کرنے سے

$$طا^۲ = س_۱^۲ + س_۲^۲ + س_۳^۲ \qquad (۱۱۹)$$

اب ہم دیکھتے ہیں کہ کسی اُستوار جسم کی حرکت معلوم ہو جاتی ہے اگر

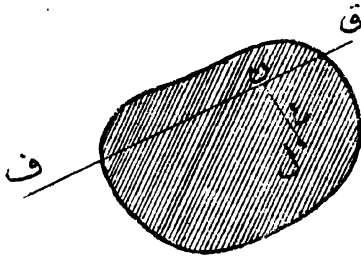
(ا) نقطہ ف کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ء، و، ط

اور (ب) زاوئی رفتار کے اجزائے ترکیبی $س_۱$، $س_۲$، $س_۳$

معلوم ہوں۔

گردش کی توانائی بالحرکت

۲۳۳ — فرض کرو کہ کسی لمحہ پر ایک اُستوار جسم گردش کے ایک محور ف ق کے گرد زاوئی رفتار طا کے ساتھ گردش کر رہا ہے۔

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور اس کی کمیت ک ہے۔
فرض کرو کہ ف ق پر عمود ل ن کھینچا گیا ہے اور اس کا طول ع ہے

اب ذرہ ل کی رفتار ع طا
ہے اور اس کی توانائی بالحرکت
$\frac{1}{2}$ ک ع^2 طا^2 ہے ۔
جمع کرنے پر پورے
جسم کی توانائی بالحرکت

$$\frac{1}{2}(\sum ک ع^2) طا^2$$

حاصل ہوتی ہے ۔

شکل (۱۴۰)

(۲۹۰) مقدار $\sum$ ک ع^2
کو محور ف ق کے گرد جمود کا معیار کہتے ہیں ۔
اگر ہم مقدار گ داخل کریں ایسی کہ

$$گ^2 = \frac{\sum ک ع^2}{\sum ک}$$

یعنے گ^2، ع^2 کی وہ اوسط قیمت ہے جو جسم کے تمام ذروں پر اوسطاً
لی گئی ہے تو گ کو محور ف ق کے گرد گھماؤ کا نصف قطر کہتے ہیں ۔
اب توانائی بالحرکت کو شکل

$$\frac{1}{2}(\sum ک ع^2) طا^2 = \frac{1}{2}\sum (ک) گ^2 طا^2$$

میں لکھا جا سکتا ہے اور اس لیے توانائی بالحرکت وہی ہے گویا کہ جسم کی
کل کمیت ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ گردش کے محور سے گ ہے مرتکز ہے ۔

اُستوار جسم کی توانائی بالحرکت

۲۳۴ ــــ نقطہ ف اختیاری ہے اور اس لیے فرض کرو کہ یہ وہ نقطہ
ہے جو جسم کا مرکز ثقل ہے ۔ اب جسم کی عام سے عام حرکت (۱) ایک
حرکت انتقال اور (۲) گردش کی ایک حرکت سے مرکب ہو سکتی ہے ۔

حرکت (۱) مرکز ثقل کی حرکت انتقال کے مماثل ہے اور حرکت (۲) مرکز ثقل میں سے گذرنے والے ایک محور گرد گردشی حرکت ہے۔

فرض کرو کہ مرکز ثقل کی رفتار و ہے، مرکز ثقل میں سے گذرنیوالے گردش کے محور کے گرد زاوائی رفتار طا اور گھماؤ کا نصف قطر گ ہے۔
فرض کرو کہ جسم کی کل کمیت ∑ ک = ک۔

دفعہ ۱۸۶ کے مسئلہ کی رو سے جسم کی کل توانائی بالحرکت دو اجزا کا مجموعہ ہے:

(ا) کمیت ک کے ایک واحد ذرہ کی توانائی بالحرکت جو جسم کے مرکز ثقل کے ساتھ حرکت کر رہا ہو،

(ب) مرکز ثقل کے لحاظ سے حرکت کی توانائی بالحرکت۔

جزو (ا) کی قیمت $\frac{1}{2}$ ک $و^2$ ہے اور جزو (ب) کی $\frac{1}{2}$ ک $گ^2$ $طا^2$۔

پس مجموعی توانائی بالحرکت

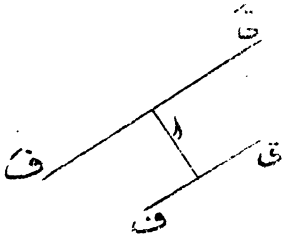
$$\frac{1}{2} ک (و^2 + گ^2 طا^2) \qquad (120)$$

ہے۔ یہ جملہ خود بڑی اہمیت رکھتا ہے لیکن یہ اِس وجہ سے بھی دلچسپ ہے کہ اِس کی مدد سے حسب ذیل مسئلہ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۲۲۵۔ مسئلہ۔ فرض کرو کہ مرکز ثقل میں سے گذرنیوالے کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر گ ہے اور فرض کرو کہ اِس گھماؤ کے محور سے فاصلہ ا پر کے ایک متوازی محور کے گرد گھماؤ کا محور گ' ہے تو (۲۹۱)

$$گ'^2 = گ^2 + ا^2$$

فرض کرو کہ مرکز ثقل ث میں سے گذرنے والا کوئی محور ف ق ہے اور فرض کرو کہ اِس محور سے فاصلہ ا پر کوئی متوازی محور ف' ق' ہے۔

فرض کرو کہ فَ قَ کے گرد اُستوار جسم گردش کی حرکت رکھتا ہے اور اسکی زاویٰ رفتار طا ہے۔

اب ث کی رفتار ا طا ہے اور حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب خیال کیا جا سکتا ہے (۱) رفتار ا طا کی حرکت انتقال اور (۲) محور ف ق کے گرد گردش طا کی حرکت۔ ضابطہ (۱۲۰) کی رو سے توانائی بالحرکت ہے

$$\frac{1}{2} ک (ا^2 طا^2 + گ^2 طا^2)$$

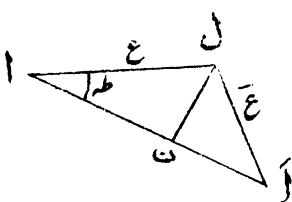
نیز وہ $\frac{1}{2} ک گَ^2 طا^2$ کے مساوی بھی ہے جہاں گَ، فَ قَ کے گرد گھماؤ کا نصف قطر ہے۔ اس لیے

$$\frac{1}{2} ک گَ^2 طا^2 = \frac{1}{2} ک (ا^2 طا^2 + گ^2 طا^2)$$

اور $\frac{1}{2}$ ک طا^2 سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۲۳۶ — متبادل ثبوت — اس مسئلہ کو ہندسی طور پر بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:

شکل (۱۴۱)

فرض کرو کہ جسم کا کوئی ذرہ ل ہے اور فرض کرو کہ شکل (۱۴۲) کا مستوی وہ مستوی ہے جو ل میں سے گذرتا ہے اور گردش کے دو محوروں کے علی القوائم ہے اور یہ محور مستوی کو علی الترتیب نقطوں ا، اَ پر قطع کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ل ا = ع، ل اَ = عَ اور فرض کرو کہ ل ن

شکل (۱۴۲)

اا' پر عمود کھینچا گیا ہے۔ تب ک گ'^{۲} = ∑ ک ع'^{۲} اور نیز

ک گ^{۲} = ∑ ک ع^{۲}

= ∑ ک (ع'^{۲} + اا'^{۲} − ۲ ع' × اا' جم ط)

= ک گ'^{۲} + ک × اا'^{۲} − ۲ اا' (∑ ک × ا'ن)

اب ا'ن، خط اا' پر اُس خط کا ظل ہے جو ل سے مرکزِ ثقل تک کھینچا گیا ہے۔ اِس لیے ∑ ک × ا'ن = ۰۔ اور اِس لیے

ک گ^{۲} = ک گ'^{۲} + ک × اا'^{۲}

اِس کو ک سے تقسیم کرنے پر مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

(۲۹۶) **۲۲۷** — اوپر کے ثابت شدہ مسئلے سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر فوراً معلوم ہو سکتا ہے اگر ہمیں مرکزِ ثقل میں سے گذرنے والے متوازی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم ہو اور اِس کے بالعکس۔ اب ہم گھماؤ کے نصف قطروں کو محسوب کرنے کی چند مثالیں دیں گے۔

گھماؤ کے نصف قطروں کو محسوب کرنا

۲۲۸ — **یکساں پتلا ڈنڈا** — فرض کرو کہ ڈنڈے اب کا طول ۲ ا ہے اور فرض کرو کہ اِس کے عمود وار ا میں سے گذرنے والے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر گ ہے۔ فرض کرو کہ ڈنڈے کی کمیت فی اکائی طول ت ہے اور فرض کرو کہ لا وہ محدد ہے جو ا سے فاصلوں کو پیمائش کرتا ہے۔ اُس عنصر کی کمیت جو لا سے لا + فرلا تک ہے ت فرلا ہے اور گردش کے محور سے اِس کا عمودی فاصلہ لا ہے۔ اِس لیے

ا ف ب

شکل (۱۴۳)

$$گ^2 = \frac{\Sigma ک ع^2}{\Sigma ک} = \frac{\int_0^{2ا} (ته\ فرلا) لا^2}{\int_0^{2ا} ته\ فرلا} = \frac{\frac{8}{3}\ ته\ ا^3}{2\ ته\ ا} = \frac{4}{3} ا^2$$

اِس لیے گھماؤ کا نصف قطر $\frac{2ا}{\sqrt{3}}$ ہے۔

مرکز ثقل کے گرد جس کا فاصلہ ا سے ا ہے گھماؤ کا نصف قطر

$$گ^2 = \frac{4}{3} ا^2 - ا^2 = \frac{ا^2}{3}$$

سے حاصل ہوگا اور اِس لیے مرکز ثقل کے گرد گھماؤ کا نصف قطر $\frac{ا}{\sqrt{3}}$ ہے۔

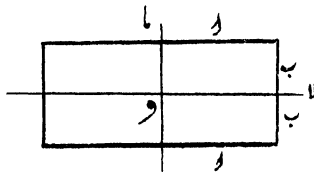
۲۳۹ ـ مستطیلی پترا۔ فرض کرو کہ پترے کے کنارے ۲ا، ۲ب ہیں اور ہم اُس محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرنا چاہتے ہیں جو اِس کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اِس کے مستوی پر عمود ہے۔ شکل (۱۴۴) کے مطابق محور لو اور فرض کرو کہ فی اکائی رقبہ کمیت ته ہے۔ تب

$$گ^2 = \frac{\Sigma ک ع^2}{\Sigma ک} = \frac{\int\int (ته\ فرلا\ فرما)(لا^2 + ما^2)}{4\ ا\ ب\ ته}$$

(۲۹۲) تکمل پورے پترے پر لینا چاہیئے اور اِس لیے حدود لا = ا سے لا = ـ ا، ما = ب سے ما = ـ ب تک ہیں۔

شکل (۱۴۴)

تکمل کرنے پر

$$گ^2 = \frac{ا^2 + ب^2}{3}$$

ب = ۰ لینے پر پترا ایک پتلا ڈنڈا ہوجاتا ہے اور نتیجہ وہی حاصل ہوتا ہے جو پچھلے دفعہ میں حاصل ہوا تھا۔

۲۴۰ - متجانس ٹھوس ناقص نما۔ فرض کرو کہ ناقص نما کے نیم محور ا، ب، ج ہیں اور فرض کرو کہ ہم محور اعظم کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرتے ہیں ۔ ناقص نما کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لینے سے اور ناقص نما کی کثافت کو غہ سے تعبیر کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$گ^2 = \frac{\Sigma ک ع^2}{\Sigma ک} = \frac{\iiint (غہ\ فرلا فرما فری)(ما^2 + ی^2)}{\iiint غہ\ فرلا فرما فری}$$

جہاں تکمل ناقص نما کے پورے حجم پر لیا گیا ہے ۔ تکملات کی تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے :۔

$$گ^2 = \frac{ب^2 + ج^2}{5}$$

مثالیں

۱۔ ایک ڈنڈا ۱۲ انچ لمبا ہے ۔ اُس نقطہ کے گرد گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو جس کا فاصلہ ایک سرے سے ۴ انچ ہے ۔

۲ ۔ ایک دائری قرص کا گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو :

(ا) اُس محور کے گرد جو قرص کے مرکز میں سے گذرے اور اس کے مُستوی پر عمود ہو،

(ب) ایک قطر کے گرد ۔

۳ ۔ ثابت کرو کہ نصف قطر ا کے ایک کرہ کا گھماؤ کا نصف قطر کسی قطر کے گرد $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ا ہے اور کسی مماس کے گرد $\sqrt{\frac{7}{5}}$ ا ہے ۔

۴ ۔ ایک مکعب کا گھماؤ کا نصف قطر ایک کنارے کے گرد معلوم کرو ۔

۵ ۔ ایک مربع پترے کا گھماؤ کا نصف قطر ایک وتر کے گرد معلوم کرو ۔

۶ــ ایک ٹھوس دائری اسطوانے کا گھماؤ کا نصف قطر معلوم کرو :

(ا) ایک محور کے گرد،

(ب) ایک مکون کے گرد،

(ج) ایک سرے کے ایک قطر کے گرد ـــ

۷ــ ثابت کرو کہ ایک ٹھوس مخروطی تکلے کا گھماؤ کا نصف قطر اِس کے محور کے گرد $\sqrt{\frac{۳}{۱۰}}$ ا ہے جہاں ا، قاعدے کا نصف قطر ہے ـــ

راؤتھ کا قاعدہ

(۲۹۴)

۳۱۴ــ حسب ذیل سہولت بخش قاعدہ سے جس کو ڈاکٹر راؤتھ نے (Rigid Dynamics, 3) بیان کیا ہے گھماؤ کے مختلف نصف قطروں کو یاد رکھنے کا آسان طریقہ حاصل ہوتا ہے ـــ اِس قاعدہ کا اطلاق خطی، مستوی اور ٹھوس اجسام پر جو

(ا) قائم الزاویہ (ڈنڈا، پترا، یا متوازی السطوح)

(ب) ناقصی یا دائری (قرص یا پترا)

(ج) ناقص نما، کرہ نما، یا کروی (مجسم، ٹھوس)

ہوں ہوتا ہے ـ یہ قاعدہ حسب ذیل ہے :

مرکز ثقل میں سے گذرنے والے تشاکل کے کسی محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر گ، مساوات

$$گ^{۲} = \frac{\text{عمودی نیم محوروں کے مربعوں کا مجموعہ}}{\text{۳، ۴، یا ۵}}$$

سے حاصل ہوگا جہاں نسب نما ۳، ۴، یا ۵ ہے بموجب اِس کے کہ جسم تقسیم (ا)، (ب)، یا (ج) کے تحت ہو ـــ

توضیحی مثال

ایک سکہ ایک مائل مُستوی پر لڑھکتا ہے۔ کسی فاصلے کے بعد اِس کی رفتار اور نیز اِس کا اسراع معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سکے کو ایک یکساں دائری قرص سمجھا گیا ہے اور فرض کرو کہ اِس کا نصف قطر ا ہے۔ جب اِس کی رفتار مُستوی کے نیچے و ہوتی ہے تو اِس کی زاوئی رفتار $\frac{و}{ا}$ ہو گی۔ گردش کا محور سکہ کے مُستوی پر عمود ہے۔

اِس کے تشاکل کے نیم محور ا، ا ہوں گے جبکہ اِس کو پترا سمجھا جائے۔ مرکز میں سے گذرنے والے گردش کے محور کے گرد گھماؤ کا نصف قطر راؔوتھ کے قاعدے کی بموجب

$$گ^۲ = \frac{ا^۲ + ا^۲}{۴} = \frac{۱}{۲} ا^۲$$

شکل (۱۴۵)

ہے اور اِس لیے توانائی بالحرکت

$$\frac{۱}{۲} ک \left[و^۲ + \frac{۱}{۲} ا^۲ \left(\frac{و}{ا} \right)^۲ \right] = \frac{۳}{۴} ک و^۲$$

ہے۔

مُستوی کے نیچے فاصلہ س تک لڑھکنے کے بعد سکہ کا مرکزِ ثقل فاصلہ س جب عہ تک گر چکتا ہے اور اِس لئے توانائی کے بقاء کے اصول سے

$$ک ج س جب عہ = \frac{۳}{۴} ک و^۲$$

اور اِس لیے رفتار مساوات

$$و^۲ = \frac{۴}{۳} س ج جب عہ$$

سے حاصل ہو گی۔

ضابطہ (۴۸) سے مقابلہ کیا جائے یعنے $و^۲ = ۲ ع س$ سے (ع = اسراع)

جہاں حرکت یکساں اسراع کے تحت ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ سکہ مُستوی کے نیچے یکساں اسراع $\frac{۲}{۳}$ ج جب عہ کے ساتھ لڑھکتا ہے۔

مثالیں

(۲۹۵) ۱۔ ثابت کرو کہ ایک حلقہ کا اسراع جو میلان عہ کی ایک پہاڑی پر سے نیچے لڑھک رہا ہے $\frac{۱}{۲}$ ج جب عہ ہے۔

۲۔ لوکوموٹف پہیئوں کے ایک جوڑے کا اسراع معلوم کرو جو ۰۵ میں اڈھال نیچے دوڑ رہے ہیں، ہر پہیہ میں ایکساں موٹائی کی ایک کور اور اَرے لگے ہوئے ہیں، کور کا وزن اَروں کے وزن کا دُگنا ہے اور محور کا وزن ایک پہیہ کے وزن کا نصف ہے۔ (محور کی موٹائی نظر انداز کرو)۔

۳۔ دو سیکل سوار جن کی سیکلیں ایک دوسرے کے ٹھیک مشابہ ہیں ایک پہاڑی کے نیچے اِس کی چوٹی سے مساوی رفتاروں کے ساتھ حرکت کی ابتدا کر کے اُترتے ہیں۔ رگڑ کی قوتوں اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ زیادہ بھاری سوار پہاڑی کے دامن میں پہلے پہنچے گا۔

۴۔ ایٹوڈ مشین کی چرخی کمیت ک کی ایک ایکساں قرص ہے۔ اگر کمیتیں $ک_۱$، $ک_۲$ ڈوری کے سِروں سے لٹکائی جائیں تو ثابت کرو کہ $ک_۱$ کا اسراع

$$\frac{ک_۱ - ک_۲}{ک_۱ + ک_۲ + \frac{۱}{۲} ک}$$

ہے۔

۵۔ دو کُرّے جن میں سے ایک کھوکھلا خول ہے اور دوسرا متجانس ٹھوس پہاڑی کی چوٹی سے ایک ساتھ حالت سکون سے نکل کر باہم پہاڑی کے نیچے لڑھکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ راستے کے کسی حصہ پر اُن کے اوقات ۵ : $\sqrt{۲۱}$ کی نسبت میں ہوں گے۔

۶۔ اگر ایک گاڑی کے پہیوں کی کمیتوں کو کور پر جمع شدہ فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ گاڑی کی توانائی جبکہ وہ رفتار و کے ساتھ حرکت کر رہی ہو $\frac{۱}{۲}$ ک $و^۲$

ہے جہاں ک پوری گاڑی اور پہیوں کے وزنوں کا مجموعہ ہے ۔

۷ ۔۔ یکساں تار کے ایک سیدھے ٹکڑے کو ایک سرے پر انتصاباً استادہ کیا گیا اور گرنے چھوڑ دیا گیا ۔ وہ کس رفتار سے زمین سے ٹکرائے گا ۔

۸ ۔۔ سگار کی شکل کا ایک متجانس ٹھوس کرہ نما (نیم محور ا اور ب) اس کی نوک کے بل ایک افقی مستوی پر استادہ کیا گیا اور لڑھکنے کے لیے چھوڑ دیا گیا ۔ اسکی زاوئی رفتار معلوم کرو جبکہ اس کے محور اصغر کا سرا مستوی کے ساتھ تماس میں ہو اور اس لمحہ پر مستوی پر کا دباؤ معلوم کرو ۔

معیار حرکت کا معیار

۲۴۲ ۔۔ فرض کرو کہ کمیت ک کے کسی ذرہ کے محدد لا ، ما ، ی ہیں ۔ فرض کرو کہ کل حاصل قوت کے جو ذرہ پر عمل کرتی ہے اجزائے ترکیبی لا ، ما ، ے ہیں ۔ تب حرکت کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :

$$ک \frac{فر^۲ لا}{فرت^۲} = لا ،$$

$$ک \frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} = ما ،$$

$$ک \frac{فر^۲ ی}{فرت^۲} = ے$$

ذرہ پر عمل کرنے والی قوت کا معیار محور لا کے گرد ما ے ۔ ی ما ہے (۲۹۶) اور اوپر کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$ما ے ۔ ی ما = ک \left(ما \frac{فر^۲ ی}{فرت^۲} ۔ ی \frac{فر^۲ ما}{فرت^۲} \right) \qquad (۱۲۱)$$

ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی $\frac{فر لا}{فرت}$ ، $\frac{فر ما}{فرت}$ ، $\frac{فر ی}{فرت}$ ہیں اور اس لئے

اِس رفتار کا معیار محور لا کے گرد حسب تعریف دفعہ (۲۱۹)

$$ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت}$$

ہے ۔

ذرہ کا معیار حرکت اِس کی رفتار کا ک گنا ہے اور اِس لیے معیار حرکت کا معیار محور لا کے گرد، رفتار کے معیار کا ک گنا ہے اور اِس لیے

$$ک \left(ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت}\right)$$

ہے ۔ تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے :

$$\frac{فر}{فرت}\left[ک\left(ما \frac{فری}{فرت} - ی \frac{فرما}{فرت}\right)\right]$$

$$= ک\left[\left(\frac{فرما}{فرت}\frac{فری}{فرت} + ما \frac{فر^۲ی}{فرت^۲}\right) - \left(\frac{فری}{فرت}\frac{فرما}{فرت} + ی \frac{فر^۲ما}{فرت^۲}\right)\right]$$

$$= ک\left(ما \frac{فر^۲ی}{فرت^۲} - ی \frac{فر^۲ما}{فرت^۲}\right)$$

$$= ما ے - ی ما \qquad (۱۲۲)$$

مساوات (۱۲۱) سے ۔

پس ہم نے ثابت کر دیا کہ

کسی محور کے گرد ایک ذرہ کے معیار حرکت کے معیار کی تبدیلی کی شرح، اُسی محور کے گرد اُس معیار کے مساوی ہوتی ہے جو ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا ہے ۔

۲۴۳ ــــ مساوات (۱۲۲)، اجسام کے کسی نظام کے ہر ذرہ کے لیے درست ہے ۔ فرض کرو کہ ہم تمام ذروں کے لیے ایسی مساواتیں معلوم

کرتے ہیں اور ان کو جمع کرتے ہیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left[\Sigma\,\text{ک}\left(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)\right] = \Sigma\,(\text{ماے} - \text{ی ما}) \quad \ldots\ldots (۱۲۳)$$

اس مساوات کی بائیں جانب وہ جملہ ہے جو جسم پر یا اجسام پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اندرونی قوتیں مساوی اور مخالف قوتوں کے جوڑوں میں وقوع پذیر ہوتی ہیں اور اس لیے اس کا جملۂ بالا میں کوئی حصہ نہیں ہے۔ (۲۹۷)

جملہ $\Sigma\,\text{ک}\left(\text{ما}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)$ کو جو جداگانہ ذرات کے معیارِ حرکت کے معیاروں کا مجموعہ ہے **نظام کے معیارِ حرکت کا معیار** کہتے ہیں۔

اس طرح مساوات (۱۲۳) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

کسی محور کے گرد کسی نظام کے معیارِ حرکت کے معیار میں تبدیلی کی شرح، اس محور کے گرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۴۴ — اس مسئلہ سے متعدد اہم نتیجے نکلتے ہیں :

۱ — اگر اجسام کے کسی نظام پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں تو ہر محور کے گرد معیارِ حرکت کا معیار مستقل رہتا ہے۔

اس سے وہ اصول بیان ہوتا ہے جس کو زاوئی معیارِ حرکت کا بقا کہتے ہیں۔

اس کی ایک مثال سورج سے مہیا ہوتی ہے جس کے متعلق عملاً یہ فرض

کیا جا سکتا ہے کہ اس پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہیں کرتیں۔ بالعموم یہ فرض کیا جاتا ہے کہ سورج حجم میں سُکڑ رہا ہے، اگر ایسا ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس کے محور کے گرد اس کی گردش کی رفتار مسلسل بڑھنی چاہیئے تاکہ اس کا معیار حرکت کا معیار مستقل رہ سکے۔

۲ ۔ اگر ایک نظام پر عمل کرنے والی تمام قوتیں ایک دئے ہوئے خط کے متوازی ہوں یا اس خط کو قطع کریں تو نظام کے معیار حرکت کا معیار اِس خط کے گرد مستقل رہنا چاہیئے۔

ایک لٹو پر صرف کیل پر کا تعامل اور جاذبہ عمل کرتے ہیں۔ ثانی الذکر کا معیار لٹو کے کیل میں سے گذرنے والے انتصابی خط کے گرد معدوم ہوتا ہے اور اول الذکر کا معیار تقریبی طور پر معدوم فرض کیا جا سکتا ہے اِس لئے لٹو کے کیل میں سے گذرنے والے خط کے گرد معیار حرکت کا معیار مستقل رہے گا، تقریبی طور پر۔

۳ ۔ اگر ایک اُستوار جسم ایک ثابت محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہو اور اگر کسی لمحہ پر اِس کی زاویائی رفتار سہ ہو تو

$$ک گ^۲ \frac{فر سہ}{فر ت} = ل$$

جہاں ک گ^۲، ثابت محور کے گرد جمود کا معیار ہے اور ل، اس محور کے گرد تمام بیرونی قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ ہے۔

اِس کی تصدیق کے لیے صرف یہ دیکھنا ضروری ہے کہ کمیت ک کا ایک ذرہ جو محور سے فاصلہ ف پر ہے معیار حرکت ک ف سہ رکھتا ہے (۲۹۸)
اور اس لیے پورے نظام کے معیار حرکت کا معیار

$$ک ف^۲ سہ = ک گ^۲ سہ \;\; ہے$$

ہوگا اور چونکہ ک اور گ۲ وقت کے ساتھ متغیر نہیں ہوتے اِس لیے زاوئی معیارِ حرکت کی تبدیلی کی شرح ک گ۲ $\frac{\text{فر سہ}}{\text{فر ت}}$ ہوگی۔

رقاص کا اہتزاز

۲۴۵ — پچھلے مسئلہ کا ایک اہم اطلاق یہ ہے کہ کسی قسم کے رقاص کے اہتزاز کا وقت معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ و وہ نصاب ہے جس کے گرد رقاص گردش کرتا ہے، فرض کرو کہ اِس کا مرکزِ ثقل ث ہے اور و ث = ھ اور فرض کرو کہ خط و ث انتصابی کے ساتھ کسی لمحہ پر زاویہ طہ بناتا ہے اور اس لیے رقاص کی زاوئی رفتار اِس کے محور کے گرد سہ = $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$ ہے۔

فرض کرو کہ پورے رقاص کی کمیت ک ہے اور گردش کا نصف قطر اِس کے محور کے گرد گ ہے۔

اب حرکت کی مساوات ہے

$$\text{ک گ}^2 \frac{\text{فر سہ}}{\text{فر ت}} = \text{ل}$$

جس میں سہ = $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$، ل کی قیمت و میں سے گذرنے والے محور کے گرد

شکل (۱۴۶)

وزن کے معیار کے مساوی ہے اور اِس لئے ک ج ھ جب طہ کے مساوی ہے۔

اِس لئے حرکت کی مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{ک گ}^2 \frac{\text{فر سہ}}{\text{فر ت}} = \text{ک ج ھ جب طہ}،$$

$$\frac{\text{گ}^2}{\text{ھ}}\ \frac{\text{فز}^2\,\text{طہ}}{\text{فزت}^2} = \text{ج جب طہ}$$ یا

(۲۹۹)

طول ل کے سادہ رقاص کے لیے حرکت کی مساوات

$$\text{ل}\ \frac{\text{فز}^2\,\text{طہ}}{\text{فزت}^2} = \text{ج جب طہ}$$

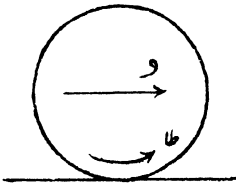
ہے اور اِس لیے مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت وہی ہے جو طول $\text{ل} = \frac{\text{گ}^2}{\text{ھ}}$ کے سادہ رقاص کی ہوتی ہے۔

مثلاً چھوٹے اہتزازوں کا مکمل دَور

$$2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{گ}^2}{\text{ج ھ}}}$$

ہے۔

توضیحی مثال

ایک انگوٹھی ایک میز پر انتصاباً اِستادہ ہے اور اِس کے ایک نقطہ پر انگلی سے بتدریج بڑھنے والا دباؤ اِس طریقہ پر ڈالا گیا ہے کہ جس نقطہ پر انگوٹھی میز کو مس کرتی ہے اُس کے میز پر پھسلنے سے توازن ٹوٹتا ہے۔ انگوٹھی کی وقوع پذیر حرکت معلوم کرو۔

شکل (۱۴۷)

مثال (۲) صفحہ ۱۵۸ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ متذکرہ صدر طریقہ پر دباؤ ڈالنا ممکن ہے ۔

فرض کرو کہ انگوٹھی جب انگلی کو چھوڑتی ہے تو یہ مشاہدہ کیا گیا کہ انگوٹھی رفتار و کے ساتھ آگے حرکت کرتی ہے اور گردش طا کے ساتھ اس سمت کے مخالف گھومتی ہے جس میں وہ گھومتی اگر بغیر پھسلے وہ لڑھکتی ۔ فرض کرو کہ کسی لمحہ پر رفتار اور گردش کی قیمتیں و اور سہ ہیں جن کی پیمائش علی الترتیب و اور طا کی سمتوں میں کی گئی ہے ۔

فرض کرو کہ انگوٹھی کا نصف قطر ا اور کمیت ک ہے ۔ اس پر عمل کرنیوالی قوتیں حسب ذیل ہیں :

(ا) اس کا وزن ک ج ،

(ب) میز کے ساتھ اس کے تعامل کا انتصابی جزو ترکیبی جو ک ج کے مساوی ہے کیونکہ انگوٹھی کا مرکز ثقل کوئی انتصابی اسراع نہیں رکھتا،

(ج) انگوٹھی کے زیر ترین نقطہ پر فرکی تعامل، جو ک ج مہ کے مساوی ہے جب تک کہ پھسلن واقع ہوتی ہے ۔

دفعہ (۱۸۰) کے مسئلہ کی رُو سے

$$ک \frac{فر و}{فر ت} = - ک ج مہ \qquad (ا)$$

ہم ایک اور مساوات دفعہ ۲۴۳ کے مسئلہ سے حاصل کر سکتے ہیں ۔ فرض کرو کہ لمحہ ت پر انگوٹھی کا جو محور ہے اس کو ہم محور لیتے ہیں ۔ اس لمحہ پر جمود کا معیار ک ا^{2} ہے ۔ معیار حرکت کا معیار حاصل کرنے کے لیے ہم کل حرکت کو دو حرکتوں سے مرکب سمجھتے ہیں : (۱) مرکز ثقل کی حرکتِ انتقال (رفتار و) اور (۲) مرکز ثقل میں سے گذرنے والے ایک محور کے گرد گردش کی حرکت (رفتار سہ) اول الذکر کا کوئی اثر معیار حرکت کے معیار پر نہیں ہے اور اس لیے معیار حرکت کا کل معیار

(۳۰۰)

ک ا۲ سہ

ہے۔

چھوٹے وقفے فرت کے ختم پر انگوٹھی فاصلہ و فرت تک آگے حرکت کر چکی ہوگی اور اس لیے اب ہم ایک ایسے محور کے گرد جمود کے معیار پر غور کر رہے ہیں جو انگوٹھی کے مرکز ثقل سے فاصلہ د فرت پر ہے اور اِس لیے حسب دفعہ ۲۳۵ وقفہ فرت کے بعد جمود کا معیار

ک [ا۲ + (و فرت)۲]

ہے۔

لیکن ہم دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار (فرت)۲ کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور جمود کے معیار کو مستقل اور ک ا۲ کے مساوی سمجھ سکتے ہیں۔ اِس لیے معیار حرکت کے معیار کے اضافہ کی شرح ک ا۲ فرسہ/فرت ہے۔

بیرونی قوتوں کا معیار اُس محور کے گرد اور اُسی سمت میں
۔ک ج مہ ا

ہے اور اِس لیے مساوات

ک ا۲ فرسہ/فرت = ۔ک ج مہ ا (ب)

یا ا فرسہ/فرت = ۔ مہ ج (ج)

حاصل ہوتی ہے اور مساوات (ا)

فرد/فرت = ۔ مہ ج (د)

میں تحویل ہوتی ہے۔

اِن رشتوں سے و اور سہ کے گھٹاؤ کی شرحیں حاصل ہوتی ہیں جب تک پھسلن واقع ہو رہی ہو۔ صریحاً پھسلن رُک جاتی ہے جوں ہی د + سہ ا = ۔ کیونکہ

و + سہ ا، انگوٹھی کے زیریں ترین نقطہ کی آگے وار رفتار ہے ۔ مساواتوں (ج)
اور (د) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف ت}} \left(\text{و} + \text{سہ ا}\right) = -\text{۲ مہ ج}$$

اور ابتداً و + سہ ا کی قیمت و + طا ا ہے ۔ اِس لیے و + ا کو صفر میں
تحویل ہونے کے لیے وقت

$$\frac{\text{و} + \text{طا ا}}{\text{۲ مہ ج}}$$

مطلوب ہے ۔ اِس وقفہ کے بعد پھسلن رک جاتی ہے ۔ اِس لحہ پر انگوٹھی
کی رفتار و حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتی ہے :

$$\text{و} = \text{و} - \text{مہ ج} \left(\frac{\text{و} + \text{طا ا}}{\text{۲ مہ ج}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\text{و} - \text{طا ا}\right)$$

اِس لیے حرکت آگے وار یا پیچھے وار ہوگی بموجب اِس کے کہ ابتدائی رفتار
و > یا < طا ا ۔ پھسلن ایک دفعہ رک جانے کے بعد اِس کو پھر شروع
کرنے کے لئے کوئی قوت نہیں ہے اور اِس لیے انگوٹھی صرف یکساں رفتار
و کے ساتھ لڑھکتی جائے گی ۔ اگر و > طا ا تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت
سے دُور لڑھکتی جائے گی لیکن اگر و < طا ا تو وہ اپنے ابتدائی نقطہ حرکت پر
واپس آئے گی ۔

مثالیں

(۳۰۱)

۱ ۔ ایک دروازہ کے قبضوں کا خط انتصابی کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے
اور دروازہ اپنے توازن کے محل کے گرد گھومتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اِس کی حرکت
وہی ہے جو ایک خاص سادہ رقاص کی ہے، اِس رقاص کا طول معلوم کرو ۔
۲ ۔ ایک نشانہ دھات کی ایک مربع تختی سے بنا ہے جس کا کنارہ ا اور

کمیت ک ہے۔ اس کے بلند ترین کنارہ پر قبضہ لگا ہوا ہے اور یہ کنارہ افقی ہے۔ نشانہ کی سکون کی حالت میں اس پر ایک گولی کی ضرب پڑتی ہے جس کی کمیت ک ہے اور جو رفتار ۹ کے ساتھ حرکت کرتی ہوئی نشانہ کے ایک ایسے نقطہ پر لگتی ہے جو قبضوں کے خط کے نیچے گہرائی گ پر ہے۔ نشانہ کی وقوع پذیر حرکت معلوم کرو۔

۳ — ایک متجانس کرہ کو بغیر گردش کے ایک کھردرے مائل مستوی پر پھینکا گیا ہے، مستوی کا میلان ع ہے اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ثابت کرو کہ وہ وقت جس کی اثناء میں کرہ مستوی پر چڑھتا ہے وہی ہے جو ہوتا اگر مستوی چکنا ہوتا، نیز ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں کرہ پھسلتا ہے اُس وقت کے ساتھ جس میں وہ لڑھکتا ہے نسبت ۲ مس ع : ۷ مہ رکھتا ہے۔

۴ — نصف قطر ا کا ایک کرہ، نصف قطر ب کے ایک کروی پیالے کی مقعر سطح پر کے ایک نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ اس کو اچانک آزاد چھوڑ کر سطح پر نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ ان دو کروں کے مرکزوں کو ملانیوالا خط اسی طریقہ پر جھولتا ہے جس طرح طول $\frac{۷}{۵}$ (ب — ا) کا ایک سادہ رقاص۔

۵ — نصف قطر ا کے ایک کرہ کو نصف قطر ب کے ایک کرہ کی کھردری محدب سطح کے بلند ترین نقطہ پر سکون کی حالت میں پکڑا گیا ہے۔ پھر اس کو آزاد چھوڑ کر اس کو کرہ کی سطح کے نیچے لڑھکنے دیا گیا۔ ثابت کرو کہ کرے جدا ہوں گے جبکہ ان کے مرکزوں کو ملانے والا خط انتصابی کے ساتھ زاویہ جم$^{-۱}$ $\frac{۱۰}{۱۷}$ بنائے۔ صورت ب = ۰ کا امتحان کرو۔

۶ — ایک دائری حلقہ ایک چکنے افقی مستوی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے، اس پر ایک چھوٹی انگوٹھی جس کی کمیت حلقہ کی کمیت کا $\frac{۱}{ن}$ واں حصہ ہے پھسلتی ہے اور ان دونوں کے درمیان رگڑ کی قدر مہ ہے۔ ابتداً حلقہ ساکن تھا اور انگوٹھی حلقہ کے گرد زاوی رفتار سہ کے ساتھ حرکت کر رہی تھی ثابت کرو کہ انگوٹھی وقت $\frac{۱ + ن}{مہ\ سہ}$ کے بعد حلقہ کے لحاظ سے ساکن ہو جائے گی۔

جمود کے معیاروں کا عام نظریہ

جمود کے سر

۲۲۶ — فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم گردش کے ایک محور کے گرد گردش کر رہا ہے اور گردش کے محور کی سمتی جیوب التمام کسی تین ثابت محوروں کے حوالے سے ل، م، ن ہیں۔ فرض کرو کہ گردش کے محور پر کوئی نقطہ و مبدا لیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ل، کمیت ک_{1} کا کوئی ذرّہ ہے جس کا فاصلہ گردش کے محور سے ع ہے۔ فرض کرو کہ ل کے محدد لا، ما، ی ہیں اور ل ن (= ع)، ل سے گردش کے محور پر عمود ہے۔

ی ن ع ل و لا ما

شکل (۱۴۸)

چونکہ

$$\text{ول}^{2} = \text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} \quad (۳۰۲)$$

اور $\text{ون}^{2} = (\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی})^{2}$

اسلیے $\text{ع}^{2} = \text{ول}^{2} - \text{ون}^{2}$

$$= \text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} + \text{ی}^{2} - (\text{ل لا} + \text{م ما} + \text{ن ی})^{2}$$

$$= \text{لا}^{2}(\text{م}^{2} + \text{ن}^{2}) + \text{ما}^{2}(\text{ن}^{2} + \text{ل}^{2}) + \text{ی}^{2}(\text{ل}^{2} + \text{م}^{2})$$
$$- ۲\,\text{م ن} \times \text{ما ی} - ۲\,\text{ن ل} \times \text{ی لا} - ۲\,\text{ل م} \times \text{لا ما}$$

$$= \text{ل}^{2}(\text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}) + \text{م}^{2}(\text{ی}^{2} + \text{لا}^{2}) + \text{ن}^{2}(\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2})$$
$$- ۲\,\text{م ن} \times \text{ما ی} - ۲\,\text{ن ل} \times \text{ی لا} - ۲\,\text{ل م} \times \text{لا ما}$$

پس جمود کا معیار مہ، مساوات

$$\text{مہ} = \sum \text{ک}_{1}\,\text{ع}^{2}$$

= ل^2 Σ ک$_1$ (ما^2 + ی^2) + م^2 Σ ک$_1$ (ی^2 + لا^2) + ن^2 Σ ک$_1$ (لا^2 + ما^2)

- ۲ م ن Σ ک$_1$ ما ی - ۲ ن ل Σ ک$_1$ ی لا - ۲ ل م Σ ک$_1$ لا ما

= ل^2 ا + م^2 ب + ن^2 ج - ۲ م ن د - ۲ ن ل ع - ۲ ل م ف

.... (۱۲۴)

سے حاصل ہوگا جہاں

ا = Σ ک$_1$ (ما^2 + ی^2) ، وغیرہ

د = Σ ک$_1$ ما ی ، وغیرہ

یہ معلوم ہوگا کہ مقداریں ا ، ب ، ج علی الترتیب محوروں لا، ما، ی کے گرد جمود کے معیار ہیں۔ مقداروں د، ع، ف کو جمود کے حاصل ضرب کہتے ہیں۔

مساوات (۱۲۴) میں ل، م، ن کو مختلف قیمتیں دینے سے و میں سے گذرنے والے کسی خط کے گرد جمود کا معیار معلوم ہو سکتا ہے جب کہ چھ سروں ا، ب، ج، د، ع، ف کی قیمتیں معلوم ہو جائیں۔

جمود کا ناقص نما

۲۴۷ — مساوات

ا لا^2 + ب ما^2 + ج ی^2 - ۲ د ما ی - ۲ ع ی لا - ۲ ف لا ما = ک

جہاں ک کوئی مستقل ہے ایک مخروطی نما کو تعبیر کرتی ہے کیونکہ وہ دوسرے درجہ کی مساوات ہے۔ اگر سمتی جیوب التمام ل، م، ن کا سمتی نیم قطر ر ہو تو

$$ر^{2}(ا ل^{2} + ب م^{2} + ج ن^{2} - ۲ د م ن - ۲ ع ن ل - ۲ ف ل م) = ک$$

یا مساوات (۱۲۴) سے

$$ر^{2} = \frac{ک}{مـ} \qquad (۱۲۵)$$

(۳۰۳) چونکہ ل، م، ن کی تمام قیمتوں کے لیے مـ مثبت ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سمتی نیم قطر کی تمام سمتوں کے لیے ر² مثبت ہے۔ اس لیے مخروطی نما، ایک ناقص نما ہے۔

اِس ناقص نما کو نقطہ و کا **جمود کا ناقص نما** کہتے ہیں۔

مساوات (۱۲۵) کو لکھا جا سکتا ہے

$$مـ = \frac{ک}{ر^{2}}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ و میں سے گذرنے والے کسی محور کے گرد جمود کا معیار، جمود کے ناقص نما کے متوازی سمتی نیم قطر کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتا ہے۔

جمود کے صدر محاور

۲۴۸ — ناقص نما کی اِس طبیعی خاصیت سے یہ ظاہر ہے کہ ناقص نما خود وہی رہتا ہے خواہ محددوں کے محور کوئی بھی منتخب کئے جائیں۔ ناقص نما کے تین صدر محور ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ اِن محوروں کی سمتوں کو نقطہ و پر جمود کے صدر محاور کہا جاتا ہے۔

اگر نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لیا جائے تو ناقص نما کی مساوات میں م ای، ی لا، لا م کے سر غائب ہونے چاہئیں اس لیے

$$د = ع = ف = ۰$$

پس و پر جمود کے صدر محوروں کو محددوں کے محور لینے سے مساوات

(۱۲۴) شکل ذیل اختیار کرتی ہے:

$$م = ل^{۲} ا + م^{۲} ب + ن^{۲} ج$$

زاویٔی رفتار طا کی گردش کی توانائی بالحرکت

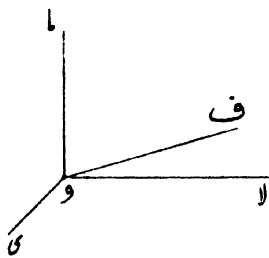
$$\frac{۱}{۲} م طا^{۲} = \frac{۱}{۲} (ل^{۲} ا + م^{۲} ب + ن^{۲} ج) طا^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲} (ا سہ_{۱}^{۲} + ب سہ_{۲}^{۲} + ج سہ_{۳}^{۲}) \quad (۱۲۶)$$

ہے جہاں طا کے اجزائے ترکیبی $سہ_{۱}$، $سہ_{۲}$، $سہ_{۳}$ ہیں (دیکھو دفعہ ۲۳۲)۔

اُستوار جسم کی حرکت کی عام مساواتیں

(۳۰۴)

۲۴۹ — فرض کرو کہ اُستوار جسم کا کوئی نقطہ و ہے اور فرض کرو کہ ولا، وما، وی محوروں کا ایک جٹ ہے جو حرکت کرتا ہے اس طریقہ پر کہ نقطہ و اُستوار جسم میں اپنا محل قائم رکھتا ہے اور محاور اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہتے ہیں۔

فرض کرو کہ و کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ان محوروں پر ع، د، ط ہیں — ان محوروں کے لحاظ سے اُستوار جسم کی حرکت کسی محور وف کے گرد جو و میں سے گذرے گردش کی حرکت ہوگی —

ما
ف
و
لا
ی

شکل (۱۴۹)

فرض کرو کہ یہ گردش، تین محوروں کے گرد گردشوں $سہ_{لا}$، $سہ_{ما}$، $سہ_{ی}$ سے مرکب ہے —

فرض کرو کہ ان محوروں کے لحاظ سے اُستوار جسم کے کسی نقطہ کے

محدد لا، ما، ی ہیں ۔ اُس فریم کے لحاظ سے جو و کے ساتھ حرکت کرنے والے محوروں سے فراہم ہوتا ہے نقطہ لا، ما، ی کی رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\frac{فرلا}{فرت} ،\quad \frac{فرما}{فرت} ،\quad \frac{فری}{فرت}$$

ہیں اور فضا میں اِس فریم کی رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$ع ، و ، ط$$

ہیں ۔ اِس لیے نقطہ لا، ما، ی کی کُل رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$ع + \frac{فرلا}{فرت} ،\quad و + \frac{فرما}{فرت} ،\quad ط + \frac{فری}{فرت}$$

ہیں ۔

فرض کرو کہ کسی لمحہ پر محوروں لا، ما، ی کے گرد بیرونی قوتوں کے معیاروں کے مجموعے علی الترتیب ل، م، ن سے تعبیر ہوتے ہیں تو حسب دفعہ (۲۴۳)

$$ل = \Sigma\,(ما ے - ی ما) \text{، وغیرہ}$$

نقطہ لا، ما، ی پر کمیت ک کے ذرہ کے معیار حرکت کا معیار محور لا کے گرد

$$ک\left[ما\left(ط + \frac{فری}{فرت}\right) - ی\left(و + \frac{فرما}{فرت}\right)\right]$$

ہے ۔ پس دفعہ (۲۴۳) کے مسئلہ کی رُو سے

$$ل = \frac{فر}{فرت}\Sigma\,ک\left[ما\left(ط + \frac{فری}{فرت}\right) - ی\left(و + \frac{فرما}{فرت}\right)\right] \quad (۱۲۷) \quad (۳۰۵)$$

علیٰ ہذا دوسرے محوروں کے لیے مشابہ مساواتیں ہیں ۔

۲۵۰ ۔ محددوں کے متحرک محوروں کے لحاظ سے ذرہ ک کے محدد لا، ما، ی ہیں اور اِس لیے و لا کے گرد گردش سے لا سے ذرہ کی جو رفتار حاصل ہوتی ہے اُس کے اجزائے ترکیبی

$$. \text{،} - \text{سہ}_{\text{لا}}\ \text{ی} \text{،} - \text{سہ}_{\text{لا}}\ \text{ما} $$

ہیں —

اسی طرح گردشوں $\text{سہ}_{\text{ما}}$ ، $\text{سہ}_{\text{ی}}$ سے جو رفتاریں حاصل ہوتی ہیں
اِن کے اجزائے ترکیبی

$$ \text{سہ}_{\text{ما}}\ \text{ی} \text{،} \quad . \quad \text{،} - \text{سہ}_{\text{ما}}\ \text{لا} $$

اور

$$ - \text{سہ}_{\text{ی}}\ \text{ما} \text{،} \quad \text{سہ}_{\text{ی}}\ \text{لا} \text{،} \quad . $$

ہیں —

اِن رفتاروں کو مرکب کرنے سے حاصل رفتار کے اجزائے ترکیبی
متذکرۂ محوروں کے لحاظ سے حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں :

$$ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{ما}}\ \text{ی} - \text{سہ}_{\text{ی}}\ \text{ما} \text{،} $$

$$ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{ی}}\ \text{لا} - \text{سہ}_{\text{لا}}\ \text{ی} \text{،} $$

$$ \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{لا}}\ \text{ما} - \text{سہ}_{\text{ما}}\ \text{لا} $$

اسی طرح

$$ \text{ما}\ \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{سہ}_{\text{لا}}\ (\text{ما}^{2} + \text{ی}^{2}) - \text{سہ}_{\text{ما}}\ \text{لا ما} - \text{سہ}_{\text{ی}}\ \text{لا ی} $$

اور ت کے لحاظ سے اِس مساوات کو تفرق کرنے پر مساوات (۱۲۷)
کے دائیں جانبی رکن کے ایک حصہ کی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:

$$ \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left[\Sigma\ \text{ک}\ \left(\text{ما}\ \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} - \text{ی}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} \right) \right] $$

$$ = \Sigma\ \text{ک}\ (\text{ما}^{2} + \text{ی}^{2})\ \frac{\text{فرسہ}_{\text{لا}}}{\text{فرت}} - \Sigma\ \text{ک لا ما}\ \frac{\text{فرسہ}_{\text{ما}}}{\text{فرت}} - \Sigma\ \text{ک لا ی}\ \frac{\text{فرسہ}_{\text{ی}}}{\text{فرت}} $$

$$ - \Sigma\ \text{ک ما ی}\ (\text{سہ}_{\text{ما}}^{2} - \text{سہ}_{\text{ی}}^{2}) + \Sigma\ \text{ک}\ (\text{ما}^{2} - \text{ی}^{2})\ \text{سہ}_{\text{ما}}\ \text{سہ}_{\text{ی}} $$

- ∑ ک ی لا سہ سہ لا + ∑ ک لا ما سہ ی سہ لا

= ا فر سہ̇ لا / فر ت - ف فر سہ̇ ما / فر ت - ع فر سہ̇ ی / فر ت

- د (سہ² ما - سہ² ی) - (ب - ج) سہ ما سہ ی - ع سہ ما سہ لا

+ ف سہ ی سہ لا

۲۵۱ — فرض کرو کہ اُستوار جسم کے مرکز ثقل کے محدد لاَ، ماَ، یَ ہیں (۳۰۶)
اور اس کی کل کمیت ک ہے۔ اب

∑ ک لا = ک لاَ، وغیرہ

اس لیے مساوات (۱۲۷) کے دائیں جانبی رکن کے بقیہ حصہ کی قیمت حسب ذیل ہے:

فر / فر ت ∑ ک (ما ط - ی و) = فر / فر ت (ک ماَ ط - ک یَ و)

= ک فر / فر ت (ماَ ط - یَ و)

پس مساوات (۱۲۷) حسب ذیل شکل اختیار کرتی ہے:

ک فر / فر ت (ماَ ط - یَ و) + ا فر سہ̇ لا / فر ت - ف فر سہ̇ ما / فر ت

- ع فر سہ̇ ی / فر ت - د (سہ² ما - سہ² ی) - (ب - ج) سہ ما سہ ی

- ع سہ ما سہ لا + ف سہ ی سہ لا = ل (۱۲۸)

اگر محوروں پر کُل اجزائے ترکیبی ∑ لا، ∑ ما، ∑ ے سے

تعبیہ ہوں تو دفعہ (۱۸۰) کی رو سے حسب شکل ذیل مزید مساواتیں حاصل ہوتی ہیں :

$$ک \frac{فر}{فرت}(۶ + \frac{فر لا}{فرت}) = ع لا \qquad (۱۲۹)$$

مساواتیں (۱۲۸) اور (۱۲۹) اور اِن کے متناظر دوسرے دو محوروں کے لحاظ سے مساواتوں کے دو دو سرے زوج ایک اُستوار جسم کی حرکت کی مساواتیں ہیں جبکہ یہ جسم کسی قوتوں کے تحت حرکت کر رہا ہو۔

یولر کی مساواتیں

۲۵۲ — اب فرض کرو کہ محوروں کا ایک دوسرا جٹ ہے جس کو ہم ۱، ۲، ۳ سے تعبیر کریں گے۔ فرض کرو کہ یہ محور حرکت کرتے ہیں اس طور پر کہ اِن کا محل اُستوار جسم میں ہمیشہ وہی رہتا ہے، نقطہ و (جس کے متعلق ہم فرض کر چکے ہیں کہ وہ ہمیشہ اُستوار جسم میں ایک ہی محل پر قائم رہتا ہے) ان محوروں کا مبدا ہے۔ فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ پر محاور ۱، ۲، ۳ محوروں لا، ما، ی پر منطبق ہوتے ہیں۔ تب محوروں ۱، ۲، ۳ کے حوالے سے جمود کے سروں کی جو قیمتیں حاصل ہوں گی وہ وہی ہونگی جو محوروں لا، ما، ی کے حوالے سے حاصل ہوئی تھیں یعنی (ا، ب، ج، د، ع، ف)۔ مزید بریں وہ تمام رفتاریں جن کا حوالہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے ذریعہ دیا گیا ہو وہی قیمتیں رکھیں گی جو وہ رکھتیں اگر اِن کا حوالہ محوروں لا، ما، ی سے دیا جاتا۔ فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے گرد گردشیں $سم_۱$، $سم_۲$، $سم_۳$ ہیں تو زیر بحث لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

$$سم_۱ = سم_{لا}،\quad سم_۲ = سم_{ما}،\quad سم_۳ = سم_{ی}$$

اِس کا کسی لمحہ پر درست ہونا ضروری نہیں ہے اِلّا اُس لمحہ کے جس پر محور منطبق ہوتے ہیں اور اس لیے وقت کے لحاظ سے اِن مساواتوں کا

تفرق کرنا اور اس سے

$$\frac{فر س_۱}{فر ت} = \frac{فر س_{لا}}{فر ت} \quad وغیرہ$$

اخذ کرنا دُرست نہیں ہے ۔ تاہم یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ آخری نتیجہ زیرِ بحث لمحہ پر درست ہے ۔ فرض کرو کہ و میں سے گذرنے والا کوئی خط و ق سے تعبیر ہوتا ہے، فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے لحاظ سے اِس خط کی سمتی جیوب التمام جم عہ، جم بہ، جم جہ ہیں اور فرض کرو کہ و ق کے گرد زاویٰ رفتار کا جزو ترکیبی طا$_ق$ ہے ۔ اگر ایک محور و ف کے گرد جسکی سمتی جیوب التمام محوروں ۱، ۲، ۳ کے حوالے سے ل، م، ن ہیں حاصل زاوئی رفتار کی مقدار طا ہو تو

$$طا_ق = طا \, جم \, ف و ق$$
$$= طا (ل \, جم \, عہ + م \, جم \, بہ + ن \, جم \, جہ)$$
$$= س_۱ \, جم \, عہ + س_۲ \, جم \, بہ + س_۳ \, جم \, جہ$$

خط و ق خواہ کوئی ہو یہ مساوات ہمیشہ درست ہوگی، اِس لیے ہم اِس کو وقت کے لحاظ سے تفرق کر سکتے ہیں اور اِس طرح حاصل کرتے ہیں

$$\frac{فر طا_ق}{فر ت} = \frac{فر س_۱}{فر ت} جم \, عہ + \frac{فر س_۲}{فر ت} جم \, بہ + \frac{فر س_۳}{فر ت} جم \, جہ$$

$$- س_۱ \, جب \, عہ \frac{فر عہ}{فر ت} - س_۲ \, جب \, بہ \frac{فر بہ}{فر ت} - س_۳ \, جب \, جہ \frac{فر جہ}{فر ت}$$

(۱۳۰) . . . .

اب فرض کرو کہ خط و ق، و لا پر منطبق ہوتا ہے تو طا$_ق$ = س$_{لا}$ ۔ زیرِ بحث لمحہ پر بہ = جہ = $\frac{\pi}{۲}$، عہ = ۰ ۔ نیز $\frac{فر بہ}{فر ت}$ وہ شرح ہے جس سے و لا اور محور ۱ کا درمیانی زاویہ بڑھتا ہے اور صریحاً یہ س$_۳$ ہے ۔ اسی طرح $\frac{فر جہ}{فر ت}$ = ـ س$_۲$، اور $\frac{فر عہ}{فر ت}$ = ۰ ۔

(۳۰۸) اِن تمام اندراجات کو عمل میں لانے سے ہم یہ معلوم کرتے ہیں کہ زیر بحث لمحہ پر جس پر محوروں کے یہ دو جٹ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں مساوات (۱۳۰) شکل

$$\frac{فرس_{ل}}{فرت} = \frac{فرس_{1}}{فرت} - س_{۲} \times س_{۳} + س_{۳} \times س_{۲}$$

$$= \frac{فرس_{1}}{فرت}$$

اختیار کرتی ہے۔ پس زیر بحث لمحہ پر رشتے

$س_{ل} = س_{1}$ وغیرہ

اور نیز $\frac{فرس_{ل}}{فرت} = \frac{فرس_{1}}{فرت}$ وغیرہ

حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ مبدا یا تو ایک ثابت نقطہ ہے یا جسم کا مرکز ثقل۔ پہلی صورت میں

$ع = و = ط = ۰$ ہمیشہ

دوسری صورت میں

$\bar{ل} = \bar{م} = \bar{ی} = ۰$ ہمیشہ

نیز فرض کرو کہ حوالے کے محور جمود کے صدر محور منتخب کئے گئے ہیں جو مبدا میں سے گذرتے ہیں تو

$$د = ع = ف = ۰$$

یہ تمام اندراجات مساوات (۱۲۸) اور اس کے مشابہ دو مساواتوں میں کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساواتیں شکل

$$ا \frac{فرس_{1}}{فرت} - (ب - ج) س_{۲} س_{۳} = ل \qquad (۱۳۱)$$

$$ب \frac{فرس_{۲}}{فرت} - (ج - ا) س_{۳} س_{1} = م \qquad (۱۳۲)$$

$$\text{ج}\,\frac{\text{فرسہ}_{3}}{\text{فزت}} - (\text{ا} - \text{ب})\,\text{سہ}_{1}\,\text{سہ}_{2} = \text{ن} \qquad (۱۳۳)$$

اختیار کرتی ہیں۔ اِن مساواتوں کو یولر کی مساواتیں کہا جاتا ہے۔

(۳۰۹)

سیّارہ کی گردش

۲۵۳ — اِن مساواتوں کے استعمال کی پہلی مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک اُستوار جسم کی حرکت کا امتحان کرتے ہیں جو ایک محور کے گرد متشاکل ہے اور ایسی قوتوں کے زیرِ عمل ہے جو سب کی سب مرکزِ ثقل میں سے گذرتی ہیں۔ یہ شرطیں تقریبی طور پر اُن شرطوں کو تعبیر کرتی ہیں جو حاصل ہوتی ہیں جب کہ ایک سیارہ اپنے مدار میں حرکت کرتا ہے یا ایک ستارہ فضاء میں حرکت کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم مرکزِ ثقل کو مبداء اور تشاکل کے محور کو محور ا لیتے ہیں۔ فرض کرو کہ جمود کے معیار ا، ب، ب ہیں۔ تب حرکت کی مساواتیں ہیں:

$$\text{ا}\,\frac{\text{فرسہ}_{1}}{\text{فزت}} = 0\,، \qquad (۱۳۴)$$

$$\text{ب}\,\frac{\text{فرسہ}_{2}}{\text{فزت}} = (\text{ب} - \text{ا})\,\text{سہ}_{3}\,\text{سہ}_{1}\,، \qquad (۱۳۵)$$

$$\text{ب}\,\frac{\text{فرسہ}_{3}}{\text{فزت}} = -(\text{ب} - \text{ا})\,\text{سہ}_{1}\,\text{سہ}_{2}\,، \qquad (۱۳۶)$$

پہلی مساوات سے سہ_{1} کا مستقل ہونا فوراً معلوم ہو جاتا ہے۔ فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے۔ اب اگر ہم لکھیں

$$\text{گ} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ب}}\,\text{طا}$$

تو مساواتیں (۱۳۵) اور (۱۳۶) ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{فر سہ}_{۲}}{\text{فر ت}} = \text{گ سہ}_{۳}\text{،} \qquad (۱۳۷)$$

$$\frac{\text{فر سہ}_{۳}}{\text{فر ت}} = -\text{گ سہ}_{۲}\text{،} \qquad (۱۳۸)$$

اس طرح
$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{سہ}_{۲}}{\text{فر ت}^{۲}} = \text{گ} \frac{\text{فر سہ}_{۳}}{\text{فر ت}} = -\text{گ}^{۲}\ \text{سہ}_{۲}$$

اور اس کا حل ہے

$$\text{سہ}_{۲} = \text{ع جم (گ ت + صہ)}$$

اور مساوات (۱۳۷) سے اب حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ}_{۳} = -\text{ع جب (گ ت + صہ)}$$

اِس لیے لمحہ ت پر زاویٔ رفتار کے اجزائے ترکیبی

$$\text{ط}_{۱}\text{،}\ \text{ع جم (گ ت + صہ)}\text{،}\ -\text{ع جب (گ ت + صہ)} \qquad (۳۱۰)$$

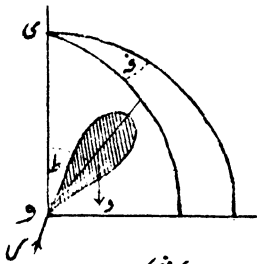
ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ گردش کا محور ایک مخروط مرتسم کرتا ہے اور اس کا دَور

$$\frac{۲\pi}{\text{گ}}\ \text{یا}\ \frac{۲\pi}{\text{ط}_{۱}} \cdot \frac{\text{ب}}{\text{ب} - \text{ا}}$$ ہے۔

اگر ب، ا سے بہت قریب ہو تو دَور بہت بڑا ہو سکتا ہے اور اِس لیے حرکت بہت سُست ہوگی۔ یہ زمین کی صورت میں واقع ہوتا ہے، گردِش کے محور کی حرکت وہ مظہر پیدا کرتی ہے جس کو عرض بلد کا تغیر کہتے ہیں اور اِس کا دَور تقریباً ۴۲۸ یوم ہے۔ چونکہ دَور $\frac{۲\pi}{\text{ط}_{۱}}$ تقریباً ایک یوم کو تعبیر کرتا ہے اِس لیے ہم اِس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ زمین کے لیے $\frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ب}}$ کا رتبہ $\frac{۱}{۴۲۸}$ ہے۔

اِس مقدار کی صحیح قیمت ۰۰۳۲۸، ہے، یہ تناقص زمین کی نامکمل اُستواریت کا نتیجہ ہے ۔

لٹو کی حرکت

۲۵۴ — اِس باب کے طریقوں کی دوسری مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم ایک گھومتے ہوئے لٹو کی حرکت پر غور کرتے ہیں ۔ ہم فرض کریں گے کہ لٹو ایک گردشی مجسم ہے جو ایک کیل پر گھوم رہا ہے جس کی نوک ایک نقطہ ہے اور کیل اور اُس سطح کے درمیان تماس جس پر وہ ٹِکا ہوا ہے پھسلن کو روکنے کے لیے کافی کھردرا ہے ۔ پس نقطہ تماس ایک ثابت نقطہ و ہے ۔ فرض کرو کہ ہم فضاء میں ثابت محور ولا، وما، وی لیتے ہیں جن میں محور ی انتصابی ہے اور نیز فرض کرو کہ جسم میں ثابت محور ۱، ۲، ۳ ہیں جو و میں سے گذرنے والے جمود کے صدر محوروں پر منطبق ہوتے ہیں ۔ فرض کرو کہ محور ۱، لٹو کا تشاکل کا محور ہے اور فرض کرو کہ محوروں ۱، ۲، ۳ کے گرد جمود کے معیار ا، ب، ب ہیں ۔

شکل (۱۵۰)

یولر کی مساواتوں میں سے پہلی مساوات ہو جاتی ہے

$$ا \frac{فر سہ_۱}{فر ت} = ۰$$

کیونکہ ب = ج اور ل = ۰ ۔ اِس طرح سہ۱ مستقل ہے، فرض کرو کہ وہ طا کے مساوی ہے ۔

فرض کرو کہ لٹو کا محور اُس اکائی کرہ کو جو و کے گرد کھینچا گیا ہے ایک

نقطہ پر قطع کرتا ہے جس کے قطبی محدد ا ، طہ ، فہ ہیں جہاں طہ وہ زاویہ ہے جو انتصابی اور لٹو کے محور کے درمیان ہے۔

(۳۱۱) لٹو کی توانائی بالحرکت بموجب دفعہ (۲۴۸)

$$\frac{1}{2}\left[\text{ا طا}^2 + \text{ب} (\text{سہ}_2^2 + \text{سہ}_3^2) \right]$$

ہے اور توانائی بالقوہ ک ج ھ جم طہ ہے جہاں ھ وہ فاصلہ ہے جو لٹو کے مرکز ثقل اور و کے درمیان ہے۔ اِس طرح توانائی کی مساوات ہے

$$\text{ا طا}^2 + \text{ب} (\text{سہ}_2^2 + \text{سہ}_3^2) + 2 \text{ک ج ھ جم طہ} = \text{ع} \quad (۱۳۹)$$

جہاں ع ایک مستقل ہے۔ اِس کو ایک مختلف شکل میں رکھا جا سکتا ہے۔ کیونکہ $\text{سہ}_2^2 + \text{سہ}_3^2$ ، لٹو کے محور کی زاوئی رفتار کا مربع ہے اور اِس لیے اکائی کرہ پر کے نقطہ ا ، طہ ، فہ کی حقیقی رفتار کا مربع ہے اور اِس لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{سہ}_2^2 + \text{سہ}_3^2 = \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{جب}^2 \text{طہ} \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2$$

توانائی کی مساوات اب شکل

$$\text{ا طا}^2 + \text{ب} \left[\left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}}\right)^2 + \text{جب}^2 \text{طہ} \left(\frac{\text{فرفہ}}{\text{فرت}}\right)^2 \right]$$

$$+ 2 \text{ک ج ھ جم طہ} = \text{ع} \quad (۱۴۰)$$

اختیار کرتی ہے۔

ہم ایک تیسری مساوات اِس واقعہ سے حاصل کر سکتے ہیں کہ انتصابی محور و ی کے گرد زاوئی معیار حرکت مستقل ہے۔ اِس زاوئی معیار حرکت کو

(ا) معیار حرکت جو محور ا کے گرد گردش طا کی وجہ سے ہے ،

اور (ب) معیار حرکت جو لٹو کے محور کی حرکت کی وجہ سے ہے

کا مرکب خیال کیا جا سکتا ہے۔

محور ا کے گِرد گردش طا کو پھر گردشوں طا جب طه، طا جم طه میں تحلیل کیا جا سکتا ہے جو علی الترتیب افقی اور انتصابی کے گِرد ہیں، اِن گردشوں سے معیارِ حرکتوں کے معیار افقی اور انتصابی کے گِرد ا طا جب طه، ا طا جم طه حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے معیارِ حرکت کا معیار جو حصہ (ا) سے شامل ہوتا ہے ا طا جم طه ہے۔

لٹو کے محور کی حرکت کو دو گردشوں میں تحلیل کیا جا سکتا ہے:

(۱) زاوئی رفتار جب طه $\frac{\text{فر فه}}{\text{فر ت}}$ کی گردش جو اُس محور کے گِرد ہے جو انتصابی کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ۔ طه بناتا ہے،

(۲) زاوئی رفتار $\frac{\text{فر طه}}{\text{فر ت}}$ کی گردش جو ایک افقی محور کے گِرد ہے۔ (۳۱۲)

اول الذکر (۱) کو انتصابی کے گِرد گردش جب^2 طه $\frac{\text{فر فه}}{\text{فر ت}}$ اور ایک افقی محور کے گِرد گردش جب طه جم طه $\frac{\text{فر فه}}{\text{فر ت}}$ میں تحلیل کیا جا سکتا ہے۔

اِس لیے حرکت کے حصہ (ب) سے انتصابی کے گِرد جو معیارِ حرکت کا معیار شامل ہوتا ہے وہ

$$\text{ب جب}^2\text{ طه } \frac{\text{فر فه}}{\text{فر ت}}$$

ہے اور چونکہ انتصابی کے گِرد معیارِ حرکت کا معیار ایک مستقل قیمت رکھتا ہے اِس لیے فرض کرو کہ یہ مستقل گ ہے تو

$$\text{ا طا جم طه} + \text{ب جب}^2\text{ طه } \frac{\text{فر فه}}{\text{فر ت}} = \text{گ} \qquad (۱۴۱)$$

اگر ہم $\frac{\text{فر فه}}{\text{فر ت}}$ کو اِس مساوات اور مساوات (۱۴۰) سے ساقط

کریں تو حاصل ہوتا ہے

ب جب^۲ طہ [ا طا^۲ + ب (فرطہ/فرت)^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ - ع]

+ (گ - ا طا جم طہ)^۲ = ۰ (۱۴۲)

اِس مساوات سے طہ کی قیمت کے تغیرات حاصل ہوتے ہیں اور اِس لیے انتصابی کے ساتھ لٹو کے محور کے میلان میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں اِن کو ہم معلوم کر سکتے ہیں۔

طہ کی اعظم اور اقل قیمتیں، فرطہ/فرت = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں اور اِس لیے یہ قیمتیں مساوات

ب (۱ - جم^۲ طہ) [ا طا^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ - ع]

+ (گ - ا طا جم طہ)^۲ = ۰ (۱۴۳)

کی اصلیں ہیں۔

فرض کرو کہ اِس مساوات کی دائیں جانب کو ہم ف (جم طہ) سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب چونکہ ف، تیسرے درجہ کا ایک تفاعل ہے اِسلیے جم طہ کی تین اصلیں ہوں گی۔ فرض کرو کہ لٹو کو زاویہ طہ = طہ. پر چلایا گیا ہے اور فرطہ/فرت کی قیمت (فرطہ/فرت). کے مساوی ہے۔ تب مساوات (۱۴۲) سے

ب جب^۲ طہ. [ا طا^۲ + ب (فرطہ/فرت)^۲. + ۲ ک ج ھ جم طہ. - ع]

+ (گ - ا طا جم طہ.)^۲ = ۰

اور اِس لیے ف (جم طہ.) = ب جب^۲ طہ. [ا طا^۲ + ۲ ک ج ھ جم طہ. - ع]

$$+ (گ - ا طا جم طہ)^۲ = - ب^۲ جب^۲ طہ \left(\frac{فر طہ}{فر ت}\right)^۲$$

اِس لیے ف (جم طہ) منفی ہے۔ ہم آسانی سے مساوات (۱۴۳) سے معلوم کرتے ہیں کہ (۳۱۴)

$$ف (۱) = (گ - ا طا)^۲$$

اِس لیے ف (۱) مثبت ہے۔

نیز $$ف (-۱) = (گ + ا طا)^۲$$

اِس لیے ف (-۱) مثبت ہے اور

$$ف (+ \infty) = - ۲ ک ن ہ ب (+ \infty)^۳$$

جو منفی ہے۔ اِس طرح ہم دیکھ چکے ہیں کہ

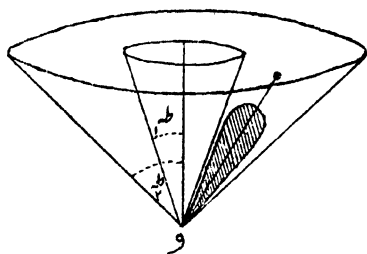
جب، جم طہ = + ∞ تو ف (جم طہ) منفی ہے،
جب، جم طہ = ۱ تو ف (جم طہ) مثبت ہے،
جب، جم طہ = جم طہ. تو ف (جم طہ) منفی ہے،
جب، جم طہ = -۱ تو ف (جم طہ) مثبت ہے۔

اِس لیے کعبی ف (جم طہ) = ۰ کی تین اصلیں حسب ذیل طریقہ پر واقع ہوتی ہیں:

ایک اصل طہ = طہ۱ جو جم طہ = ۱ اور جم طہ = جم طہ. کے درمیان ہے
ایک اصل طہ = طہ۲ جو جم طہ = جم طہ. اور جم طہ = -۱ کے درمیان ہے
ایک اصل وہ ہے جس کے لیے جم طہ عدداً اکائی سے بڑا ہے
اور اِس لیے طہ کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہیں ہوتی۔

اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ وہ نقطے جن پر $\frac{فر طہ}{فر ت}$ معدوم ہو سکتا ہے

صرف طہ = طہ۱، اور طہ = طہ۲ ہیں۔ اِن نقطوں پر $\frac{فر طہ}{فر ت}$ معدوم ہوتا ہے

اور چونکہ اِن میں سے کسی نقطہ پر مساوی اصلیں نہیں ہیں اِس لیے

شکل (۱۵۱)

$\frac{\text{ف(طہ)}}{\text{ق(ت)}}$ اِن نقطوں پر پہنچ کر علامت تبدیل کرتا ہے اور اِس لیے طہ، صرف قیمتوں طہ۱ اور طہ۲ کے درمیان تبدیل ہو سکتا ہے۔

پس لٹّو کا محور دو مخروطوں طہ = طہ۱ اور طہ = طہ۲ کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔

(۳۱۴) **۲۵۵** — فرض کرو کہ ہم وہ کم سے کم زاویٔ معیار حرکت معلوم کرنا چاہتے ہیں جو لٹّو کا ہونا چاہیے تاکہ وہ بغیر گر پڑنے کے گھومتا رہے۔ اس کے لیے ہم مان سکتے ہیں کہ لٹّو گرے گا اگر کبھی طہ، ایک خاص حد طہ۳ سے تجاوز کرے خواہ اس کا گرنا کیل کے پھسلنے سے یا اس کا پہلو زمین کو مس کرنے سے وقوع پذیر ہوا ہو۔ وہ شرط کہ لٹّو گر نہ پڑے یہ ہے کہ طہ۲ کو طہ۳ سے کم ہونا چاہیے اور اِس لیے ف (جم طہ۳) کو مثبت ہونا چاہیے۔ اسلئے ع، گ، اور طا کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ

$$\text{ب جب}^2\text{طہ}_3(\text{ا طا}^2 + 2\text{ک ج ھ جم طہ}_3 - \text{ع}) + (\text{گ} - \text{ا طا جم طہ}_3)^2$$

مثبت ہو۔

فرض کرو کہ لٹّو کو انتصابی کے ساتھ میلان طہ۰ پر ابتدًا گھمایا گیا ہے اور لٹّو اپنے محور کے گرد گردش طا کے سوا کوئی اور حرکت نہیں رکھتا۔ اب مساواتوں (۱۴۰) اور (۱۴۱) سے

$$\text{ع} = \text{ا طا}^2 + 2\text{ک ج ھ جم طہ}_0\text{،}$$
$$\text{گ} = \text{ا طا جم طہ}_0\text{.}$$

اِس طرح

$$\text{ف(جم طہ}_3) = \text{ب جب}^2\text{طہ}_3(\text{ا طا}^2 + 2\text{ک ج ھ جم طہ}_3 - \text{ع})$$

+ (گ - ا طا جم طہ۳)^۲

= ب جب^۲ طہ۲ × ۲ گ ج ھ (جم طہ۲ - جم طہ) + ا^۲ طا^۲ (جم طہ۲ - جم طہ)^۲

= (جم طہ۲ - جم طہ) [۲ گ ج ھ ب جب^۲ طہ۲ + ا^۲ طا^۲ (جم طہ۲ - جم طہ)] (۱۴۴)

چونکہ لٹو کو ایک ایسے محل میں ضرور چلایا گیا ہے جس میں وہ گھوم سکتا ہے اس لیے جم طہ۲ - جم طہ کی قیمت ضرور منفی ہے۔ اس لیے ف (جم طہ۲) کے مثبت ہونے کے لیے

ا^۲ طا^۲ (جم طہ - جم طہ۲) - ۲ گ ج ھ ب جب^۲ طہ۲ (۱۴۵)

کو مثبت ہونا چاہیے یا

طا^۲ > (۲ گ ج ھ ب جب^۲ طہ۳) / (ا^۲ (جم طہ - جم طہ۳)) (۱۴۶)

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ا بہت چھوٹا ہے تو طا کی وہ قیمت جو لٹو کو گرنے سے بچانے کیلئے مطلوب ہے بہت بڑی ہے۔ اس لیے چھوٹی عمودی تراش کے لٹو کو گھمانا بہت مشکل ہے مثلاً سیسے کی پنسل یا نوکدار تار کو۔

اگر ہم اُس زاویہ کا انتخاب کر سکیں جس پر لٹو گھومنا شروع کرتا ہے تو گویا جم طہ اختیاری ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ طا کی مطلوبہ قیمت کم سے کم ہوگی جبکہ جم طہ اعظم ہو یعنے جبکہ لٹو کو انتصاباً گھمایا گیا ہو۔ اس صورت میں لٹو گھومیگا اگر (۳۱۵)

طا^۲ > (۲ گ ج ھ ب جب^۲ طہ۳) / (ا^۲ (۱ - جم طہ۳))

یا اگر طا^۲ > (۲ گ ج ھ ب (۱ + جم طہ۳)) / ا^۲

۲۵۶ ـــ بالعموم اگر لٹو انتصاباً گھومنے کی ابتدا کرے اور اس کے محور کے گرد خالص گردش کے سوا کوئی اور رفتار نہ ہو تو مساوات (۱۴۴) میں جم طہ = ۱ رکھنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف(جم طہ)} = (\text{۱} - \text{جم طہ})^{\text{۲}} \left[\text{اَ}^{\text{۲}}\,\text{طا}^{\text{۲}} - \text{۲ک ج ھ ب}\,(\text{۱} + \text{جم طہ}) \right]$$

مساوات ف (جم طہ) = ۰ کی اصلیں ہیں

$$\text{جم طہ} = +\text{۱}\,،\ +\text{۱}\,،\ \frac{\text{اَ}^{\text{۲}}\,\text{طا}^{\text{۲}}}{\text{۲ک ج ھ ب}} - \text{۱}$$

فرض کرو کہ ہم لکھتے ہیں

$$\text{طا.}^{\text{۲}} = \frac{\text{۴ک ج ھ ب}}{\text{اَ}^{\text{۲}}}$$

تو جب، طا^{۲} = طا.^{۲} تو اصلیں حاصل ہوتی ہیں

$$\text{جم طہ} = +\text{۱}\,،\ +\text{۱}\,،\ +\text{۱}$$

اور جب، طا^{۲} > طا.^{۲} تو تیسری اصل اکائی سے بڑی ہے اور جب، طا^{۲} < طا.^{۲} تو تیسری اصل اکائی سے کم ہے، فرض کرو جم طہ = جم ظہ جہاں ظہ ایک حقیقی زاویہ ہے جو مساوات

$$\text{جم ظہ} = \frac{\text{اَ}^{\text{۲}}\,\text{طا}^{\text{۲}}}{\text{۲ک ج ھ ب}} - \text{۱} = \text{۱} - \frac{\text{۲}\,(\text{طا.}^{\text{۲}} - \text{طا}^{\text{۲}})}{\text{طا.}^{\text{۲}}} \qquad (\text{۱۴۷})$$

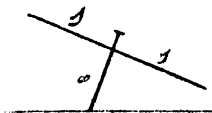
سے حاصل ہوتا ہے۔

پس جب تک طا^{۲} > طا.^{۲} اہتزازات منطبق حدود طہ = ۰ اور طہ = ۰ کے درمیان مقید رہتے ہیں اور اس لیے لٹو انتصابی رہتا ہے لیکن جوں ہی طا^{۲} < طا.^{۲} اہتزازات حدود طہ = ۰ اور طہ = ظہ کے درمیان ہونے لگتے ہیں۔

فرض کرو کہ ہم لٹو کو زاویٔی رفتار طا سے جو طا. سے بڑی ہے چلاتے ہیں، اس لیے پہلے پہل اس کا محور انتصابی ہے اور لٹو کی حرکت صرف اس کے محور کے گرد گردش کی حرکت ہے۔ اب طہ کی حقیقی اصلیں ۰، ہیں

اور اس لیے اہتزازات کی کوئی سعت نہیں ہے اور لٹو کا محور ٹھیک انتصابی رہتا ہے (۳۱۶)
اس کو انگریزی عام زبان میں کہتے ہیں کہ لٹو "Asleep" ہے اور اردو میں اسکو لٹو کی نیند کہا جاتا ہے
اگر مفروضہ شرطیں بدرجہ اتم پوری ہوتیں تو یہ حرکت دائم جاری رہتی
لیکن فطرت میں ایسی کامل شرطیں موجود نہیں ہو سکتیں ۔ کیل اور اس سطح
کے درمیان جس پر لٹو گھومتا ہے تماس کا علاقہ ٹھیک ایک نقطہ نہیں ہوتا
بلکہ ایک چھوٹا دائرہ یا قطع ناقص ہوتا ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ نقطہ تماس
پر تھوڑا سا پچکاؤ وقوع پذیر ہوتا ہے ۔ کیل کو سخت فولاد کا بنانے اور لٹو کو
ایک سخت سطح پر گھمانے سے یہ علاقہ چھوٹا بنایا جا سکتا ہے لیکن وہ پھر بھی
محدود ابعاد کا ہوگا ۔ اِس کا نتیجہ یہ ہے کہ کیلے پر کے تعاملات سب کے
سب محور سے نہیں ملتے ۔ لٹو کی گردش میں مزاحمت پیدا کرنے والا ایک
فر کی چھوٹا جفت ہوتا ہے اور طا بتدریج گھٹتا ہے ۔

جب طا اتنا گھٹ جاتا ہے کہ وہ طا. سے کم ہوتا ہے تو اہتزاز
کی سعتیں طہ = . اور طہ = ظہ ہوتی ہیں ۔ لٹو اب نیند میں نہیں ہوتا بلکہ
زاویہ ظہ میں سے لڑکھڑانے لگتا ہے ۔ جیسے طا گھٹنا جاری رکھتا ہے
ظہ مسلسل بڑھتا ہے جو مساوات (۱۴۷) سے ظاہر ہے اور بالآخر
ظہ اتنی بڑی قیمت تک پہنچ جاتا ہے کہ لٹو زمین پر لڑھکنے لگتا ہے اور اسلیے
گر پڑتا ہے ۔

۲۵۷ ـــ ایک بہت ہی سادہ قسم کے لٹو کی صورت میں یہ نتیجے جو شکل اختیار
کرتے ہیں اُن کا امتحان کرنا دلچسپی کا موجب ہوگا ۔ فرض کرو کہ کمیت ک اور
نصف قطر ا کی ایک ایکساں قرص
ہے اور اس کے مرکز میں سے ایک
پن گذار کر لٹو بنایا گیا ہے ۔ فرض کرو کہ
پن کا وہ طول جو قرص میں سے اس کی
نچلی جانب نکلا ہوا ہے ہ ہے
اور فرض کرو کہ قرص کی کمیت کے

شکل (۱۵۲)

مقابلہ میں پن کی کمیت قابل نظر انداز ہے ۔ ھ وہی ہے جو دفعات ماسبق کے مسائل تحلیلی میں فرض کیا گیا تھا۔ ا اور ب کی قیمتیں ہیں

$$ا = \frac{1}{2} ک ر^2 \text{ ، } ب = \frac{1}{2} ک ر^2$$

$$\text{اس لیے} \quad طا^2 = \frac{4 ک ج ھ ب}{ا^2} = \frac{4 ج ھ}{ر^2}$$

جب لٹو کا اصل رفتار طا پر جس پر لڑکھڑانے کی ابتدا ہوتی ہے گھومنے لگتا ہے تو کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار طا ر ہے یعنے $2\sqrt{ج ھ}$ ۔ اس طرح لڑکھڑانا شروع ہوتا ہے جبکہ کور پر کے کسی نقطہ کی رفتار $2\sqrt{ج ھ}$ میں گھٹ جاتی ہے ، یہ رفتار ایسی ہے جو صرف قرص کے ارتفاع پر منحصر ہے اور اس کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہے ۔ چنانچہ ہم دیکھتے ہیں کہ قرص جتنا نیچے ہوگا اتنا سُست وہ بغیر لڑکھڑائے گھومے گا ۔ اگر ہم ھ = ۲″ لیں تو معلوم ہوگا کہ لڑکھڑانا شروع ہوتا ہے جبکہ کور کی رفتار تقریباً ۲ ، ۴ فٹ فی ثانیہ ہے ۔

(۳۱۷) کور زمین کو مس کرے گی جبکہ لڑکھڑانے کی سعت مس ظہ = $\frac{ھ}{ر}$ سے حاصل ہو اور اس کے بعد لٹو زمین پر لڑھکنے گا ۔ اگر ہم حسب سابق ر = ۶″ اور ھ = ۲″ لیں تو مس ظہ = $\frac{1}{3}$ اور اس لیے جم ظہ = $\frac{3}{\sqrt{10}}$ اور $\frac{طا_1^2 - طا^2}{طا_1^2}$ = ۱۰۶ ، تقریباً ۔ اس طرح طا = $\frac{19}{20}$ طا تقریباً ۔ پس ایسا لٹو تیند میں رہے گا تا آنکہ اس کی کور کی رفتار ۷ ، ۴ فٹ فی ثانیہ تک گھٹ جائے ۔ اس کے بعد وہ لڑکھڑائے گا اور جوں ہی اس کی کور کی رفتار تقریباً ۵ ، ۴ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ تک گھٹ جائے گی وہ زمین پر لڑھکنے لگیگا ۔

معمولی چھوٹے لٹو کے لیے جس کی شکل ناشپاتی جیسی ہوتی ہے ہم ھ = $\frac{1}{2}$ ا″ تقریبی طور پر لے سکتے ہیں اور نقطہ تماس میں سے گذرنے والے محوروں کے گرد گھماؤ کے نصف قطروں کو $\frac{3}{4}$″ اور ۲″ لے سکتے ہیں ۔ اس لیے

انچوں میں

$$ا = \frac{۹}{۱۶} ک \text{ ، } ب = ۴ ک \text{ ،}$$

$$طا^۲ = \frac{۴ ک ج ھ ب}{ا^۲} = \frac{۲۰۴۸}{۲۷} ج$$

ج = ۳۸۶″ فی ثانیہ فی ثانیہ لینے سے طا = ۱۷۰ اگردشیں فی ثانیہ ۔ اگر لٹو کو ایک ڈوری سے گھمایا گیا ہو جس کا سرا لٹو کے گرد نصف قطر ایک انچ کے دائروں میں لپیٹا گیا ہے تو ڈوری کو لٹو کے لحاظ سے تقریباً ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے کھینچنا چاہیئے تاکہ مطلوبہ زاوئی رفتار پیدا ہو ۔

عام مثالیں

۱ ۔ ایک اُڑ پہیہ کے جمود کا معیار م ہے، اِس کے محور کے گرد جس کا نصف قطر ب ہے ایک ڈوری لپٹی ہوئی ہے ۔ وزن و کے مساوی تناؤ ایک ثانیہ تک ڈوری پر عائد کیا گیا ہے ۔ ایک ثانیہ کے ختم پر اُڑ پہیہ کی زاوئی رفتار کیا ہوگی ؟

۲ ۔ ایک بحری بیڑہ جس کا مجموعی ہٹاؤ ......۲ ٹن ہے خط اُستوا پر مشرق سے مغرب کی جانب حرکت کرتا ہے اور فی گھنٹہ طول بلد کے ۲۰ دقیقے طے کرتا ہے ۔ زمین کو کمیت ۶×۱۰^{۲۱} ٹن کا ایک متجانس کرہ سمجھ کر زمین کی زاوئی رفتار میں تبدیلی معلوم کرو جو بیڑے کی حرکت سے پیدا ہوتی ہے ۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تقریباً ۱۶×۱۰^{-۱۴} ثانئے کا اضافہ ہوتا ہے ۔

۳ ۔ زمین کی کمیت ۶×۱۰^{۲۱} ٹن ہے اور برف ٹیلے اور پگھلا ہوا برف وزنی ۱۰۰ ٹن قطب شمالی سے عرض بلد ۴۵° کی جانب حرکت کرتے ہیں ۔ دن کے طول میں تبدیلی معلوم کرو ۔

۴ ۔ کمیت ک کی ایک ٹرین شمالاً ۶۰ میل فی گھنٹہ سے دوڑتی ہے ۔ ثابت کرو کہ مشرقی پٹڑی اور پہیہ کی کوروں کے درمیان زمین کی گردش کی وجہ سے

ایک دباؤ ہونا چاہیے، اِس دباؤ کی مقدار معلوم کرو ۔

۵ ۔ زمین پر شہابوں کے گرنے سے جو تمام سمتوں سے زمین پر پہنچتے ہیں غبار کی ایک پتلی تہ جمتی ہے جس کی موٹائی ہ فٹ ہے ۔ ثابت کرو کہ دن کے طول میں تبدیلی تقریباً $\frac{ہ\ غہ ۵}{ا\ د}$ فی یوم ہو گی جہاں زمین کا نصف قطر فٹوں میں ا ہے اور زمین اور شہابی غبار کی کثافتیں علی الترتیب د اور غہ ہیں ۔

۶ ۔ دو کمیتیں ک اور ک جو چرخ اور محور سے لٹکائی گئی ہیں متوازن نہیں ہیں، چرخ اور محور کے نصف قطر علی الترتیب ا اور ب ہیں ۔ ثابت کرو کہ ک کا اسراع

$$\frac{ک\ ا - ک\ ب}{ک\ ا^2 + ک\ ب^2 + م} ا ج$$

ہے جہاں م، مشین کے جمود کا معیار اِس کے محور کے گرد ہے ۔

۷ ۔ ایک ہلکی، کامل ملائم، نا امتداد پذیر ڈوری ایک ایکساں اسطوانے کی مرکزی تراش کے گرد لپٹی ہوئی ہے ۔ ڈوری کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہے اور اسطوانے کو گرنے چھوڑ دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ وہ اسراع $\frac{۲}{۳}$ ج کے ساتھ گرے گا ۔

۸ ۔ طول ۲ ا کے دو مساوی ایکساں ڈنڈے ایک سرے پر ڈھیلے جوڑے گئے ہیں اور اِن کو نصف قطر $\frac{ا\sqrt{۲}}{۳}$ کے ایک ثابت کرہ پر متشاکلاً رکھکر ایک افقی محل میں اِس طرح اُٹھایا گیا ہے کہ قبضہ کرہ کو مس کرتا ہے ۔ تب اِن کو اترنے چھوڑ دیا گیا ہے ۔ ثابت کرو کہ جب وہ اولاً ساکن ہوتے ہیں تو وہ افق سے زاویہ جم$^{-۱}$ $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ پر مائل ہوتے ہیں اور یہ کہ ہر نقطہ تماس پر کرہ پر دباؤ ایک ڈنڈے کے وزن کا ایک ربع ہے اور نیز یہ کہ قبضہ پر کوئی فساد نہیں ہے ۔

۹ ۔ ایک ڈنڈے کا ایک سرا ایک چکنے افقی مستوی پر ٹکا ہوا ہے اور دوسرا سرا ایک چکنی انتصابی دیوار پر، ڈنڈا افق سے زاویہ ع پر مائل ہے ۔

اگر اِس کو پھسلنے چھوڑ دیا گیا تو ثابت کرو کہ وہ دیوار سے جدا ہوگا جبکہ افق کے ساتھ اِس کا میلان جب$^{-1}$ ($\frac{۲}{۳}$ جب عہ) ہو جائے۔

۱۰۔ اگر سورج بتدریج اِس طریقہ پر سکڑے کہ ترکیب اور شکل میں ہمیشہ اپنے مشابہ رہے تو ثابت کرو کہ جب ہر نصف قطر اپنے طول کا ن واں حصہ سکڑ چکے جہاں ن بڑا ہے تو زاوئی رفتار اپنی پہلی قیمت سے ($۱ + \frac{۲}{ن}$) گنا بڑھ جائے گی۔ گردش کی توانائی بالحرکت میں تبدیلی معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک لچکدار پٹے کا طبعی طول ۲ π ا، کمیت ک، اور مقیاس لہ ہے۔ یہ پٹہ، افقی مستوی میں نصف قطر ا کے ایک کھُردرے پہیہ پر ساکن ہے۔ پٹہ کو پہیہ کے محیط کے مقابل پکڑ کر پہیہ کو زاوئی رفتار طا کے ساتھ گھمایا گیا۔ اگر پٹہ کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ وسیع ہوگا اور جب اِس کا نیم قطر ر ہوگا تو اِس کی زاوئی رفتار $\frac{\text{ا}^{۲}\text{طا}}{\text{ر}^{۲}}$ ہوگی اور اِس کی نیم قطری رفتار

$$\left[\frac{\text{ا}^{۲}\text{طا}^{۲}}{\text{ر}^{۲}}(\text{ر}^{۲} - \text{ا}^{۲}) - \frac{۲\pi\,\text{لہ}\,(\text{ر} - \text{ا})^{۲}}{\text{ک ا}}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

ہوگی۔

۱۲۔ ایک یکساں مثلثی قرص ا ب ج کو اِس طرح سہارا گیا ہے کہ وہ اپنے مستوی میں ا کے گرد اہتزاز کر سکتا ہے، اِس کا مستوی انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ اِس کے مماثل سادہ رقاص کا طول (۳۱۹)

$$\frac{۱}{۴}\,\frac{۳(\text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲}) - \text{ا}^{۲}}{\sqrt{۲(\text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲}) - \text{ا}^{۲}}}$$

ہے۔

۱۳۔ کمیت ک کے شیشے کے ایک مکعب میں نصف قطر ا کا ایک کروی جوف بنایا گیا ہے اور اِس جوف کے اندر کمیت ک کا ایک ذرہ رکھا گیا ہے۔ پھر مکعب کو ایک چکنے افقی مستوی پر رفتار ع کے ساتھ پھینکا گیا ہے۔

اگر ذرہ کرہ کے گرد ٹھیک ایک چکر لگائے اور اثنائے حرکت میں کرہ کو مس کرتا رہے تو ثابت کرو کہ

$$و^2 = ۵ ا ج + ۴ ا ج \frac{ک}{ک}$$

۱۴ — ناقابل قدر کمیت کے ایک ڈنڈے کے سروں اور وسطی نقطہ پر تین مساوی ذرے لگائے گئے ہیں اور ایک سرے پر کے ذرہ پر ڈنڈے کے علی القوائم ایک ضرب لگائی گئی ہے ۔ثابت کرو کہ ذروں کی ابتدائی رفتاریں نسبت

۵ : ۲ : ۱

میں ہوں گی —

۱۵ — کمیت ک اور نصف قطر ا کا ایک کھردرا افقی اسطوانہ اپنے محور کے گرد گردش کرنے میں آزاد ہے ۔اس کے گرد ایک ڈوری لپیٹی گئی ہے جس کے آزاد سرے پر کمیت ک اور طول ل کی ایک زنجیر لگی ہوئی ہے ۔زنجیر کو یکجا اکٹھا کرکے چھوڑ دیا گیا ہے ۔اگر طہ وہ زاویہ ہو جس میں سے اسطوانہ زنجیر کے پوری طرح تن جانے سے وقت ت پیشتر گھوم چکا ہے تو ثابت کرو کہ

$$ک ا طہ = \frac{ک}{ل} \left(\frac{۱}{۲} ج ت^2 - ا طہ \right)^2$$

۱۶ — ایک ایکساں چپٹی دائری تھالی کو ایک کھردرے افقی مستوی پر پھینکا گیا ہے اور کسی عنصر پر جو رفتار و سے حرکت کر رہا ہو رگڑ م $و^3$ × (عنصر کی کمیت) ہے جس کی سمت و کی سمت کے خلاف ہے ۔تھالی کے مرکز کا راستہ معلوم کرو —

(۳۲۰)

بارہواں باب

تعمیم شدہ محدد

۲۵۸ — ابتک ہم نے مادی اجسام کے علم الحیل (حرکیات اور سکونیات) پر اس مفروضہ کے ساتھ بحث کی ہے کہ یہ اجسام لاتعداد چھوٹے ذروں پر مشتمل ہیں جو اُستوار جسم کی صورت میں اپنے اپنے محل پر مضبوطی کے ساتھ جکڑے ہوئے ہیں اور اِن کے ذریعہ جسم کے ایک حصہ سے دوسرے حصہ تک قوت کو منتقل کیا جا سکتا ہے۔

۲۵۹ — اُستوار اجسام کی صورت میں بھی مادہ کی ساخت کے متعلق یہ قیاس بالکل مطابق نتائج پیدا نہ کر سکا۔ مثلاً دو غیر کامل لچکدار اجسام کے درمیان ٹکر کے بعد یا دو غیر کامل چکنے اجسام کے درمیان پھسلن کے بعد یہ معلوم ہوا ہے کہ توانائی کی کچھ مقدار نظروں سے غائب ہو جاتی ہے چنانچہ ہمیں یہ فرض کرنا پڑا تھا کہ یہ توانائی جسم کے انتہائی ذروں کی ایک دوسرے کے لحاظ سے حرکتوں کے پیدا کرنے میں کام آتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں ٹکر یا پھسلن واقع ہونے کے بعد اُستوار اجسام کے متعلق یہ فرض نہیں کیا جا سکتا کہ وہ اُن شرطوں کو پورا کرتے ہیں جن کا اِدّعا کیا گیا ہے۔

اُن جسموں کی صورت میں جو صریحاً اُستوار نہیں ہیں حال اس سے زیادہ ابتر ہے۔ یہاں وہ قیاسات جو ہم نے اُستوار اجسام کے مطالعہ میں قائم کئے تھے کوئی مدد نہیں پہنچاتے اور اِن کی بجائے دیگر قیاسات کے

بغیر آگے بڑھنا بہت دشوار ہے۔

۲۶۰ — اس منزل پر آگے بڑھنے کے دو طریقے ہیں۔ ہم اُن نئے قیاسات کو جو احسن معلوم ہوں اختیار کر سکتے ہیں اور اس طریقہ پر زیر بحث مادہ کی ساخت کی تصویر کھینچ سکتے ہیں۔ لیکن یہ یقینی نہیں کہ اس طریقہ سے جو نتائج حاصل ہوں گے وہ صحیح ہوں گے کیونکہ کبھی بھی ہمیں اس کا یقین نہیں ہو سکتا کہ مادہ کی انتہائی ساخت کی نوعیت کے متعلق ہمارے قیاسات صحیح ہیں۔ بریں ہم مادہ کی ساخت کے متعلق اِن شرطی قیاسات کے ادخال سے یہ دیکھنا کہ کیا نتائج حاصل ہوتے ہیں خالی از قدر و قیمت نہیں ہے۔ اگر یہ نتیجے اُن مظاہر کے مطابق ہیں جو فطرت میں زیر مشاہدہ آتے ہیں تو ہمارے شرطی قیاسات کا صداقت سے قریب ہونا درست ہو سکتا ہے۔ لیکن اس کے برخلاف اگر حاصل شدہ نتیجے اِن مظاہر کے مطابق نہ ہوں تو اِن قیاسات میں جن سے یہ نتیجے حاصل ہوتے ہیں یا تو ترمیم کرنی ہوگی یا انہیں ترک کرنا ہوگا۔

مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے ریاضی طبعیات کی مختلف شاخیں برآمد ہوں گی۔ تمثیلاً ریاضی طبعیات کی ایسی شاخوں میں سے "لچکدار ٹھوس اجسام کا نظریہ" اور "گیسوں کا حرکی نظریہ" پیش کیے جا سکتے ہیں۔ قبل الذکر کی بنیاد اُن شرطی قیاسات پر ہے جو اُن ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کیے گئے ہیں جن سے ٹھوس اجسام کی ترکیب ہوتی ہے۔ اور بعد الذکر نظریہ کی بنیاد اُن شرطی قیاسات پر ہے جو گیس کے ذروں کے سلوک کے متعلق قائم کیے گئے ہیں۔ مادہ کی ساخت سے متعلق مختلف قیاسات سے جو نتائج برآمد ہوتے ہیں اُن کا تذکرہ اور تفہیم صریحاً اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

۲۶۱ — لیکن آگے بڑھنے کا ایک متبادل طریقہ ہے۔ ہم نے نیوٹن کے حرکت کے قوانین کو وہ مواد سمجھا ہے جو تجربی سائنس نے نظری سائنس کے لیے مہیا کیا ہے تاکہ نظری سائنس میں اس سے کام لیا جا سکے۔ اِن

قوانین کی صداقت جبکہ انہیں مادی کائنات کے انتہائی ذروں پر استعمال کیا جائے کسی طرح یقینی نہیں ہے کیونکہ ہم ان انتہائی ذروں کو حاصل نہیں کر سکتے کہ ان پر تجربہ کیا جائے۔ تاہم فرض کرو کہ ہم اس کا امتحان کرتے ہیں کہ آیا علم الحیل میں صرف اس دعوے کے ساتھ (اور یہ بلا شبہ غیر یقینی ہے) کہ نیوٹن کے قوانین انتہائی ذروں پر اطلاق پذیر ہیں کوئی ترقی ہو سکتی ہے۔ اگر ہم اس سمت میں کوئی ترقی کر سکیں تو حاصل شدہ نتیجے بلا شبہ علم الحیل کی تمام دیگر توسیعات پر اطلاق پذیر ہوں گے خواہ ہم انتہائی ذروں کی نوعیت اور ترتیب کے متعلق کوئی مزید دعوے داخل کریں یا نہ کریں۔

۲۶۲ — وہ مقام جہاں سے ہم مادہ کو دیکھ رہے ہیں شائد ایک تمثیل سے واضح کیا جا سکتا ہے، اس تمثیل کو سب سے پہلے کلرک میاکسویل نے بیان کیا تھا۔ فرض کرو کہ ایک پیچیدہ مشین ایک بند کمرہ میں رکھی ہوئی ہے اور اس مشین اور بیرونی دنیا کے درمیان صرف متعدد رسیوں کے ذریعہ تعلق قائم ہے جو فرش کے سوراخوں میں سے نیچے کے کمرہ میں لٹک رہی ہیں۔ اگر کوئی شخص نیچے کے کمرہ میں داخل ہو تو اُسے مشین کے معائنہ کرنے کا کوئی موقع نہیں ہے لیکن وہ مختلف رسیوں کو کھینچ کر مشین کو کچھ حد تک استعمال کر سکتا ہے۔ اگر ایک رسی کھینچنے پر اُس کو معلوم ہو کہ دوسری رسیاں حرکت میں آتی ہیں تو وہ سمجھ سکتا ہے کہ یہ رسیاں اوپر کسی نہ کسی میکانیت کے ذریعہ مربوط ہونی چاہئیں لیکن وہ اس میکانیت کی ٹھیک نوعیت دریافت کرنے سے قاصر رہے گا۔

اس مخفی میکانیت کے متعلق یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ وہ کائنات کی میکانیت کے ان حصوں کو تعبیر کرتی ہے جو ہماری نظر سے پوشیدہ ہیں اور رسیوں سے وہ حصے تعبیر ہوتے ہیں جن کو ہم چلا سکتے ہیں۔ فطرت میں بعض اعمال ہیں جن کو ہم انجام دے سکتے ہیں، یہ گویا ہماری تمثیل میں رسیوں کے کھینچنے کا جواب ہیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ ان اعمال سے بعض نتائج پیدا ہوتے ہیں جو دوسری رسیوں کی حرکت کا جواب ہیں۔ لیکن وہ میکانیت

جس کی وجہ سے وہ سبب یہ اثر پیدا کرتا ہے بالکلیہ نامعلوم رہتا ہے مثلاً اگر ہم ایک برقی دور کی چابی کو دبائیں تو یہ معلوم کیا جا سکتا ہے کہ دُور رکھے ہوئے ایک برقی رو پیما کی سوئی حرکت کرتی ہے لیکن وہ حیلی اعمال جو دور کے تاروں میں سے اور برقی رو پیما کو گھیرے ہوئے اثیر میں سے اِس عمل کو منتقل کرتے ہیں نامعلوم رہتے ہیں۔

۲۶۳ — اب فرض کرو کہ وہ شخص جو نیچے کے کمرہ میں داخل ہوا ہے رسیوں کو اپنے حسب مرضی استعمال کرنے میں آزاد ہے اور یہ کہ وہ رسیوں کے درمیان تعلق کو دریافت کرنا چاہتا ہے۔ وہ اِس قیاس پر ابتداء کر سکتا ہے کہ اوپر کے کمرہ کی مشین کی میکانیت میں (فرض کرو) بیرم چرخیاں اور دندانے دار پہیے شامل ہیں اور وہ بطور خود اُس طریقہ کا اندازہ لگا سکتا ہے جس میں رسیوں کو حرکت کرنا چاہیئے اگر اس کے قیاسات صحیح ہیں۔ یہ عمل اُس کے مماثل ہوگا جس کو ہم دفعہ ۲۶ میں بیان کر چکے ہیں لیکن ہم اسکی تقلید یہاں نہیں کریں گے۔

اِس کے برخلاف اوپر کی میکانیت کی نوعیت کے متعلق کسی قیاس آرائی کے بغیر نیچے کے شخص کو یہ معلوم ہوگا کہ اگر رسیاں کسی نہ کسی میکانیت کے ذریعہ مربوط ہیں، تو اِن کی حرکت چند خاص قوانین کے تابع ہے مثلاً یہ کہنا کہ ہر ذرہ نیوٹن کے حرکت کے قانون کی پابندی کرتا ہے۔

اِس کی تفہیم کے لیے فرض کرو کہ ہم سادہ ترین صورت لیتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ صرف دو رسیاں ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی ا کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو دوسری رسی ب ہمیشہ دو انچ چڑھتی ہے۔ میکانیت ایک بیرم، چرخیوں کا ایک نظام، یا دندانے دار پہیہ ہو سکتی ہے۔ لیکن خواہ وہ اِن میں سے کوئی ہو یا اِن سے بالکل مختلف کوئی اور انتظام ہو یہ معلوم ہوگا کہ رسی ا کی نیچے وار حرکت کو رسی ب پر ایک ایسی قوت لگا کر مقید کیا جا سکتا ہے جو ا پر عمل کرنے والی قوت کے نصف کے مساوی ہے۔ یہ حقیقت موہوم کام کے اُصول سے منتج ہوتی ہے اور اس کو اُس قیاس سے

کوئی تعلق نہیں ہے جو مخفی میکانیت کی نوعیت کے متعلق قائم کیا گیا ہو۔

اب ہمارے سامنے حسب ذیل سوال ہے: کیا ہم مخفی میکانیت کے کسی علم کے بغیر یہ دریافت کر سکتے ہیں کہ رسیوں کی کیا حرکت پیدا ہوگی اگر ان کو کسی معلومہ طریقہ پر حرکت میں لایا جائے۔ اس کا جواب یہ ہے کہ ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں بشرطیکہ ہمیں توانائی کی وہ مقدار معلوم ہو جو کسی قسم کی حرکت میں شامل رہتی ہے یعنے بشرطیکہ ہمیں ہر حرکت کی توانائی بالحرکت اور نیز ہر تشکیل (محل) کی توانائی بالقوہ معلوم ہو۔

اسی طرح اگر ہم تمثیلات سے حقیقتوں پر آئیں تو کائنات کی انتہائی میکانیت کے متعلق کسی علم کے بغیر ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی ابتدائی شرطوں سے کیا حرکت پیدا ہوگی بشرطیکہ کائنات کے اس حصہ کی تمام تشکیلات کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ معلوم ہو جس سے ہم بحث کر رہے ہیں۔

ہیملٹن کا اصول

۲۶۴ — فرض کرو کہ ایک مادی نظام کے کسی واحد ذرہ کے محدد کسی آن لا، ما، ی ہیں اور اس کی کمیت ک، ہے اور فرض کرو کہ اس پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں اُس کے حاصل کے اجزائے ترکیبی لا، ما، ی، ہیں۔ فرض کرو کہ اس ذرہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ع، و، ط، ہیں، اسلیے

$$ع_۱ = \frac{فرلا_۱}{فرت}، \quad وغیرہ$$

اب اگر اس ذرہ کی حرکت قوانین نیوٹن کے تابع ہے تو حاصل ہونا چاہیئے

$$ک_۱ \frac{فرع_۱}{فرت} = لا_۱،$$

$$\text{ک}_1 \frac{\text{فر و}_1}{\text{فر ت}} = \text{ما}_1 \qquad (۱۴۹)$$

$$\text{ک}_1 \frac{\text{فر ط}_1}{\text{فر ت}} = \text{ے}_1 \qquad (۱۵۰)$$

(۳۲۴) فرض کرو کہ ہم اِس حرکت کا مقابلہ قدرے مختلف حرکت سے جو قوانین نیوٹن کے تابع نہیں ہے کرتے ہیں۔ اِس دوسری حرکت میں فرض کرو کہ ک_1 کے محدد اُس آن جس پر یہ محدد حقیقی حرکت میں لا_1، ما_1، ی_1 ہیں لاَ_1، ماَ_1، یَ_1 سے تعبیر کئے گئے ہیں اور فرض کرو کہ اِس لمحہ پر رفتار کے اجزائے ترکیبی عَ_1، وَ_1، طَ_1 ہیں، اِس لیے

$$\text{عَ}_1 = \frac{\text{فر لاَ}_1}{\text{فر ت}} \quad \text{وغیرہ}$$

فرض کرو کہ یہ مرمہ حرکت حقیقی حرکت سے اسقدر خفیف فرق رکھتی ہے کہ $\text{لاَ}_1 - \text{لا}_1$، $\text{عَ}_1 - \text{ع}_1$ جیسی کوئی مقدار جو صرف اِس فرق کے ایک حصہ کو تعبیر کرتی ہے ایک چھوٹی مقدار سمجھی جا سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ہم $\text{لاَ}_1 - \text{لا}_1$ کو مف لا_1 سے تعبیر کرتے ہیں اور ایسی ہی ترقیم دوسرے فرقوں کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

مساواتوں (۱۴۸)، (۱۴۹)، (۱۵۰) کو جو ہر لمحہ پر درست ہیں مف لا_1، مف ما_1، مف ی_1 سے ضرب دو اور جمع کرو تو

$$\text{ک}_1 \frac{\text{فر ع}_1}{\text{فر ت}} \text{مف لا}_1 + \text{ک}_1 \frac{\text{فر و}_1}{\text{فر ت}} \text{مف ما}_1 + \text{ک}_1 \frac{\text{فر ط}_1}{\text{فر ت}} \text{مف ی}_1$$

$$= \text{لا}_1 \text{مف لا}_1 + \text{ما}_1 \text{مف ما}_1 + \text{ے}_1 \text{مف ی}_1 \qquad (۱۵۱)$$

اب

$$\frac{\text{فر ع}_1}{\text{فر ت}} \text{مف لا}_1 = \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} (\text{ع}_1 \text{مف لا}_1) - \text{ع}_1 \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} (\text{مف لا}_1)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} (\text{ع}_1 \text{مف لا}_1) - \text{ع}_1 \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}} (\text{لاَ}_1 - \text{لا}_1)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{ع}_1\,\text{مف}\,\text{لا}_1) - \text{ع}_1(\text{عَ}_1 - \text{ع}_1)$$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{ع}_1\,\text{مف}\,\text{لا}_1) - \text{ع}_1\,\text{مف}\,\text{ع}_1$$

اِس لئے

$$\text{ک}_1\frac{\text{فرع}_1}{\text{فرت}}\text{مف}\,\text{لا}_1 + \text{ک}_1\frac{\text{فرو}_1}{\text{فرت}}\text{مف}\,\text{ما}_1 + \text{ک}_1\frac{\text{فرط}_1}{\text{فرت}}\text{مف}\,\text{ی}_1$$

$$= \text{ک}_1\Big[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{ع}_1\,\text{مف}\,\text{لا}_1 + \text{و}_1\,\text{مف}\,\text{ما}_1 + \text{ط}_1\,\text{مف}\,\text{ی}_1)$$
$$- (\text{ع}_1\,\text{مف}\,\text{ع}_1 + \text{و}_1\,\text{مف}\,\text{و}_1 + \text{ط}_1\,\text{مف}\,\text{ط}_1)\Big]$$

$$= \text{لا}_1\,\text{مف}\,\text{لا}_1 + \text{ما}_1\,\text{مف}\,\text{ما}_1 + \text{ے}_1\,\text{مف}\,\text{ی}_1 \quad (۱۵۲)$$

بموجب مساوات (۱۵۱)

(۳۲۵) اِس قسم کی مساوات نظام کے ہر ذرہ کے لیے اور حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے۔ نیز وہ درست ہے خواہ ہٹی ہوئی حرکت کچھ ہی ہو۔ اِس مساوات کو تمام ذروں کے لیے جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma\,\text{ک}_1\Big[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{ع}_1\,\text{مف}\,\text{لا}_1 + \text{و}_1\,\text{مف}\,\text{ما}_1 + \text{ط}_1\,\text{مف}\,\text{ی}_1)$$
$$- (\text{ع}_1\,\text{مف}\,\text{ع}_1) + \text{و}_1\,\text{مف}\,\text{و}_1 + \text{ط}_1\,\text{مف}\,\text{ط}_1)\Big]$$

$$= \Sigma(\text{لا}_1\,\text{مف}\,\text{لا}_1 + \text{ما}_1\,\text{مف}\,\text{ما}_1 + \text{ے}_1\,\text{مف}\,\text{ی}_1)$$

.... (۱۵۳)

اب فرض کرو کہ حرکت کی توانائی بالحرکت ت سے تعبیر ہوتی ہے تو

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\text{ک}_1(\text{ع}_1^2 + \text{و}_1^2 + \text{ط}_1^2)$$

$$\text{تب}\quad \text{مف}\,\text{ت} = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\text{ک}_1(\text{عَ}_1^2 - \text{ع}_1^2 + \text{وَ}_1^2 - \text{و}_1^2 + \text{طَ}_1^2 - \text{ط}_1^2)$$

لیکن $ع_۲^۲ - ع_۱^۲ = (ع_۱ + مف ع_۱)^۲ - ع_۱^۲ = ۲ ع_۱ مف ع_۱$

اگر ہم دوسرے رتبہ (مف $ع_۱$)^۲ کی چھوٹی مقدار کو نظرانداز کردیں ۔ اِس لیے

$$مف ت = \Sigma ک_۱ (ع_۱ مف ع_۱ + و_۱ مف و_۱ + ط_۱ مف ط_۱)$$

۲۶۵ ــــ فی الحال مان لو کہ قوتوں کا نظام بقائی ہے اور فرض کرو کہ زیر بحث لمحہ پر نظام کی توانائی بالقوہ ک ہے اور خفیف طور پر ہٹی ہوئی تشکیل میں خیالی نظام کی توانائی بالقوہ کَ ہے ۔ تب بموجب دفعہ ۱۱۸

$$مف ک = کَ - ک$$

= (وہ کام جو نظام کو حقیقی تشکیل سے ہٹی ہوئی تشکیل تک حرکت دینے میں انجام پایا)

$$= - \Sigma (لا_۱ مف لا_۱ + ما_۱ مف ما_۱ + یے_۱ مف ی_۱)$$

(۱۵۴)

مساوات (۱۵۳) میں اُن جملوں کی بجائے جو مف ت اور مف ک کے مساوی معلوم کئے گئے ہیں اندراج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ مساوات حسب ذیل سادہ شکل میں تحویل ہوتی ہے :

$$\Sigma ک_۱ \frac{فر}{فرت} (ع_۱ مف لا_۱ + و_۱ مف ما_۱ + ط_۱ مف ی_۱) - مف ت = - مف ک$$

یا $$\frac{فر}{فرت} \Sigma ک_۱ (ع_۱ مف لا_۱ + و_۱ مف ما_۱ + ط_۱ مف ی_۱) = مف (ت - ک)$$

یہ مساوات حرکت کے ہر لمحہ پر درست ہے ۔ فرض کرو کہ ہم اِس کا تکمل حرکت کے کسی دو لمحوں ت = ت$_۱$ اور ت = ت$_۲$ کے درمیان کرتے ہیں تو (۳۲۹)

$$\left[\Sigma ک_۱ (ع_۱ مف لا_۱ + و_۱ مف ما_۱ + ط_۱ مف ی_۱) \right]_{ت_۱}^{ت_۲}$$

$$= \int_{ت_1}^{ت_2} مف\ (ت - ک)\ فرت \qquad (۱۵۵)$$

ہٹی ہوئی حرکت ابتک کسی قید کے تحت نہیں رہی اِلّا آنکہ اس کے اور حقیقی حرکت کے درمیان فرق ہمیشہ خفیف ہونا چاہئے ۔ اب ہم ایک اور قید عائد کرتے ہیں کہ اوقات $ت_1$ اور $ت_2$ پر ہٹی ہوئی حرکت میں تشکیلات اُن تشکیلات پر منطبق ہوتی ہیں جو حقیقی حرکت میں حاصل ہوتی ہیں ۔ پس ہٹی ہوئی حرکت اب وہ ہے جس میں خیالی نظام وقت $ت = ت_1$ پر اسی تشکیل میں حرکت کی ابتدا کرتا ہے جس میں حقیقی نظام وقت $ت = ت_1$ پر کرتا ہے، اس کے بعد خیالی نظام وقت $ت_1$ سے $ت_2$ تک اُس راستہ سے جس پر حقیقی نظام حرکت کرتا ہے ذرا ہٹا ہوا حرکت کرتا ہے (کیونکہ حقیقی نظام قوانین نیوٹن کے تحت حرکت کرتا ہے اور خیالی نظام کی حرکت اس کے تحت نہیں ہے) اور بالآخر وقت $ت_2$ پر اُسی محل میں آجاتا ہے جس میں حقیقی نظام آتا ہے ۔

خیالی نظام پر اس شرط کے عائد کرنے سے اوقات $ت_1$ اور $ت_2$ پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$مف\ لا_1 = مف\ ما_1 = مف\ ی_1 = ۰$$

اور اسی وضع کے رشتے دوسرے ذروں کے لئے ۔ پس

$$\left[\sum ک_1 (ع_1\ مف\ لا_1 + و_1\ مف\ ما_1 + ط_1\ مف\ ی_1) \right]_{ت_1}^{ت_2} = ۰$$

اور مساوات (۱۵۵) ہو جاتی ہے

$$\int_{ت_1}^{ت_2} مف\ (ت - ک)\ فرت = ۰$$

یہ ایک ایسی مساوات ہے جو صرف نظام کی توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کی مقداروں پر منحصر ہے اور نظام کی میکانیت پر منحصر نہیں ہے ۔ ہم دیکھیں گے کہ اس واحد مساوات سے نظام کے تمام معلومہ

حصوں کی حرکت معلوم کی جا سکتی ہے جوں ہی ت اور ک معلوم ہو جائیں اور اس کے لئے غیر معلومہ حصوں کی میکانیت کے علم کی ضرورت نہیں ہے۔

۲۶۶ — اس کو ثابت کرنے سے پیشتر ہم مساوات (۱۵۶) کو سمجھنے کی کوشش کریں گے۔ فرض کرو کہ ہم ت - ک کو ل سے تعبیر کرتے ہیں۔ (۲۲۷)

اب

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} مف (ت - ک) فرت = \int_{ت_۱}^{ت_۲} مف\ ل\ فرت$$

$$= \int_{ت_۱}^{ت_۲} (لَ - ل)\ فرت$$

$$= \int_{ت_۱}^{ت_۲} لَ\ فرت - \int_{ت_۱}^{ت_۲} ل\ فرت$$

$$= مف \left(\int_{ت_۱}^{ت_۲} ل\ فرت \right)$$

اگر ہم

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} ل\ فرت$$

کو س سے تعبیر کریں تو یہ مساوات مف س = ۰ ہو جاتی ہے یا

$$سَ = س$$

اِس طرح دوسری اور اعلیٰ ترتیبوں کی چھوٹی مقداروں کو نظر انداز کیا جائے تو حقیقی حرکت کے لئے تفاعل س کی قیمت وہی ہے جو کسی خفیف طور پر مختلف حرکت کے لیے متناظر تفاعل سَ کی ہے جبکہ یہ مختلف حرکت وہی لمحوں پر وہی تشکیلات سے حرکت کی ابتدا اور اختتام کرے۔ دوسرے الفاظ میں تفاعل س اعظم ہوتا ہے یا اقل جبکہ تشکیلات کا سلسلہ وہی ہو جو فطرت میں فی الواقعی وقوع پذیر ہوتا ہے۔

اقل ترین عمل کا اُصول

۲۶۷ — حقیقی حرکت کی اثناء میں کُل توانائی حسب مسئلہ دفعہ (۱۴۳) مستقل رہے گی، فرض کرو کہ کُل توانائی ع سے تعبیر ہوتی ہے تو ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ت} + \text{ک} = \text{ع} \,،\quad \text{ت} - \text{ک} = \text{ل}$$

تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلہ میں یہ کہنا صحیح نہیں ہے کہ اثنائے حرکت میں کُل توانائی مستقل رہتی ہے لیکن تشکیلات کے خفیف طور پر متغیر سلسلوں کی لامتناہی تعداد میں سے پھر بھی لامتناہی تعداد بچ رہے گی جن کے لئے مذکورۂ بالا شرطیں معہ اس شرط کے کہ ہر لمحہ پر کُل توانائی ع ہونی چاہئے پوری ہونگی۔ ایسے کسی سلسلے کے لیے حاصل ہوگا، (۳۲۸)

$$\text{تَ} + \text{کَ} = \text{ع} \,،\quad \text{تَ} - \text{کَ} = \text{لَ}$$

پس

$$\text{ل} = ۲\text{ت} - \text{ع} \,،\quad \text{لَ} = ۲\text{تَ} - \text{ع}$$

اس لئے

$$\text{س} = \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{ل}\,\text{فرت}$$

$$= \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} (۲\,\text{ت} - \text{ع})\,\text{فرت}$$

$$= \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} ۲\,\text{ت}\,\text{فرت} - (\text{ت}_2 - \text{ت}_1)\,\text{ع}$$

پس اگر س اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} ۲\,\text{ت}\,\text{فرت}$$

اعظم ہے یا اقل ۔ اس تکملہ کو حرکت کا **عمل** کہتے ہیں ۔ اب ہم دیکھتے ہیں کہ تشکیلات کے تمام ممکن سلسلوں میں جو نظام کو ایک تشکیل سے دوسری تشکیل تک معلومہ وقت میں اس طریقہ پر لاتے ہیں کہ کل توانائی ہمیشہ ایک مخصوص مستقل کے مساوی ہوتی ہے وہ سلسلہ جو ایک فطری نظام سے مرتسم ہوسکتا ہے وہ ہے جس پر عمل اعظم ہے یا اقل ۔ اب چونکہ عمل بالعموم اقل ہوتا ہے اس لیے اس اصول کو **اقل ترین عمل کا اصول** کہتے ہیں ۔

اس اصول کو اولاً موفرٹینز (Maupertius) نے بیان کیا تھا لیکن اس نے اس کو استدلال ریاضی سے ماخوذ نہیں کیا تھا بلکہ اس کو اس امر کا یقین تھا کہ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کائنات کی تبدیلیاں اس طرح وقوع پذیر ہونی چاہئیں کہ عمل اقل ہو ۔ (Essai de Cosmologie, 1751) ۔

غیر بقائی قوتیں

۲۶۸ ــــ اگر قوتیں بقائی نہ ہوں تو ہم مساوات (۱۵۴) میں

Σ (لا مف لا + ما مف ما + ے مف ی)

کی بجائے ـ مف ک نہیں رکھ سکتے اور اس لیے مساوات (۱۵۶) کی بجائے حسب ذیل مساوات حاصل ہوگی :

∫ت۲ ت۱ [مف ت + Σ (لا مف لا + ما مف ما + ے مف ی)] فرت = ۰　　(۱۵۷)

لگرانج کی مساواتیں

۲۶۹ ــــ اگر نظام کے ہر ذرہ کے محدد لا، ما، ی وغیرہ معلوم ہوں تو

ہم نہ صرف نظام کی تشکیل معلوم کر سکتے ہیں بلکہ وہ میکانیت بھی جس کے ذریعہ نظام کے مختلف اجزاء مربوط ہیں۔ تاہم یہ ہو سکتا ہے کہ مقداروں کی کمتر تعداد معلوم ہونے پر بھی نظام کی تشکیل متعین ہو سکے حالانکہ مقداروں کی اس تعداد سے میکانیت کا کوئی علم حاصل نہ ہوتا ہو۔

مثلاً ہماری پچھلی تمثیل میں ہم نے تصور کیا تھا کہ ایک نامعلوم مشین سے دو رسیاں لٹکتی ہیں اور رسیاں ایسے طریقہ پر مربوط ہیں کہ ایک رسی میں ایک انچ کی حرکت دوسری رسی میں ہمیشہ دو انچ کی حرکت پیدا کرتی ہے۔ اس صورت میں تشکیل پوری طرح معلوم ہو جاتی ہے جبکہ وہ واحد محدد معلوم ہو جائے جو پہلی رسی کے سرے کے محل کی پیمائش کرتا ہے۔ لیکن اس محدد کے معلوم ہونے سے رسیوں کو ملانے والی میکانیت کا علم حاصل ہونا ضروری نہیں ہے۔

نیز ہم دفعہ ۶۵ میں دیکھ چکے ہیں کہ کسی استوار جسم کا محل کافی مقداروں (چھ) کی قیمتوں سے متعین ہو جاتا ہے، یہ مقداریں جسم کے تین ناہم خط ذرّوں کے محل فضا میں معلوم کرنے کے لیے مطلوب ہوتے ہیں۔ لیکن ان مقداروں کے علم سے ان ذرّوں کی ترتیب کے متعلق کوئی علم حاصل نہیں ہوتا جن سے جسم بنا ہے۔

فرض کرو کہ مقداروں $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ کا ایک جٹ ایسا ہے کہ ان کی قیمت معلوم ہو تو اجسام کے ایک نظام کی تشکیل پوری طرح متعین ہو جاتی ہے۔ تب ان مقداروں $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ کو نظام کے **تعمیم شدہ محدد** کہا جاتا ہے۔

۲۷۰۔ فرض کرو کہ نظام کے کسی ذرہ کے محدد لا، ما، ی ہیں۔ تب $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ کی قیمتوں سے لا پوری طرح معلوم ہوتا ہے اور اس لئے وہ ان مقداروں کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

$$لا = ف(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \qquad (۱۵۸)$$

اگر نظام متحرک ہے تو مساوات (۱۵۸) کی تمام مقداریں وقت کے تفاعل ہیں۔ پس وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\,\frac{\text{فرطہ}_1}{\text{فرت}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\,\frac{\text{فرطہ}_2}{\text{فرت}} + \cdots\cdots + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}}\,\frac{\text{فرطہ}_{\text{ن}}}{\text{فرت}}$$

(۳۳۰) اختصار کی خاطر فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$، $\frac{\text{فرطہ}_1}{\text{فرت}}$، ...کو $\text{لا}^{\prime}$، $\text{طہ}_1^{\prime}$، .... سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب محصلۂ بالا مساوات کو لکھا جا سکتا ہے

$$\text{لا}^{\prime} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\,\text{طہ}_1^{\prime} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\,\text{طہ}_2^{\prime} + \cdots + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}}\,\text{طہ}_{\text{ن}}^{\prime} \quad (۱۵۹)$$

اس لئے $\text{لا}^{\prime}$ ایک خطی تفاعل ہے $\text{طہ}_1^{\prime}$، $\text{طہ}_2^{\prime}$، ....، $\text{طہ}_{\text{ن}}^{\prime}$ کا جن کے سر طہ_1، طہ_2، ....، $\text{طہ}_{\text{ن}}$ کے تفاعل ہیں۔

توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\sum \text{ک}\left(\text{لا}^{\prime 2} + \text{ما}^{\prime 2} + \text{نی}^{\prime 2}\right)$$

$\text{طہ}_1^{\prime}$، $\text{طہ}_2^{\prime}$، ....، $\text{طہ}_{\text{ن}}^{\prime}$ کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس کے سر طہ_1، طہ_2، ....، $\text{طہ}_{\text{ن}}$ کے تفاعل ہیں۔

توانائی بالقوہ ک صرف نظام کی تشکیل پر منحصر ہوتی ہے اور اسلیے ک ایک تفاعل ہے صرف طہ_1، طہ_2، ....، $\text{طہ}_{\text{ن}}$ کا۔

اس طرح تفاعل ل یا ت ـ ک،

طہ_1، طہ_2، ....، $\text{طہ}_{\text{ن}}$، $\text{طہ}_1^{\prime}$، $\text{طہ}_2^{\prime}$، ....، $\text{طہ}_{\text{ن}}^{\prime}$

کا ایک تفاعل ہے، فرض کرو

$$\text{ل} = \text{فہ}\left(\text{طہ}_1, \text{طہ}_2, \ldots, \text{طہ}_{\text{ن}}, \text{طہ}_1^{\prime}, \text{طہ}_2^{\prime}, \ldots, \text{طہ}_{\text{ن}}^{\prime}\right) \quad (۱۶۰)$$

ہٹی ہوئی حرکت میں متناظر تفاعل $\bar{\text{ل}}$،

طہ۱ + مف طہ۱، طہ۲ + مف طہ۲، .... وغیرہ

کا وہی تفاعل ہے اور اس لیے

لَ = فہ (طہ۱ + مف طہ۱، طہ۲ + مف طہ۲، .... طہن + مف طہن، ظہ۱ + مف ظہ۱، ...)

ٹیلر کے مسئلہ سے ہم لَ کو شکل

لَ = فہ (طہ۱، طہ۲، .... ، طہن، ظہ۱، ...)

$$+ \text{مف طہ}_1 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}_1} + \text{مف طہ}_2 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}_2} + \ldots + \text{مف طہ}_ن \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف طہ}_ن}$$

$$+ \text{مف ظہ}_1 \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ظہ}_1} + \ldots\ldots$$

میں پھیلا سکتے ہیں اور اس لیے مساوات (۱۶۰) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لَ} = \text{ل} + \sum_1^{ن} \text{مف طہ}_1 \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} + \sum_1^{ن} \text{مف ظہ}_1 \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ظہ}_1} \quad (۱۶۱)$$

(۴۳۱) مساوات (۱۵۶)

$$\int_{ت_1}^{ت_2} \text{مف} (\text{ت} - \text{ک})\, \text{فرت} = ۰$$

کو شکل

$$\int_{ت_1}^{ت_2} (\text{لَ} - \text{ل})\, \text{فرت} = ۰$$

میں لکھا جا سکتا ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی بجائے

$$\int_{ت_1}^{ت_2} \left(\sum_1^{ن} \text{مف طہ}_1 \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} + \sum_1^{ن} \text{مف ظہ}_1 \frac{\text{جف ل}}{\text{جف ظہ}_1} \right) \text{فرت} = ۰$$

(۱۶۲)

کو لکھا جا سکتا ہے۔
لیکن

$$\text{مف طہ}_ا = \text{طہ}َ - \text{طہ}_ا = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{طہ}_ا + \text{مف طہ}_ا) - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\text{طہ}_ا = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{مف طہ}_ا)$$

اِس لئے

$$\int_{\text{ت}_ا}^{\text{ت}_۲} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا} \text{مف طہ}_ا \text{فرت} = \int_{\text{ت}_ا}^{\text{ت}_۲} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}(\text{مف طہ}_ا)\text{فرت}$$

اور تکمل بالحصص سے یہ ہو جاتا ہے

$$\left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا}\text{مف طہ}_ا\right]_{\text{ت}_ا}^{\text{ت}_۲} - \int_{\text{ت}_ا}^{\text{ت}_۲} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا}\right)\text{مف طہ}_ا \text{فرت} \quad (۱۶۳)$$

چونکہ ہٹی ہوئی تشکیل بموجب فرض حقیقی تشکیل پر منطبق ہوتی ہے اِس لیے اوقات $\text{ت}_ا$ اور $\text{ت}_۲$ پر $\text{مف طہ}_ا = ۰$۔ اِس طرح پھیلاؤ (۱۶۳) میں پہلی رقم معدوم ہوتی ہے اور حاصل ہوتا ہے

$$\int_{\text{ت}_ا}^{\text{ت}_۲} \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا}\text{مف طہ}_ا \text{فرت} = -\int_{\text{ت}_ا}^{\text{ت}_۲} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا}\right)\text{مف طہ}_ا \text{فرت}$$

اب مساوات (۱۶۲) شکل

$$\int_{\text{ت}_ا}^{\text{ت}_۲} \left\{ \sum_ا^{\text{ن}} \text{مف طہ}_ا \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا}\right)\right]\right\}\text{فرت} = ۰ \quad (۱۶۴)$$

اختیار کرتی ہے۔

حدود $\text{ت}_ا$ اور $\text{ت}_۲$ بالکلیہ ہمارے اختیار میں ہیں، مساوات درست رہے گی خواہ $\text{ت}_ا$ اور $\text{ت}_۲$ کو ہم کوئی قیمتیں دیں۔ دوسرے الفاظ میں چھوٹے تفرقیوں کی ایک تعداد کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے خواہ مجموعہ میں ایسے کتنے ہی تفرقی شامل ہوں۔ اِس سے یہ نتیجہ بر آمد ہوتا ہے کہ مجموعہ کی ہر رقم معدوم ہونی چاہئے، اِس لیے ہر لمحہ پر ہمیں حاصل ہونا چاہئے (۴۳۲)

$$\sum_ا^{\text{ن}} \text{مف طہ}_ا \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_ا}\right)\right] = ۰ \quad (۱۶۵)$$

۲۷۱ — اِس موقع پر ہمیں دو متبادلات پر غور کرنا ہوگا۔ یہ ہو سکتا ہے کہ

مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، . . . ، مف طہ$_ن$ کی خواہ ہم کوئی قیمتیں مقرر کریں نئی تشکیل جس کا تشخص محددوں

$$طہ_1 + مف\ طہ_1،\ طہ_2 + مف\ طہ_2،\ ....،\ طہ_ن + مف\ طہ_ن$$

کے ذریعہ ہوتا ہے ایک ممکن تشکیل ہو یعنی یہ تشکیل ایسی ہو گی کہ نظام اس کو اختیار کر سکتا ہے اور اس کی میکانیت سے جو قیود عائد ہوتے ہیں ان میں خلل نہیں پڑتا۔ اس صورت میں ہم کہتے ہیں کہ نظام "آزادی کے ن درجے" رکھتا ہے۔

اگر نظام آزادی کے ن درجے رکھے تو مساوات (۱۶۵) مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، . . . . . مف طہ$_ن$ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے۔ مثلاً وہ درست ہے اگر ہم لیں

$$مف\ طہ_1 = صہ،\ مف\ طہ_2 = مف\ طہ_3 = ... = مف\ طہ_ن = ۰$$

جہاں صہ کوئی چھوٹی مقدار ہے۔ اس صورت میں ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$صہ \left[\frac{جف\ ل}{جف\ طہ_1} - \frac{ف}{ف\ ت} \left(\frac{جف\ ل}{جف\ طہ_1} \right) \right] = ۰$$

اور اس لیے

$$\frac{ف}{ف\ ت} \left(\frac{جف\ ل}{جف\ طہ_1} \right) - \frac{جف\ ل}{جف\ طہ_1} = ۰$$

محددوں طہ$_1$، طہ$_2$، . . . ، طہ$_ن$ میں سے ہر ایک کے لیے اس کے مشابہ مساوات درست رہے گی۔ ان مساواتوں کو **لگرانج کی مساواتیں** کہتے ہیں۔ ن نامعلوم مقداروں طہ$_1$، طہ$_2$، . . . . ، طہ$_ن$ اور وقت کے لحاظ سے ان کے تفرقی سروں کے درمیان ایسی ن مساواتیں ہوں گی۔ اس لیے ہم ان سے وہ طریقہ معلوم کر سکتے ہیں جس میں طہ$_1$، طہ$_2$، . . . ، طہ$_ن$ وقت کے ساتھ بدلتے ہیں۔ ان مساواتوں کو استعمال کرنے میں ہمیں صرف تفاعل ل کے جاننے کی ضرورت ہے اور اس لیے نظام کی

صرف توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ کو جاننا ضروری ہے، نظام کی اندرونی میکانیت کے علم کی ضرورت نہیں پڑتی۔ اس طرح دفعہ (۲۶۳) کا مجوزہ مسئلہ حل ہو چکا اگر ہم لگرانج کی مساواتیں حل کر سکیں۔

(۲۲۳)

توضیحی مثال

عام رقاص۔ فرض کرو کہ ہم لگرانج کی مساواتوں کو ایک سادہ مثال پر استعمال کرتے ہیں چنانچہ عام رقاص کی حرکت کے مسئلہ پر غور کرو۔ ایک اُستوار جسم حرکت کرنے میں اس طور پر مقید ہے کہ ایک نقطہ و ثابت رہتا ہے اور خط و ث جو و کو مرکز ثقل سے ملاتا ہے ایک انتصابی مستوی میں حرکت کرتا ہے۔ فرض کرو کہ و ث کا میلان سمت انتصابی سے طہ ہے، تب نظام کا محل بالکلیہ مقرر ہو جاتا ہے جوں ہی طہ کی قیمت معلوم ہو۔ دفعہ (۲۴۵) کی ترقیم میں توانائی بالحرکت اور توانائی بالقوہ حسب ذیل ہیں:

$$ت = \frac{1}{2} ک گ^2 \dot{طہ}^2 ، \quad م = ک ج ھ (1 - جم طہ)$$

جہاں م توانائی بالقوہ ہے اور ک کل کمیت۔ اس لیے

$$ل = \frac{1}{2} ک گ^2 \dot{طہ}^2 - ک ج ھ (1 - جم طہ)$$

اس طرح $\frac{جف ل}{جف \dot{طہ}} = ک گ^2 \dot{طہ}$ اور

لگرانج کی مساوات

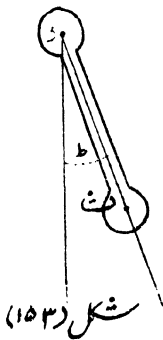
$$\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف ل}{جف \dot{طہ}}\right) = \frac{جف ل}{جف طہ}$$

ہو جاتی ہے $\quad ک گ^2 \frac{فر^2 طہ}{فرت^2} = - ک ج ھ جب طہ$

و

طہ

ث

شکل (۱۵۲)

یہ وہی مساوات ہے جو دفعہ ۲۴۵ میں حاصل ہوئی تھی اور اس سے حرکت معلوم کی جا سکتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ لگرانج کے طریقہ سے یہ ظاہر ہے کہ حرکت اُس طریقہ پر منحصر نہیں ہے جو رقاص کو لٹکانے کا ہے، صرف یہ شرط ہے کہ وہ مذکورۂ بالا طریقہ پر حرکت کرنے پر مجبور ہو۔ مثلاً نتیجہ درست رہتا ہے اگر دُپر کوئی ٹیکن ہی نہ ہو اور ڈوریوں کے ذریعہ قیود عائد کئے جائیں۔

۲۷۲ — اب ہم دوسرے متبادل پر غور کریں گے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ اگر ہم مف طہ$_1$، مف طہ$_2$ ... مف طہ$_ن$ کی اختیاری قیمتیں مقرر کریں تو حاصل شدہ نئی تشکیل ہر صورت میں ممکن تشکیل نہ ہو۔ یہ ہو سکتا ہے کہ بعض خاص رشتے ہوں جو پورے ہونے چاہئیں تاکہ میکانیت کی باعث جو قیود ہیں ان میں کوئی خلل نہ پڑے۔

مثلاً اُس تمثیل میں جو قبل ازیں استعمال ہو چکی ہے فرض کرو کہ ایک کمرہ کی چھت سے دو رسیاں لٹک رہی ہیں اور یہ کہ اگر ایک رسی کو ایک انچ کھینچا جاتا ہے تو اوپر کی میکانیت دوسری رسی کو دو انچ اوپر چڑھنے پر مجبور کرتی ہے۔ فرض کرو کہ چھت کے نیچے رسیوں کے طول طہ$_1$، طہ$_2$ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ اب ایسا ہٹاؤ جس میں مف طہ$_1$ = $\frac{1}{10}$ انچ اور مف طہ$_2$ = $\frac{1}{5}$ انچ ممکن ہٹاؤ نہیں ہے کیونکہ اوپر کی میکانیت ایسے ہٹاؤ کی اجازت نہیں دیتی۔ مف طہ$_1$، مف طہ$_2$ میں ہمیشہ ربط

$$\text{مف طہ}_1 + \tfrac{1}{2}\,\text{مف طہ}_2 = 0$$

ہونا چاہئے۔

عام صورت میں فرض کرو کہ میکانیت کی باعث چند قیود عائد ہوتے ہیں، ان قیود کی شکل

$$\text{ا}_1\,\text{مف طہ}_1 + \text{ا}_2\,\text{مف طہ}_2 + \ldots + \text{ا}_ن\,\text{مف طہ}_ن = 0 \quad (166)$$

$$\text{ب}_1\,\text{مف طہ}_1 + \text{ب}_2\,\text{مف طہ}_2 + \ldots + \text{ب}_ن\,\text{مف طہ}_ن = 0 \quad (167)$$

وغیرہ ہے۔ تب مساوات (۱۶۵)

(۳۴۴)

$$\sum^{ن} \left[\frac{ف}{فزت} \left(\frac{جف ل}{جف طہ_1} \right) - \frac{جف ل}{جف طہ_1} \right] مف طہ_1 = ۰ \quad (۱۶۸)$$

صرف اسوقت درست ہے جبکہ مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ... مف طہ$_ن$ رشتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... کو پورا کریں۔

لیکن ممکن ہٹاؤ کے لیے مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ...، مف طہ$_ن$ ایسے ہوں گے کہ یہ رشتے (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... سب کے سب درست ہوں گے۔ فرض کرو کہ ہم لہ، مہ، ... اور اکائی سے ضرب دیتے ہیں اور جمع کرتے ہیں جہاں لہ، مہ، ... تا حال غیر معین مقداریں ہیں، ہم ان کو غیر معین ضارب کہہ سکتے ہیں۔ اب مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$\left[\frac{ف}{فزت} \left(\frac{جف ل}{جف طہ_1} \right) - \frac{جف ل}{جف طہ_1} + لہ ا_1 + مہ ب_1 + \ldots \right] مف طہ_1$$

$$+ \left[\frac{ف}{فزت} \left(\frac{جف ل}{جف طہ_2} \right) - \frac{جف ل}{جف طہ_2} + لہ ا_2 + مہ ب_2 + \ldots \right] مف طہ_2$$

$$+ \ldots + \left[\frac{ف}{فزت} \left(\frac{جف ل}{جف طہ_ن} \right) - \frac{جف ل}{جف طہ_ن} + لہ ا_ن$$

$$+ مہ ب_ن + \ldots \right] مف طہ_ن = ۰ \quad (۱۶۹)$$

مقداریں مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ...، مف طہ$_ن$ اختیاری نہیں ہیں لیکن اگر نمونہ (۱۶۶) کے رشتے تعداد میں م ہوں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مقداروں مف طہ$_1$، مف طہ$_2$، ...، مف طہ$_ن$ میں سے تمام الا م کے اختیاری ہیں اور ان مقداروں میں سے (ن - م) مقداروں کو اختیاری قیمتیں دیکر باقی م مقداروں کو مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ... کے حل سے معلوم کرنا چاہیئے۔ اس طریقہ پر حاصل شدہ تشکیل بالضرور ممکن تشکیل ہونی چاہئے فرض کرو کہ ہم

مف طہ$_{م+1}$، مف طہ$_{م+2}$، ...، مف طہ$_ن$

(۳۳۵) کو اختیاری قیمتیں دیتے ہیں اور پھر مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ..... سے سف طہ₁، سف طہ₂، .... سف طہم کی قیمتیں معلوم کرتے ہیں ۔ نیز ہم م غیر معین ضاربوں لہ، مہ، .... کا انتخاب کرتے ہیں اس طور پر کہ وہ م مساواتوں

$$\frac{فر}{فزت}\left(\frac{جف ل}{جف طہ_1}\right) - \frac{جف ل}{جف طہ_1} + لہ ا_1 + مہ ب_1 + ... = ۰$$

(۱۷۰)

. . . .

$$\frac{فر}{فزت}\left(\frac{جف ل}{جف طہ_م}\right) - \frac{جف ل}{جف طہ_م} + لہ ا_م + مہ ب_م + ... = ۰$$

(۱۷۱)

کو پورا کرتے ہیں جہاں لاحقے ا تا م ہیں ۔ تب مساوات (۱۶۹) ہو جاتی ہے

$$\sum_{م+۱}^{ن} \left[\frac{فر}{فزت}\left(\frac{جف ل}{جف طہ_{م+۱}}\right) - \frac{جف ل}{جف طہ_{م+۱}} + لہ ا_{م+۱} + مہ ب_{م+۱} + ... \right.$$

$$\left. ... \right] سف طہ_{م+۱} = ۰$$

چونکہ سف طہ$_{م+۱}$، سف طہ$_{م+۲}$، .... سف طہ$_ن$ سب کے سب اختیاری ہیں اس لیے ہم لے سکتے ہیں

$$سف طہ_{م+۱} = صہ، سف طہ_{م+۲} = سف طہ_{م+۳} = ... = سف طہ_ن = ۰$$

اور حاصل کر سکتے ہیں

$$\frac{فر}{فزت}\left(\frac{جف ل}{جف طہ_{م+۱}}\right) - \frac{جف ل}{جف طہ_{م+۱}} + لہ ا_{م+۱} + مہ ب_{م+۱} + ... = ۰$$

اسی طرح ہم م + ۱ سے ن تک تمام لاحقوں کے لیے وہی مساوات
حاصل کر سکتے ہیں لیکن یہ مساوات لاحقوں ۱ تا م کے لیے درست فرض
کیجا چکی ہے (مقابلہ کرو مساواتوں (۱۷۰)، .... (۱۷۱)]۔
پس مساواتوں کا حسب ذیل مکمل نظام حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} + \text{لہ ا}_1 + \text{مہ ب}_1 + \dots = 0,$$

. . . .

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_{\text{ن}}} + \text{لہ ا}_{\text{ن}} + \text{مہ ب}_{\text{ن}} + \dots = 0.$$

جس میں لاحقے ۱ تا ن ہیں۔ اِن ن مساواتوں سے م غیر معین ضاربوں
لہ، مہ، ... کو ساقط کیا جائے تو ن ـ م مساواتیں باقی رہتی ہیں جن سے
محددوں کی تبدیلیاں معلوم کی جا سکتی ہیں۔

(۳۳۶)

توضیحی مثالیں

۱۔ نصف قطر ۱ کا ایک متجانس کرہ، نصف قطر ب کے ایک ثابت کرہ
کی بیرونی سطح پر بغیر پھسلے لڑھکتا ہے۔ حرکت معلوم کرو۔
فرض کرو کہ کسی لمحہ پہ مرکزوں کا خط سمت انتصابی سے زاویہ کہ بناتا ہے
اور فرض کرو کہ متحرک کرہ کی زاویائی رفتار طہ ہے۔ متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار
(۱ + ب) کہ ہے اور اس لیے

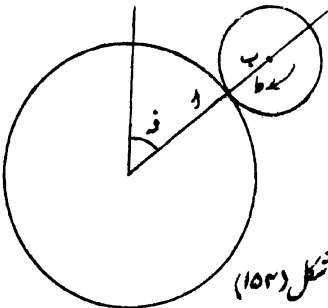
$$\text{ت} = \tfrac{1}{2}\text{ک}\left[(\text{ا}+\text{ب})^2\text{کہ}^2 + \tfrac{2}{5}\text{ا}^2\text{طہ}^2\right]$$

اور توانائی بالقوہ ہے

$$\text{مہ} = \text{ک ج}(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم کہ}$$

اس لیے ل = ت ـ مہ

شکل (۱۵۴)

$$= \tfrac{۱}{۲}\text{ک}\,(\text{ا}+\text{ب})^{۲}\,\text{کہ}^{۲} + \tfrac{۱}{۵}\text{ک}\,\text{ا}^{۲}\,\text{طہ}^{۲} - \text{ک ج}\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم کہ} \quad (۱)$$

طہ اور کہ میں تغیرات اختیاری نہیں ہیں اور ہم انہیں جو چاہیں قیمتیں نہیں دے سکتے کیونکہ متحرک کرہ کے مرکز کی رفتار (ا + ب) کہ ہے اور نیز ا طہ ہونی چاہئے کیونکہ کرہ زاوی رفتار طہ سے بغیر پھسلے لڑھک رہا ہے۔ اس لیے

$$\text{ا طہ} = (\text{ا}+\text{ب})\,\text{کہ} \qquad (\text{ب})$$

یہ رشتہ ہر ممکن حرکت کے ہر لمحہ پر درست رہتا ہے اور اس لئے وقت کے لحاظ سے تکمل کرنے پر حاصل ہونا چاہئے

$$\text{ا طہ} = (\text{ا}+\text{ب})\,\text{کہ} + \text{مستقل}$$

اور اس لیے ہمیں فرض کرنا چاہئے کہ محددوں طہ، کہ کی تبدیلیاں رشتہ

$$\text{ا مف طہ} = (\text{ا}+\text{ب})\,\text{مف کہ}$$

کے ذریعہ مربوط ہیں۔

اس طرح لگرانج کی مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}} + \text{لہ ا} = ۰،$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}} - \text{لہ}\,(\text{ا}+\text{ب}) = ۰$$

لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ا}+\text{ب})\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}}\right] + \text{ا}\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}}\right] = ۰$$

مساوات (ا) سے اندراج کرنے پر یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$(\text{ا}+\text{ب})\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\tfrac{۲}{۵}\text{ک}\,\text{ا}^{۲}\,\text{طہ}\right)\right] + \text{ا}\left[\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left\{\text{ک}\,(\text{ا}+\text{ب})^{۲}\,\text{کہ}\right\} - \text{ک ج}\,(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جب کہ}\right] = ۰$$

(۳۳۷)

اطہ کی بجائے (ا + ب) کہ رکھنے کے بعد حاصل ہوتا ہے

$\frac{7}{5}$ ک ا (ا + ب)^2 $\frac{\text{فر}^2 \text{کہ}}{\text{فرت}^2}$ = ک ج ا (ا + ب) جب کہ

یا (ا + ب) $\frac{\text{فر}^2 \text{کہ}}{\text{فرت}^2}$ = $\frac{5}{7}$ ج جب کہ

اس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ متحرک کرہ کا مرکز اُس اسراع کے $\frac{5}{7}$ اسراع کے ساتھ حرکت کرتا ہے جو ایک چکنے ذرہ کا ہوگا اگر یہ ذرہ نصف قطر ا + ب کے ایک کرہ پر نیچے پھسلے۔

یہی نتیجہ طہ کو مساواتوں (ا) اور (ب) سے ساقط کرنے اور پھر کہ کو ایک واحد لگرانج کا محدد سمجھنے سے حاصل ہوسکتا ہے۔

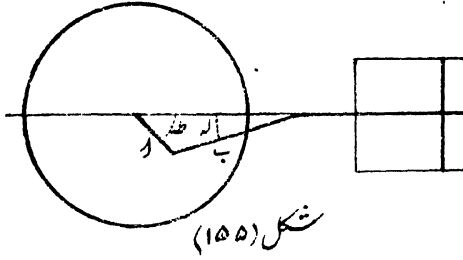
۲۔ ایک اڑپہیہ ایک فشارے سے جو ایک افقی اسطوانے میں حرکت کرتا ہے ایک کرنیک اور ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہے۔ جب انجن میں بھاپ نہیں ہوتی تو اڑپہیہ اپنے توازن کے محل میں ساکن رہتا ہے۔ اس کی حرکت جبکہ وہ ہٹا ہوا ہو معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کرنیک اور ڈنڈے کے طول ا، ب ہیں اور طہ، کہ وہ زاویے ہیں جو وہ اڑپہیہ کے کسی محل میں سمت افقی سے بناتے ہیں۔ تب انجن کا محل پوری طرح معلوم ہوتا ہے جبکہ طہ اور کہ معلوم ہوں۔ طہ اور کہ کی قیمتوں سے انجن کا محل معلوم ہوتا ہے لیکن اگر ہم طہ اور لہ کو اختیاری قیمتیں دیں تو انجن کا ممکن محل حاصل ہونا ضروری نہیں ہے۔

اڑپہیہ، محور اور کرنیک کی گردش کی رفتار طہ ہے اور اس لیے اس حرکت کی توانائی بالحرکت $\frac{1}{2}$ ع طہ^2 ہے جہاں ع، اڑپہیہ کے محور کے گرد انجن کے اِس حصہ کا جمود کا معیار ہے۔ اگر ہم ڈنڈے کے مرکز ثقل کو اس کے وسطی نقطہ پر فرض کریں تو مرکز ثقل کے محددجن کی پیمائش اڑپہیہ کے محور سے ہوئی ہو حسب ذیل ہیں:

افقی : ا جم طہ + $\frac{1}{2}$ ب جم کہ

انتصابی : $\frac{1}{2}$ ب جب کہ

شکل (۱۵۵)

اس طرح ڈنڈے کے مرکز ثقل کی رفتار کے اجزائے ترکیبی ہیں :

افقاً — (ا جب طہ × طہٰ + $\frac{1}{2}$ ب جب کہ × کہٰ) (۳۴۸)

انتصاباً $\frac{1}{2}$ ب جم کہ × کہٰ

اس لئے ڈنڈے کے مرکز ثقل کی پوری رفتار و′

و′^{2} = (ا جب طہ × طہٰ + $\frac{1}{2}$ ب جب کہ × کہٰ)^2 + ($\frac{1}{2}$ ب جم کہ × کہٰ)^2

= ا^2 جب^2 طہ × طہٰ^{2} + ا ب جب طہ جب کہ × طہٰ کہٰ + $\frac{1}{4}$ ب^2 کہٰ^{2}

سے حاصل ہوگی۔ ڈنڈے کی زاوئی رفتار کہٰ ہے اور اس کے گھماؤ کا نصف قطر گ′

$$\text{گ}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\text{ب}}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\text{ب}^2$$

سے حاصل ہوگا۔

پس اگر ڈنڈے کی کمیت ک ہے تو اس کی توانائی بالحرکت

$\frac{1}{2}$ ک (و′^{2} + گ^2 کہٰ^{2})

= $\frac{1}{2}$ ک (ا^2 جب^2 طہ × طہٰ^{2} + ا ب جب طہ جب کہ × کہٰ طہٰ

+ $\frac{1}{3}$ ب^2 کہٰ^{2})

ہے۔

بالآخر، اڑپہیہ کے مرکز سے فشاری ڈنڈے کے سرے کا افقی فاصلہ

ا جم طہ + ب جم کہ ہے اور اِس لیے فشارہ اور فشاری ڈنڈے کی رفتار ہے

- ا جب طہ × طہٰ - ب جب کہ × کہٰ

اگر فشارہ اور اِس کے ڈنڈے کی کمیت گ ہو تو انجن کے اِس حصہ کی توانائی بالحرکت

$$\tfrac{1}{2}\,\text{گ}\,(\text{ا جب طہ × طہٰ + ب جب کہ × کہٰ})^2$$

ہے۔

اب پوری توانائی بالحرکت ت کے لیے حاصل ہوتا ہے

۲ ت = ع طہٰ² + ک (ا² جب² طہ × طہٰ² + ا ب جب طہ جب کہ × کہٰ طہٰ

+ ⅓ ب² کہٰ²) + گ (ا جب طہ × طہٰ + ب جب کہ × کہٰ)²

(ا)

توانائی بالقوہ مہ جس کی پیمائش معیاری تشکیل طہ = کہ = ۰ سے ہوئی ہو

مہ = - ك ج ھ جب (طہ + صہ) - ½ ک ج ب جب کہ (ب)

ہے جہاں ك اڑپہیہ اور کرنیک کی کل کمیت ہے اور اِس کے مرکز ثقل کے قطبی محدد ھ، صہ ہیں جبکہ طہ = ۰ ۔

طہ اور کہ کی تبدیلیاں غیر تابع نہیں ہیں۔ شکل پر سرسری نظر ڈالنے سے یہ معلوم ہوگا کہ رشتہ

ا جب طہ = ب جب کہ (ج)

ہمیشہ قائم رہنا چاہئے اور اِس کو تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر طہ اور کہ کو تعمیمی محددوں کے طور پر لیا جائے تو ہمیں فرض کرنا چاہئے کہ وہ رشتہ

ا جم طہ مف طہ - ب جم کہ مف کہ = ۰

کے ذریعہ مربوط ہیں ۔

اِس طرح لگرانج کی مساواتیں ہونگی :

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہٰ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}} + \text{لہ ا جم طہ} = 0 \qquad (\text{د})$$

$$\frac{\text{د}}{\text{دت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}}-\text{لہ ب جم کہ}=\cdot \qquad (\text{ع})$$

(۴۳۹) اِن مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنے پر حاصل ہوتا ہے :

$$\text{ب جم کہ}\left[\frac{\text{د}}{\text{دت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}}\right]$$

$$+\text{ا جم طہ}\left[\frac{\text{د}}{\text{دت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}}\right)-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف کہ}}\right]=\cdot$$

اور ل کی بجائے مساواتوں (ا) اور (ب) سے اس کی قیمت درج کرنے سے یہ مساوات طہ اور کہ کے اوران کے تفرقی سروں (بلحاظ وقت) کے درمیان ایک مساوات ہوجاتی ہے۔ اِس مساوات اور ہندسی ربط (ج)

$$\text{ا جب طہ}=\text{ب جب کہ} \qquad (\text{ف})$$

سے ہم طہ اور کہ کو وقت کی رقوم میں معلوم کرسکتے ہیں۔

مساوات (ف) استعمال کرکے ہم مساوات (ب) کو

$$\text{مہ}=-\text{ک ج مہ جب (طہ + صہ)}-\tfrac{1}{2}\text{ک ج ا جب طہ}$$

میں تحویل کرسکتے ہیں۔

اڑپہیہ پر مناسب اوزان کو اِس طریقہ پر رکھا جاسکتا ہے کہ

$$\text{صہ}=\cdot\text{ ک' مہ}+\tfrac{1}{2}\text{ک ا}=\cdot$$

اور اگر ایسا ہوجائے تو مرکز ثقل ہمیشہ ایک ہی ارتفاع پر رہے گا۔ اسے **انجن کو متوازن کرنا** کہتے ہیں۔

اگر ہم یہ فرض کرلیں کہ انجن کو اِس طریقہ پر متوازن کیا جاچکا ہے تو مہ = ۰ اور اس لیے ل = ت ۔ لیکن ہم لگرانج کی مساواتیں استعمال کئے بغیر حرکت کو آسانی سے معلوم کرسکتے ہیں کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ ت کو کُل حرکت کی اثناء میں مستقل رہنا چاہئے اور مساوات (ف) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ا جم طہ}\times\dot{\text{طہ}}=\text{ب جم کہ}\times\dot{\text{کہ}}$$

اور اس لیے ہم مساوات (۱) کی بجائے رکھ سکتے ہیں

۲ حت = ع طۂ۲ + ک (اَ۲ جب۲ طہ × طۂ۲ + اَ۲ جب طہ جم طہ مس کہ × طۂ۲

+ ۱/۲ اَ۲ جم۲ طہ قط۲ کہ × طۂ۲) + ک (ا جب طہ × طۂ + ا جم طہ مس کہ × طۂ)۲

= طۂ۲ [ع + ک اَ۲ جب طہ جب (طہ + کہ) قط کہ + ۱/۲ ک اَ۲ جم۲ طہ قط۲ کہ

+ ک اَ۲ جب۲ (طہ + کہ) قط۲ کہ]

یہ کُل حرکت ہیں مستقل ہے لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ طۂ مستقل ہے۔ پس اگرچہ انجن کو اس طریقہ پر متوازن کیا گیا ہو کہ وہ کسی محل میں ساکن رہ سکے تاہم اس کا یکساں حرکت کرنا ضروری نہیں ہے اگر اسے حرکت میں لایا جائے۔

غیر بقائی نظامات کے لیے لگرانج کی مساواتیں

۲۷۳۔ غیر بقائی نظاموں کے لیے دفعہ (۲۶۸) میں بتایا جا چکا ہے کہ مساوات (۱۵۶)

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} مف\ ل\ فرت = ۰ \qquad (۱۷۲)$$

کی بجائے مساوات

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} [مف\ ت + \Sigma (لا\ مف\ لا + ما\ مف\ ما$$

$$+ ے\ مف\ ی)]\ فرت = ۰ \qquad (۱۷۳)$$

رکھی جانی چاہیئے۔

(۴۴۰) اب چونکہ حسب مساوات (۱۵۸)

لا = ف (طہ۱، طہ۲، ...، طہن)

اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیئے

مف لا = لاَ − لا

= ف (طہ₁ + مف طہ₁، طہ₂ + مف طہ₂ + ...) − ف (طہ₁، طہ₂ ...)

$$= \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\ \text{مف طہ}_1 + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\ \text{مف طہ}_2 + \ldots$$

جہاں دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداریں نظرانداز کی گئی ہیں ۔
اِس طرح

مج (لا مف لا + ما مف ما + ے مف ی) = طا₁ مف طہ₁
+ طا₂ مف طہ₂ + ... طان مف طہن

جہاں طا₁، طا₂، ... طان نظام کی تشکیل پر منحصر ہیں اور اِس لیے وہ صرف طہ₁، طہ₂، ... طہن کے تفاعل ہیں ۔

مساوات (۱۷۳) اب ہوجاتی ہے

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{مف ت فرت} + \int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} (\text{طا}_1 \text{ مف طہ}_1 + \text{طا}_2 \text{ مف طہ}_2$$

$$+ \ldots + \text{طا}_\text{ن} \text{ مف طہ}_\text{ن}) \text{ فرت} = \cdot \qquad (۱۷۴)$$

جس طرح دفعہ (۲۷۰) میں ہم نے معلوم کیا تھا کہ

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \text{مف ل فرت}$$

کو

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \left\{ \sum_1^{\text{ن}} \text{مف طہ}_1 \left[\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} \right) \right] \right\} \text{فرت}$$

میں مستحیل کیا جا سکتا ہے عین اُسی طرح مساوات (۱۷۴) کی پہلی رقم کو

$$\int_{\text{ت}_1}^{\text{ت}_2} \left\{ \sum_1^{\text{ن}} \text{مف طہ}_1 \left[\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \right) \right] \right\} \text{فرت}$$

میں مستحیل کیا جا سکتا ہے ۔ اِس کو درج کرنے سے مساوات ہوجاتی ہے

$$\int_{ت_۱}^{ت_۲} \left\{ \sum^{ن} مف\ طہ \left[\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_۱} - \frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_۱}\right) + طا_۱ \right] \right\} فرت = ۰$$

(۱۷۴) اب چونکہ یہ وقت کی تمام ممکن سعتوں کے لیے درست ہے اس لیے ہر لمحہ پر حاصل ہونا چاہئے

$$\sum^{ن} مف\ طہ \left[\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_۱} - \frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_۱}\right) + طا_۱ \right] = ۰ \quad (۱۷۵)$$

اگر مختلف طہ بغیر کسی قید کے متغیر ہو سکتے ہیں یعنے اگر مف طہ$_۱$، مف طہ$_۲$، ... ، مف طہ$_ن$ کو ہم جو چاہیں قیمتیں دے سکیں تو ہر سر کو معدوم ہونا چاہئے اور اس صورت میں مساواتوں کا نظام ہوگا

$$\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_۱}\right) - \frac{جف\ ت}{جف\ طہ_۱} - طا_۱ = ۰ \quad (۱۷۶)$$

. . . .

لیکن اگر مف طہ$_۱$، مف طہ$_۲$، ... مف طہ$_ن$ اُن قیود کے پابند ہوں جو مساواتوں (۱۶۶)، (۱۶۷)، ..... میں ظاہر کئے گئے ہیں تو حسب دفعہ ۲۷۲ ہم معلوم کرتے ہیں کہ مساواتوں کے اس نظام کی بجائے نظام

$$\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_۱}\right) - \frac{جف\ ت}{جف\ طہ_۱} - طا_۱ + لہ\ ا_۱ + مہ\ ب_۱ + \dots = ۰$$

(۱۷۷)

. . . .

کو رکھنا چاہئے ۔

۲۷۴ ۔ مساواتوں کے یہ نظام اُن نظاموں میں تحویل ہوتے ہیں جو بقائی قوتوں کی خاص صورت میں قبل ازیں حاصل کئے جا چکے ہیں ۔ کیونکہ اس صورت میں اُس کام پر غور کرو جو ایک خفیف ہٹاؤ میں جس میں صرف طہ$_۱$ بدل کر طہ$_۱$ + مف طہ$_۱$ ہو جاتا ہے انجام پاتا ہے ۔ یہ کام طا$_۱$ مف طہ$_۱$ اور نیز وہ ۔ $\frac{جف\ م}{جف\ طہ_۱}$ مف طہ$_۱$ ہے اور اس لیے

$$\text{طا}_1 = -\frac{\text{جف م}}{\text{جف طہ}_1}$$

اس طرح
$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} + \text{طا}_1 = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} - \frac{\text{جف ک}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}$$

اور
$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف}(\text{ل} + \text{م})}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}$$

کیونکہ م میں طہ_1 شامل نہیں ہوتا۔ اس طرح مساوات (۱۷۵) حسب سابق

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = 0$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اسی طریقہ پر مساواتیں (۱۷۷) ... ، ان مساواتوں میں تحویل ہوسکتی ہیں جو دفعہ ۲۷۲ میں حاصل ہو چکی ہیں۔

(۳۴۲)

لگرانج کی مساواتوں کو راست استحالہ سے حاصل کرنا

۲۷۵ — لگرانج کی مساواتوں کو مساوات (۱۵۶) سے اخذ کرنے کی بجائے انہیں حرکت کی مساواتوں کے استحالہ سے راست حاصل کیا جاسکتا ہے۔

حسب سابق

$$\text{لا} = \text{ف}(\text{طہ}_1، \text{طہ}_2، \ldots، \text{طہ}_{\text{ن}}) .$$

اور اس لیے تفرق کرنے پر

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_1}\frac{\text{فرطہ}_1}{\text{فرت}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف طہ}_2}\frac{\text{فرطہ}_2}{\text{فرت}} + \ldots$$

یا
$$\dot{\text{لا}} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}\dot{\text{طہ}}_1 + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_2}\dot{\text{طہ}}_2 + \ldots \quad (۱۷۸)$$

اس طرح $\dot{\text{لا}}$، ایک خطی تفاعل ہے $\dot{\text{طہ}}_1$، $\dot{\text{طہ}}_2$، ... کا اور

$$\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} \qquad (۱۷۹)$$

نیز چونکہ

$$\text{ت} = \frac{۱}{۲} \sum \text{ک} \left(\text{لاَ}^2 + \text{ماَ}^2 + \text{یَ}^2\right)$$

اِس لیے ت حسب سابق طہ_1، طہ_2، ... کا ایک دو درجی تفاعل ہے جس میں طہ_1، طہ_2، .... بھی شامل ہیں۔ تفرق سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} = \sum \text{ک} \left(\text{لاَ}\frac{\text{جف لاَ}}{\text{جف طہ}_1} + \text{ماَ}\frac{\text{جف ماَ}}{\text{جف طہ}_1} + \text{یَ}\frac{\text{جف یَ}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

یا مساوات (۱۷۹) سے

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} = \sum \text{ک} \left(\text{لاَ}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} + \text{ماَ}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1} + \text{یَ}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

اِس طرح

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\right) = \sum \text{ک}\left(\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فرت}^2}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

$$+ \sum \text{ک}\left[\text{لاَ}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}\right) + \text{ماَ}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1}\right) + \text{یَ}\,\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right)\right] \ldots\ldots (۱۸۰)$$

(۴۴۳) چونکہ $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}$ ایک تفاعل ہے طہ_1، طہ_2، .... کا اِس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}\right) = \frac{\text{جف}^2\text{ لا}}{\text{جف طہ}_1^2}\,\frac{\text{فر طہ}_1}{\text{فرت}} + \frac{\text{جف}^2\text{ لا}}{\text{جف طہ}_1\text{جف طہ}_2}\,\frac{\text{فر طہ}_2}{\text{فرت}} + \ldots\ldots (۱۸۱)$$

لیکن مساوات (۱۸۰) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}\ \dot{\text{لا}}}{\text{جف}\ \text{طہ}_1} = \frac{\text{جف}^2\ \text{لا}}{\text{جف}\ \text{طہ}_1^2}\ \dot{\text{طہ}}_1 + \frac{\text{جف}^2\ \text{لا}}{\text{جف}\ \text{طہ}_1\ \text{جف}\ \text{طہ}_2}\ \dot{\text{طہ}}_2 + \dots \quad (182)$$

مساواتوں (۱۸۱) اور (۱۸۲) کے بائیں جانبی ارکان مماثل ہیں، اس لیے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1}\right) = \frac{\text{جف}\ \dot{\text{لا}}}{\text{جف طہ}_1}$$

اور مساوات (۱۸۰) کی آخری سطر

$$\sum \text{ک}\left(\dot{\text{لا}}\frac{\text{جف}\ \dot{\text{لا}}}{\text{جف طہ}_1} + \dot{\text{ما}}\frac{\text{جف}\ \dot{\text{ما}}}{\text{جف طہ}_1} + \dot{\text{ی}}\frac{\text{جف}\ \dot{\text{ی}}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

میں تحویل ہوتی ہے اور اس کی قیمت

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف طہ}_1}\sum \text{ک}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{\text{لا}}^2 + \dot{\text{ما}}^2 + \dot{\text{ی}}^2\right)\right]$$

ہے یا

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}$$

اب مساوات (۱۸۰) ہوجاتی ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\ \dot{\text{طہ}}_1}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}$$

$$= \sum \text{ک}\left(\frac{\text{فر}^2\ \text{لا}}{\text{فرت}^2}\frac{\text{جف لا}}{\text{جف طہ}_1} + \frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فرت}^2}\frac{\text{جف ما}}{\text{جف طہ}_1}\right.$$

$$\left. + \frac{\text{فر}^2\ \text{ی}}{\text{فرت}^2}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف طہ}_1}\right)$$

لیکن حرکت کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{ک}\ \frac{\text{فر}^2\ \text{لا}}{\text{فرت}^2}$$ ، وغیرہ

اِس لیے مساوات مندرجۂ بالا ہو جاتی ہے

$$\frac{فر}{وزت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_1}\right)-\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_1}=\Sigma\left(لا\,\frac{جف\ لا}{جف\ طہ_1}+ما\,\frac{جف\ ما}{جف\ طہ_1}+ے\,\frac{جف\ ی}{جف\ طہ_1}\right)$$

(۳۲۴) اگر ہم نظام میں ایک چھوٹا ہٹاؤ پیدا کریں جس میں $طہ_1$ بڑھکر $طہ_1 +$ مف $طہ_1$، $طہ_2$ بڑھکر $طہ_2 +$ مف $طہ_2$، $طہ_3$ بڑھکر $طہ_3 +$ مف $طہ_3$ وغیرہ ہو جائے تو انجام پائے ہوئے کام کے لیے جو دو مختلف جملے حاصل ہوتے ہیں اِن کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے :

$$طا_1\ مف\ طہ_1+طا_2\ مف\ طہ_2+\ldots\ldots$$
$$=\Sigma(لا\ مف\ لا+ما\ مف\ ما+ے\ مف\ ی)$$

صفحہ (۴۹۰) میں مف لا کی جو قیمت حاصل ہوئی ہے اِس کا اندراج کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$طا_1\ مف\ طہ_1+طا_2\ مف\ طہ_2+\ldots\ldots\ldots$$

$$=\Sigma\left[لا\left(\frac{جف\ لا}{جف\ طہ_1}مف\ طہ_1+\frac{جف\ لا}{جف\ طہ_2}مف\ طہ_2+\ldots\right)+ما(\ldots\ldots)+ے(\ldots\ldots)\right]$$

$$=مف\ طہ_1\,\Sigma\left(لا\,\frac{جف\ لا}{جف\ طہ_1}+ما\,\frac{جف\ ما}{جف\ طہ_1}+ے\,\frac{جف\ ی}{جف\ طہ_1}\right)+مف\ طہ_2\,\Sigma(\ldots)+\ldots\ldots$$

$$=مف\ طہ_1\left[\frac{فر}{وزت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_1}\right)-\frac{جف\ ت}{جف\ طہ_1}\right]+مف\ طہ_2[\ldots]+\ldots\ldots$$

اور مساوات

$$\text{مف } طہ_1 \left[\frac{ف}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1} \right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1} - طا_1 \right] = ۰$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

یہ مساوات وہی ہے جو (۵۷۱) ہے اور لگرانج کی مساواتوں کی مختلف شکلیں حسب سابق اخذ کی جا سکتی ہیں۔

دھکے والی قوتوں کے لیے لگرانج کی مساواتیں

۲۷۶ — فرض کرو کہ دھکوں کا ایک نظام چھوٹے وقفہ $ت = ت_1$ تا $ت = ت_2$ عمل کرتا ہے۔ فرض کرو کہ $طہ_1$، $طہ_2$، $طہ_3$ .... $طہ_ن$ غیر تابع محدد ہیں اور اس لیے لگرانج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{ف}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1} \right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1} = طا_1 \text{، وغیرہ}$$

اگر ہم اس مساوات کو فرت سے ضرب دیں اور $ت = ت_1$ سے $ت = ت_2$ تک تکمل کریں تو

$$\int_{ت_1}^{ت_2} \frac{ف}{\text{فرت}} \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1} \right) \text{فرت} - \int_{ت_1}^{ت_2} \frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1} \text{فرت} = \int_{ت_1}^{ت_2} طا_1 \text{فرت}$$

پہلی رقم کی قیمت ہے

$$\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1} \right)_{ت = ت_2} - \left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1} \right)_{ت = ت_1}$$

اور جب وقفہ $ت_1$ تا $ت_2$ کو انتہائی چھوٹا کیا جاتا ہے تو جملہ بالا صرف اس تبدیلی کی پیمائش کرتا ہے جو دھکے نے $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف } طہ_1}$ میں پیدا کی ہے۔ (۳۴۵)

دوسری رقم $\int_{ت_1}^{ت_2}$ $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}$ فرت میں متکمل $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}$ محدود ہے
اور اس لیے جب وقت کے وقفہ کو لا انتہا چھوٹا فرض کیا جاتا ہے تو
یہ رقم بھی وقت کے ساتھ معدوم ہو گی۔ اس طرح مساوات ہو جاتی ہے:

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \text{ میں تبدیلی} = \int_{ت_1}^{ت_2} \text{طا فرت} \qquad (۱۸۳)$$

۲۷۷ — اگر ف معمولی قوت ہو جو وقفہ $ت_1$ تا $ت_2$ میں دھکے کی طرح
عمل کرے تو ہم $\int_{ت_1}^{ت_2}$ ف فرت کو دھکہ کہتے ہیں۔ تعمیم شدہ محدد طہ$_1$ کے
جواب میں

$$\int_{ت_1}^{ت_2} \text{طا فرت}$$

کو تعمیم شدہ دھکہ کہا جاتا ہے۔ اس طرح مساوات (۱۸۳) شکل

$$\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} \text{ میں تبدیلی} = \text{تعمیم شدہ دھکہ}$$

میں حاصل ہوتی ہے۔

رشتہ

کسی ذرہ کے معیار حرکت میں تبدیلی = ذرہ پر دھکہ
کے ساتھ مساوات بالا کی مشابہت ہونے کی وجہ سے $\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}$ کو تعمیم شدہ
معیار حرکت کہتے ہیں جو محدد طہ$_1$ کے متناظر ہے۔ پس اصطلاحات
"دھکہ" اور "معیار حرکت" کے ان معنوں کے ساتھ رشتہ
معیار حرکت کی تبدیلی = دھکہ
تعمیم شدہ محددوں میں بھی درست ہے۔

جب ہمارے محدد لا، ما، ی ہوں جو فضا میں ایک متحرک ذرہ کے محدد ہیں تو تعمیم شدہ معیار حرکت بلاشبہ معیار حرکت کے معمولی اجزائے ترکیبی کے مماثل ہو جائیں گے۔ چنانچہ

$$ت = \frac{1}{2} ک \left(لاَ^2 + ماَ^2 + یَ^2 \right)$$

اس لیے $\frac{جف\ ت}{جف\ لاَ} = ک\ لاَ$ وغیرہ

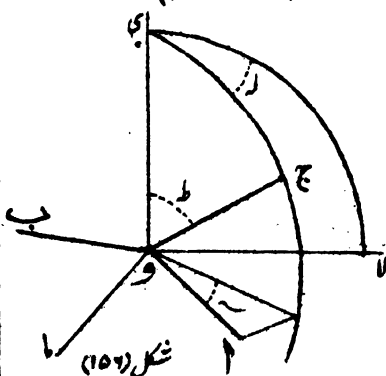
استوار جسم کے لیے یولر کی مساواتیں

(۳۴۶)

۲۷۸ — یولر کی مساواتیں (دفعہ ۲۵۳) لگرانج کی مساواتوں سے اخذ کیجا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک اُستوار جسم ہے جس میں نقطہ و ثابت ہے اور نیز یہ نقطہ فضا میں ثابت ہے یا وہ جسم کا مرکز ثقل ہے۔ فرض کرو کہ اس اُستوار جسم کے معیار، نقطہ و پر کے جمود کے صدر محوروں کے گرد ا، ب، ج ہیں۔ تب اگر ان محددوں کے گرد گردش کے اجزائے ترکیبی $س_1$، $س_2$، $س_3$ ہوں تو حسب دفعہ ۲۴۸ حاصل ہوتا ہے؛

$$ت = \frac{1}{2} \left(ا\, س_1^2 + ب\, س_2^2 + ج\, س_3^2 \right) \qquad (۱۸۴)$$

لگرانجی محددوں کے طور پر فرض کرو کہ جسم کے تیسرے محور و ج کے کُروی قطبی محدد ط، لہٰ ہیں اور ایک تیسرا محدد س جسم کے محور اول و ا اور اس مستوی کا درمیانی زاویہ ہے جو و ج اور محور ط = ۰ میں سے گزرتا ہے یعنی مستوی ج و ی۔

شکل (۱۵۶)

ہمیں اول سہ۱، سہ۲، سہ۳ کو طہ، لہ، سہ کی رقوم میں معلوم کرنا ہے تاکہ ۲ ت، اِن محددوں کے تفاعل کے طور پر بیان ہو سکے۔ جسم کی حرکت دو حرکتوں سے مرکب ہے یعنے وہ حرکت جو مستوی ج و ی کے لحاظ سے ہے اور وہ حرکت جو مستوی ج و ی کی بلحاظ ثابت محوروں کے ہے۔ اول الذکر حرکت، وج کے گرد گردش سہ پر مشتمل ہے اور اگر اِس کو محوروں و ا، و ب، و ج پر تحلیل کیا جائے تو اِس کے اجزائے ترکیبی

۰، ۰، سہ

ہیں۔

مستوی ج و ی کی حرکت دو گردشوں یعنے

(ا) گردش طہ جو مستوی ج و ی کے علی القوائم محور کے گرد ہے،

(ب) گردش لہ جو محور طہ = ۰ کے گرد ہے

سے مرکب ہے۔

(۳۴۷) اگر اِن گردشوں کو محاور و ا، و ب، و ج کی سمتوں میں تحلیل کیا جائے تو پہلے حصہ کے اجزائے ترکیبی

طہ جب سہ، طہ جم سہ، ۰

اور دوسرے کے اجزائے ترکیبی

- لہ جب طہ جم سہ، لہ جب طہ جب سہ، لہ جم طہ

ہیں۔

اِن حرکتوں کو مرکب کرنے پر حاصل ہوتا ہے

سہ۱ = طہ جب سہ - لہ جب طہ جم سہ
سہ۲ = طہ جب سہ + لہ جب طہ جب سہ (۱۸۵)
سہ۳ = سہ + لہ جم طہ

فرض کرو کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہوا کام

طا مف طہ + لا مف لہ + سا مف سہ

ہے ۔ تب محدد سا کے لیے لگرانج کی مساوات ہے :

$$\frac{جف}{جف\ ت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ سَہ}\right) - \frac{جف\ ت}{جف\ سہ} = سا \qquad (۱۸۶)$$

مساوات (۱۸۴) کے تفرق سے حاصل ہوتا ہے :

$$\frac{جف\ ت}{جف\ سَہ} = ا\,سَہ_۱ \frac{جف\ سَہ_۱}{جف\ سَہ} + ب\,سَہ_۲ \frac{جف\ سَہ_۲}{جف\ سَہ} + ج\,سَہ_۳ \frac{جف\ سَہ_۳}{جف\ سَہ}$$

$= ج\ سَہ_۳$ ، مساواتوں (۱۸۵) سے اندراج کرنے پر ۔

نیز

$$\frac{جف\ ت}{جف\ سہ} = ا\,سَہ_۱ \frac{جف\ سَہ_۱}{جف\ سہ} + ب\,سَہ_۲ \frac{جف\ سَہ_۲}{جف\ سہ} + ج\,سَہ_۳ \frac{جف\ سَہ_۳}{جف\ سَہ}$$

$= ا\,سَہ_۱$ (طہ جم سہ + لہ جب طہ جب سہ)

$+ ب\,سَہ_۲$ (- طہ جب سہ + لہ جب طہ جم سہ)

$= (ا - ب)\, سَہ_۱\, سَہ_۲$

بالآخر سا مف سہ وہ کام ہے جو بیرونی قوتیں چھوٹی گردش مف سہ میں انجام دیتی ہیں اور اس لیے بموجب دفعہ (۱۲۱) سا ، محور و ج کے گرد اِن قوتوں کے معیاروں کے مجموعہ ن کے مساوی ہے ۔

اِن تمام اندراجات کو عمل میں لانے پر مساوات (۱۸۶) ہو جاتی ہے : (۳۴۸)

$$ج \frac{فر\ سَہ_۳}{فر\ ت} - (ا - ب)\, سَہ_۱\, سَہ_۲ = ن$$

جو یولر کی تیسری مساوات ہے اور دوسری دو مساواتوں کو تشاکل سے حاصل کیا جا سکتا ہے ۔

چھوٹے اہتزاز

۲۷۹ ــــ فرض کرو کہ کسی نظام کے تعمیم شدہ محدد طہ۱ ، طہ۲ ، طہ۳ ... طہن ہیں اور فرض کرو کہ یہ تمام محدد غیر تابع ہیں اور اس لیے طہَ۱ ، طہَ۲ ... طہَن کی

قیمتوں کے کسی جٹ سے نظام کی ایک ممکن تشکیل حاصل ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ تشکیل

$$ط_۱ = \bar{ط}_۱ ، ط_۲ = \bar{ط}_۲ ، \ldots ، ط_ن = \bar{ط}_ن \quad (۱۸۷)$$

توازن کی تشکیل ہے۔ اب اگر

$$ل_۱ = ط_۱ - \bar{ط}_۱ ، ل_۲ = ط_۲ - \bar{ط}_۲ ، \ldots ، ل_ن = ط_ن - \bar{ط}_ن$$

تو مقداروں $ل_۱ ، ل_۲ ، \ldots ، ل_ن$ کو نظام کے تعمیم شدہ محددوں کے طور پر لیا جا سکتا ہے اور یہ محدد توازن کے محل میں سب کے سب معدوم ہونگے۔ فرض کرو کہ توازن کی تشکیل میں توانائی بالقوہ کی قیمت $\bar{ک}$ سے تعبیر کیگئی ہے۔ کسی دوسری تشکیل میں توانائی بالقوہ کے جملہ کو ٹیلر کے مسئلہ سے شکل

$$ک = \bar{ک} + ل_۱ \frac{جف ک}{جف ط_۱} + ل_۲ \frac{جف ک}{جف ط_۲} + \ldots + ل_ن \frac{جف ک}{جف ط_ن}$$

$$+ \frac{۱}{۲}\left(ل_۱^۲ \frac{جف^۲ ک}{جف ط_۱^۲} + ۲ ل_۱ ل_۲ \frac{جف^۲ ک}{جف ط_۱ جف ط_۲} + \ldots\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں تمام تفرقی سروں کو توازن کے محل میں محسوب کیا گیا ہے۔ لیکن توازن کے اس محل میں دفعہ ۱۳۵ کے مسئلہ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{جف ک}{جف ط_۱} = \frac{جف ک}{جف ط_۲} = \ldots = \frac{جف ک}{جف ط_ن} = ۰ \quad (۳۴۹)$$

اس لیے $ک$ کی قیمت کو شکل

$$ک = \bar{ک} + ا_{۱۱} ل_۱^۲ + ۲ ا_{۱۲} ل_۱ ل_۲ + \ldots + ا_{نن} ل_ن^۲$$

میں لکھا جا سکتا ہے جس میں $ل_۱ ، ل_۲ ، \ldots$ کی وہ قوتیں جو دو سے بڑھی ہیں

نظرانداز کردی گئی ہیں کیونکہ ہم صرف اُن حرکتوں پر توجہ محدود رکھتے ہیں جن میں $لہ_۱$، $لہ_۲$ ... سب کے سب چھوٹی مقداریں ہیں۔

توانائی بالحرکت حسب سابق (دفعہ ۲۷۰) $لہ_۱$، $لہ_۲$ ... $لہ_ن$ کا ایک دو درجی تقاعل ہے۔ فرض کرو کہ

$$ت = ب_{۱۱} لہ_۱^۲ + ۲ ب_{۱۲} لہ_۱ لہ_۲ + \dots + ب_{نن} لہ_ن^۲ \qquad (۱۸۹)$$

سر $ب_{۱۱}$، $ب_{۱۲}$، .... $ب_{نن}$ فی الحقیقت $طہ_۱$، $طہ_۲$، ... $طہ_ن$ کے تقاعلات ہیں لیکن ہم اِن کی قیمتوں کو اُن قیمتوں کے مساوی سمجھ سکتے ہیں جو توازن کی تشکیل میں حاصل ہوتی ہیں اور اِس لیے اِن کو مستقل مقداروں کے طور پر سمجھا جا سکتا ہے۔

۲۸۰ — اب ن متغیروں $لا_۱$، $لا_۲$، ....، $لا_ن$ کے دو درجی دو تقاعلوں پر غور کرو جو حسب ذیل ہیں:

$$ف (لا_۱، لا_۲، ....، لا_ن) = ا_{۱۱} لا_۱^۲ + ۲ ا_{۱۲} لا_۱ لا_۲ + \dots + ا_{نن} لا_ن^۲ ،$$

$$ف (لا_۱، لا_۲، ....، لا_ن) = ب_{۱۱} لا_۱^۲ + ب_{۱۲} لا_۱ لا_۲ + \dots + ب_{نن} لا_ن^۲$$

چونکہ تقاعل ت جس کی تعریف مساوات (۱۸۹) سے کی گئی ہے بالضرور مثبت ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف ($لا_۱$، $لا_۲$، ....، $لا_ن$) کو $لا_۱$، $لا_۲$، ....، $لا_ن$ کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہونا چاہئے۔ پس جبر و مقابلہ کے ایک مشہور مسئلہ سے ہم حسب ذیل نمونے کا ایک استحالہ معلوم کر سکتے ہیں:

$$\left.\begin{aligned} لا_۱ &= کہ_{۱۱} ضا_۱ + کہ_{۱۲} ضا_۲ + \dots + کہ_{۱ن} ضا_ن \\ لا_۲ &= کہ_{۲۱} ضا_۱ + کہ_{۲۲} ضا_۲ + \dots + کہ_{۲ن} ضا_ن \end{aligned}\right\} \qquad (۱۹۰)$$

جس میں سر کہ" وغیرہ حقیقی ہیں۔ یہ استحالہ ایسا ہے کہ ف اور ف حسب ذیل نمونے کے جملوں میں مستحیل ہوتے ہیں:

$$ف(لا_۱، لا_۲، ... لا_ن) = ع_۱ ضا_۱^۲ + ع_۲ ضا_۲^۲ + ... + ع_ن ضا_ن^۲ ،$$

$$ف(لا_۱، لا_۲، ... لا_ن) = ب_۱ ضا_۱^۲ + ب_۲ ضا_۲^۲ + ... + ب_ن ضا_ن^۲$$

اور تمام سر $ب_۱$، $ب_۲$، ....، $ب_ن$ مثبت ہوں گے۔

(۳۵۰) اِس مسئلہ کے جبریہ ثبوت علم التحلیل کے مقالات یا سامن کی ہائر الجبرا میں ملیں گے۔ یہ مسئلہ ایک ہندسی تعبیر پر جس میں متغیروں کی تعداد تین ہے غور کرنے سے فوراً سمجھ میں آجائے گا۔ متغیروں کو لا، ما، ی لینے سے مساواتیں

$$ف(لا، ما، ی) = ۱ ، ف(لا، ما، ی) = ۱ \quad (۱۹۱)$$

ہم مرکز دو درجیوں کی مساواتیں ہوں گی اور چونکہ لا، ما، ی کی تمام قیمتوں کے لیے ف مثبت ہے اس لیے دو سرا دو درجی ایک ناقص نما ہوگا۔ یہ معلوم ہے کہ اگر دو ہم مرکز دو درجیوں میں سے ایک ناقص نما ہو تو ایسے دو درجی باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں۔ اُس نمونے کے استحالہ سے جس کو مساوات (۱۹۴) سے بیان کیا گیا ہے ہم محددوں کے محوروں کو اِن وتروں پر منتقل کر سکتے ہیں اور تب دو درجیوں کی مساواتیں مطلوبہ اشکال

$$ع_۱ ضا_۱^۲ + ع_۲ ضا_۲^۲ + ع_۳ ضا_۳^۲ = ۱ ، ب_۱ ضا_۱^۲ + ب_۲ ضا_۲^۲ + ب_۳ ضا_۳^۲ = ۱ \quad (۱۹۲)$$

میں حاصل ہوتی ہیں۔

[معمولی استدلال سے اِس ہندسی مسئلہ کی صداقت ظاہر ہوگی کہ ایک ناقص نما اور ایک دوسرا دو درجی ہمیشہ باہم مزدوج وتروں کا ایک حقیقی جٹ مشترک رکھتے ہیں۔ کیونکہ ایک حقیقی خطی استحالہ سے ناقص نما ایک کرۂ میں مستحیل ہوگا اور دوسرا دو درجی ایک نئے لیکن تاہم حقیقی دو درجی میں مستحیل ہوگا۔ اب

اِس حقیقی دو درجی کے صدر محور کرہ اور دو درجی کے لیے باہم مزدوج حقیقی وتر ہیں اور اُلٹا استحالہ کرنے سے باہم مزدوج حقیقی وتر باہم مزدوج حقیقی وتر رہتے ہیں۔]

اور ہم نے جبریہ طور پر ثابت کیا ہے کہ مساواتیں (۱۹۱) مساوالتوں (۱۹۲) میں مستحیل ہو سکتی ہیں لیکن یہ ظاہر ہے کہ یہ جبریہ ثبوت صرف تین متغیروں کی صورت پر محدود نہیں ہے اِس لیے مسئلہ بالا متغیروں کی کسی تعداد کے لیے درست ہونا چاہیئے۔

۲۸۱ — اِس مسئلہ سے ثابت ہوتا ہے کہ ہم نئے محدد سہ، سہ، ... سن معلوم کر سکتے ہیں جو محددوں لہ، لہ، ... لہن سے رشتوں

$$لہ_۱ = کہ_{۱۱} سہ_۱ + کہ_{۱۲} سہ_۲ + \ldots + کہ_ن سہ_ن \qquad (۱۹۳)$$

$$لہ'_۱ = کہ_{۱۱} سہ'_۱ + کہ_{۱۲} سہ'_۲ + \ldots + کہ_{۱ن} سہ_ن \qquad (۱۹۴)$$

کے ذریعہ مربوط ہوں اِس طور پر کہ اگر اِن محددوں کی رقوم میں بیان کیا جائے تو توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت حسب ذیل اشکال اختیار کریں:

$$ک = ک_\cdot + عہ_۱ سہ_۱^۲ + عہ_۲ سہ_۲^۲ + \ldots + عہ_ن سہ_ن^۲ \qquad (۱۹۵)$$

$$ت = بہ_۱ سہ'^۲_۱ + بہ_۲ سہ'^۲_۲ + \ldots + بہ_ن سہ'^۲_ن \qquad (۱۹۶)$$

محددوں سہ، سہ، ... سہن کو نظام کے **صدر محدد** کہا جاتا ہے، بعض مصنف اِن کو طبعی محدد بھی کہتے ہیں۔

(۲۵۱) اِن محددوں کی رقوم میں لگرانج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{ف}{فت}\left(\frac{جف ت}{جف سہ'_۱}\right) - \frac{جف ت}{جف سہ_۱} = -\frac{جف ک}{جف سہ_۱}، \quad \text{وغیرہ}$$

ہیں اور یہ مساواتیں

$$بہ_۱ \frac{ف^۲ سہ_۱}{فت^۲} = - عہ_۱ سہ_۱، \quad \text{وغیرہ}$$

ہو جاتی ہیں۔

قائم توازن

۲۸۲ — اگر ع_1 مثبت ہے تو فرض کرو کہ ہم $\frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1} = \text{ک}_1^2$ رکھتے ہیں اور اس لیے کہ ک_1 حقیقی ہوگا۔

مساوات اب ہے

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{س}_1}{\text{فر}\,\text{ت}^2} = -\text{ک}_1^2\,\text{س}_1$$

اور اس کا حل ہے

$$\text{س}_1 = \text{ا}_1\ \text{جم}\ (\text{ک}_1\text{ت} - \text{ص}_1) \qquad (۱۹۸)$$

جو دفعہ (۲۰۸) کے مطابق ہے۔ اس طرح حرکت تعدد ک_1 کی سادہ موسیقی حرکت ہے۔ اگر تمام سر ع_1، ع_2، ... $\text{ع}_\text{ن}$ مثبت ہوں تو مساواتوں کے مکمل حل کی شکل

$$\text{س}_1 = \text{ا}_1\ \text{جم}\ (\text{ک}_1\text{ت} - \text{ص}_1)،$$

$$\text{س}_2 = \text{ا}_2\ \text{جم}\ (\text{ک}_2\text{ت} - \text{ص}_2)،\ \text{وغیرہ}$$

ہوگی اور کسی ذرہ کا محدد لا جس کی قیمت توازن کے محل میں لا_0 ہے حسب ذیل ہوگی:

$$\text{لا} = \text{لا}_0 + (\text{ط}_1 - \bar{\text{ط}}_1)\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_1} + (\text{ط}_2 - \bar{\text{ط}}_2)\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_2} + \cdots$$

$$= \text{لا}_0 + \text{س}_1\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_1} + \text{س}_2\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ط}_2} + \cdots$$

$$= \text{لا}_0 + \text{ب}_1\ \text{جم}\ (\text{ک}_1\text{ت} - \text{ص}_1) + \text{ب}_2\ \text{جم}\ (\text{ک}_2\text{ت} - \text{ص}_2) + \cdots$$

جہاں ب_1، ب_2، ... نئے مستقلات ہیں۔

پس کسی واحد ذرہ کی حرکت وہ حرکت ہوگی جو متعدد سادہ موسیقی

حرکتوں سے مرکب ہوگی۔

(۳۵۲) **۲۸۳** — کسی صدر محدد $س_۱$ کے جواب میں توانائی بالقوہ $ع_۱ س_۱^۲$ ہے یا اگر ہم $س_۱$ کو مساوات (۱۹۸) سے حاصل کریں تو یہ توانائی بالقوہ

$$ع_۱ ا_۱^۲ جم^۲ (ک_۱ ت - ص_۱)$$

ہے۔

اسی طرح اس صدر ارتعاش کے جواب میں توانائی بالحرکت $ب_۱ \dot{س}_۱^۲$ یا

$$ب_۱ ا_۱^۲ ک_۱^۲ جب^۲ (ک_۱ ت - ص_۱)$$

ہے۔ اگر ایک طویل وقت کے لیے اوسط لیا جائے تو $جم^۲ (ک_۱ ت - ص_۱)$ اور $جب^۲ (ک_۱ ت - ص_۱)$ کی اوسط قیمتیں $\frac{1}{2}$ ہیں اور اس لیے اوسط توانائی بالقوہ اور اوسط توانائی بالحرکت علی الترتیب

$$\frac{1}{2} ع_۱ ا_۱^۲ ، \frac{1}{2} ب_۱ ا_۱^۲ ک_۱^۲$$

ہیں اور یہ مساوی ہیں کیونکہ $ک_۱^۲ = \frac{ع_۱}{ب_۱}$۔ پس کسی ارتعاش میں اوسط توانائی بالقوہ اور اوسط توانائی بالحرکت مساوی ہوتی ہیں۔

غیر قایم توازن

۲۸۴ — فرض کرو کہ مساوات (۱۹۵) کے سروں میں سے کوئی ایک سر (فرض کرو $ع_۱$) منفی ہے۔ فرض کرو کہ ہم $\frac{ع_۱}{ب_۱} = -ک_۱^۲$ رکھتے ہیں تو $ک_۱$ حقیقی ہوگا۔ اب مساوات (۱۹۷) شکل

$$\frac{ف^۲ س_۱}{ف ت^۲} = ک_۱^۲ س_۱$$

اختیار کرتی ہے اور اس کا حل ہے

$$س_۱ = ا_۱ قو^{\text{ک}۱\text{ت}} + ب_۱ قو^{\text{ک}۱\text{ت}}$$

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ س۱ وقت کے ساتھ لا انتہا بڑھتا ہے اور قیمت س۱ = ۰ کے گرد اہتزاز نہیں کرتا۔ اس طرح حرکت غیر قائم ہے اور اب ہم دیکھتے ہیں کہ حرکت صرف اُس وقت قائم ہوسکتی ہے جبکہ سیروں ع۱، ع۲، ... ، عن میں سے سب سر مثبت ہوں۔ بالفاظ دیگر

قائم توازن کے لیے توانائی بالقوہ توازن کی تشکیل میں مطلقاً اقل ہونی چاہیئے۔

یہ وہ نتیجہ ہے جس کو بغیر ثبوت کے دفعہ ۱۵۳ میں بیان کیا جا چکا ہے۔

(۳۵۴)

قسری ارتعاش

۲۸۵ — وہ اہتزاز جن پر ہم اب تک غور کرتے رہے ہیں اُس نمونے کے ہیں جو آزاد ارتعاش کے طور پر مشہور ہیں یعنے کُل عاملہ قوتیں خود نظام کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

لیکن اہتزاز کا ایک اور نمونہ پیش ہوتا ہے جبکہ نظام پر اُن قوتوں کے علاوہ جو خود اُس کی توانائی بالقوہ سے پیدا ہوتی ہیں بیرونی جانب سے دوسری قوتیں بھی عمل کر رہی ہوں۔ اِن اہتزازوں کو قسری اہتزاز کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ نظام کی توانائی بالقوہ اور توانائی بالحرکت علی الترتیب مساواتوں (۱۹۵) اور (۱۹۶) سے حاصل ہوئی ہیں اور یہ کہ کسی لمحہ پر عمل کرنے والی بیرونی قوتوں کا نظام ایسا ہے کہ ایک چھوٹے ہٹاؤ میں انجام پایا ہوا کام

$$سا_۱ مف س_۱ + سا_۲ مف س_۲ + \dots$$

ہے۔

اب اِس نظام کے لیے لگرانج کی مساواتیں ہیں:

$$\frac{ف}{ف ت}\left(\frac{جف ت}{جف \dot{س}_1}\right) - \frac{جف ت}{جف س_1} = -\frac{جف ک}{جف س_1} + سا_1 \text{، وغیرہ}$$

یہ مساوات ہو جاتی ہے:

$$۲ بہ_1 \frac{ف^۲ س_1}{ف ت^۲} = -۲ عہ_1 س_1 + سا_1 \qquad (۱۹۹)$$

جس میں $سا_1$ اب وقت کا ایک تفاعل ہے۔ اس مساوات کو اُن قاعدوں کے ذریعہ حل کیا جا سکتا ہے جو تفرقی مساواتوں کی کسی کتاب میں مذکور ہوتے ہیں۔ اگر حسب سابق $ک_1^۲ = \frac{عہ_1}{بہ_1}$ لیا جائے تو عام حل ہے:

$$س_1 = ا_1 جم(ک_1 ت - صہ_1) + \frac{1}{\sqrt{۲ عہ_1 بہ_1}} \int_{\bar{ت}=-\infty}^{\bar{ت}=ت} (سا_1)_{ت=\bar{ت}} جب ک_1(ت - \bar{ت}) ف\bar{ت}$$

تکمل کی نچلی حد یا تو $\bar{ت} = -\infty$ ہے یا وہ لمحہ ہے جس پر بیرونی قوتوں نے اولاً عمل کرنا شروع کیا تھا۔

۲۸۶۔ ایک بہت اہم صورت پیدا ہوتی ہے جبکہ $سا_1$ صرف وقت کے لحاظ سے دوَری ہو، فرض کرو

$$سا_1 = ع جم(ش_1 ت - جہ_1)$$

اب حل ہے

$$سا_1 = ا_1 جم(ک_1 ت - صہ_1) + \frac{ع}{۲ عہ_1 - ۲ بہ_1 ش_1^۲} جم(ش_1 ت - جہ_1) \qquad (۳۵۴)$$

لیکن چونکہ $عہ_1 = بہ_1 ک_1^۲$ اِس لیے

$$سا_1 = ا_1 جم(ک_1 ت - صہ_1) + \frac{ع}{۲ عہ_1\left(1 - \frac{ش_1^۲}{ک_1^۲}\right)} جم(ش_1 ت - جہ_1)$$

اِس طرح اب سا ، میں تغیّر ' تعدد کہ ، کی سادہ موسیقی حرکت اور نیز تعدد ش ، کی سادہ موسیقی حرکت سے مرکب ہے جہاں ش قوت عاملہ کا تعدد ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ش ' کہ ، سے بہت ہی قریب ہو تو یہ دوسرا ارتعاش بہت بڑے حیطہ کا ہے۔ انتہائی صورت ش ، = کہ میں دوسرے ارتعاش کا حیطہ لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن اب یہ دو ارتعاش ایک ہی دَور کے ہوتے ہیں اور اس لیے اِن کو مرکب کیا جا سکتا ہے۔ ہم نہیں کہہ سکتے کہ حاصل ارتعاش لامتناہی حیطہ کا ہوگا کیونکہ ا ، اور صہ کی قیمتیں معلوم نہیں ہیں اور یہ عین ایسی ہو سکتی ہیں کہ دوسری رقم کے لامتناہی حیطہ کو برباد کر دیں۔ حاصل شدہ نتیجہ حسب ذیل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:

جب کسی نظام پر ایک دَوری قوت عمل کرے جس کا تعدد نظام کے صدر ارتعاشات میں سے ایک کے تعدد کے بہت ہی قریب ہو تو قسری اہتزازات بہت بڑے حیطہ کے ہوں گے۔

اِس کو گمک کا اصول کہتے ہیں۔

یہ اُصول ایسا ہے جس کے متعدد اطلاقات فطرت میں نظر آتے ہیں مثلاً ایک پُل کو جو مطلقاً اُستوار نہیں ہوتا ایک ایسا نظام سمجھا جا سکتا ہے جس میں متعدد آزاد ارتعاش ہیں۔ اگر آدمیوں کی ایک جماعت قدم میں قدم ملاتے ہوئے باقاعدہ پُل پر سے گذرے تو وہ پُل پر ایک دَوری قوت لگائیں گے اور اگر ان کے قدم کا دَور پُل کے آزاد دَوروں میں سے کسی ایک پر تقریباً منطبق ہو جائے تو پُل میں قسری ارتعاشات کا حیطہ اسقدر بڑا ہو سکتا ہے کہ پُل پر خطر ہو جائے۔ یہی سبب ہے کہ جب فوج پُل کو عبور کرنا شروع کرتی ہے تو اس کو "بے قاعدہ قدموں میں چلنے" کا حکم دیا جاتا ہے۔

دوسری مثال ایک جہاز کی ہو سکتی ہے، جہاز کامل طور پر اُستوار نہیں ہوتا اور اس لیے اس میں متعدد آزاد ارتعاش ہوں گے۔ اس کے انجنوں کی حرکت ایک دَوری قوت لگائے گی جس کا دَور اس کی گردش کے مساوی ہوگا اور اگر یہ

دَور جہاز کے آزاد ارتعاشات میں سے کسی پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت بُری طرح نیچے اوپر ہونا شروع کرے گا۔ اِس کا علاج انجن کی چال کو بدل کر کیا جا سکتا ہے تا آنکہ وہ جہاز کے آزاد ارتعاش کے ساتھ گمک میں نہ ہو۔

آخری مثال کے طور پر یہ بتایا جا سکتا ہے کہ کوئی جہاز اپنے انتصابی (۳۵۵) محل کے گرد لڑھکنے کا ایک آزاد دَور رکھے گا۔ اگر جہاز سمندر کے اندر بھنور میں ہو تو اِس سے ٹکرانے والی موجیں بیرونی قوتیں لگائیں گی جن کو تقریباً دَوری سمجھا جا سکتا ہے۔ اگر موجوں کا دَور جہاز کے دَور پر منطبق ہو جائے تو جہاز بہت زیادہ لُڑھکنے لگیگا اگرچہ موجیں مقابلتاً چھوٹی ہوں۔ اس خطرہ کا علاج جہاز کے راستہ کو بدل کر کیا جا سکتا ہے، اِس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ موجیں اب مختلف وقفہ پر جہاز سے ٹکرائیں گی۔ دوسرا طریقہ بادبان پھیلا کر جہاز کے میلان کو بدلنے کا ہے، اِس کی وجہ سے جہاز توازن کے ایک مختلف محل کے گرد اہتزاز کرے گا اور اِس کے گرد آزاد ارتعاشات مختلف ہوں گے۔

آئینی مساواتیں

۲۸۷ — اگر $ط_1$، $ط_2$، ... کسی نظام کے لگرانجی محدد ہوں تو توانائی بالحرکت ت ایک دو درجی تفاعل ہے $\dot{ط}_1$، $\dot{ط}_2$، $\dot{ط}_3$ ... کا۔ فرض کرو کہ متناظر معیار $ع_1$، $ع_2$، ...، $ع_ن$ ہیں جو مساواتوں

$$ع_1 = \frac{جف\ ت}{جف\ \dot{ط}_1}، \text{وغیرہ} \qquad (۳۰۰)$$

سے حاصل ہوتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ ہم ایک تفاعل تَ شریک کرتے ہیں جہاں

$$تَ = ع_1 \dot{ط}_1 + ع_2 \dot{ط}_2 + \ldots - ت$$

اِس طرح تَ ایک تفاعل ہے $ع_1$، $ع_2$، ...، $ط_1$، $ط_2$، ...، $\dot{ط}_1$، $\dot{ط}_2$ ... کا۔

نیز یہ ظاہر ہے کہ $ع_1$، $ع_2$، ... تفاعلات ہیں $\dot{ط}_1$، $\dot{ط}_2$، ...، $ط_1$، $ط_2$، ... کے۔

تَ کو تفرق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرتَ} = \text{ع}_1\,\text{فرطہ}_1 + \text{ع}_2\,\text{فرطہ}_2 + \ldots\ldots$$
$$+\ \text{طہ}_1\,\text{فرع}_1 + \text{طہ}_2\,\text{فرع}_2 + \ldots\ldots$$
$$-\ \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\,\text{فرطہ}_1 - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_2}\,\text{فرطہ}_2 \ldots\ldots$$
$$-\ \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\,\text{فرطہ}_1 - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_2}\,\text{فرطہ}_2 - \ldots\ldots$$

اور یہ، مساوات (۲۰۰) کی رو سے

$$\text{فرتَ} = \text{طہ}_1\,\text{فرع}_1 + \text{طہ}_2\,\text{فرع}_2 + \ldots - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\,\text{فرطہ}_1 - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_2}\,\text{فرطہ}_2 - \ldots \qquad (۲۰۱)$$

میں تحویل ہوتی ہے۔

(۳۵۶) اب چونکہ تفرقی فرطہ$_1$، فرطہ$_2$، ..... اس مساوات میں شریک نہیں ہیں اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تَ کو صرف ع$_1$، ع$_2$، .....، طہ$_1$، طہ$_2$، ..... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے۔ ہم آسانی سے اس کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{ع}_1\,\text{طہ}_1 + \text{ع}_2\,\text{طہ}_2 + \ldots + \text{ع}_n\,\text{طہ}_n$$
$$= \text{طہ}_1 \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} + \text{طہ}_2 \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_2} + \ldots + \text{طہ}_n \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_n}$$

= ۲ ت، کیونکہ ت ایک متجانس دو درجی تفاعل ہے طہ$_1$، طہ$_2$، ..... کا۔

اس طرح $\qquad \text{تَ} = ۲\,\text{ت} - \text{ت} = \text{ت}$

جس سے یہ ثابت ہے کہ تَ، ت کے مساوی ہے لیکن وہ ع$_1$، ع$_2$، .....، طہ$_1$، طہ$_2$، ..... کے ایک تفاعل کے طور پر بیان ہوا ہے۔

اس لیے

$$\text{تَ} = \text{ت} = \frac{1}{2}\left(\text{ع}_1\text{طہ}_1 + \text{ع}_2\text{طہ}_2 + \ldots + \text{ع}_\text{ن}\text{طہ}_\text{ن}\right)$$

تمثیلاً فرض کرو کہ $\text{ت} = \text{ا}\,\text{طہ}_1^2 + 2\,\text{ھ}\,\text{طہ}_1\text{طہ}_2 + \text{ب}\,\text{طہ}_2^2$

تو

$$\text{ع}_1 = 2(\text{ا}\,\text{طہ}_1 + \text{ھ}\,\text{طہ}_2)\text{، } \text{ع}_2 = 2(\text{ھ}\,\text{طہ}_1 + \text{ب}\,\text{طہ}_2)$$

اب تعریف کی رو سے

$$\text{تَ} = \text{ع}_1\text{طہ}_1 + \text{ع}_2\text{طہ}_2 + \ldots\ldots - \text{ت}$$

$$= 2\text{طہ}_1(\text{ا}\,\text{طہ}_1 + \text{ھ}\,\text{طہ}_2) + 2\text{طہ}_2(\text{ھ}\,\text{طہ}_1 + \text{ب}\,\text{طہ}_2) - \text{ت}$$

$$= \text{ت} = \frac{1}{2}\text{ع}_1\text{طہ}_1 + \frac{1}{2}\text{ع}_2\text{طہ}_2$$

مساوات (۲۰۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف تَ}}{\text{جف طہ}_1} = -\frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1}\text{،}$$

$$\frac{\text{جف تَ}}{\text{جف ع}_1} = \text{طہ}_1 \qquad (۲۰۲)$$

لگرانج کی مساواتوں

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = 0$$

میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف (ت - ک)}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف ت}}{\text{جف طہ}_1} = \text{ع}_1$$

اِس طرح لگرانج کی مساواتیں شکل

$$\frac{\text{فر ع}_1}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ل}}{\text{جف طہ}_1} = \frac{\text{جف(ت - ک)}}{\text{جف طہ}_1} = -\frac{\text{جف(تَ + ک)}}{\text{جف طہ}_1} \qquad (۲۵۴)$$

میں لکھی جا سکتی ہیں، اور مساوات (۲۰۲) کی رُو سے

$$\frac{\text{فر طہ}_1}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف تَ}}{\text{جف ع}_1}$$

اگر ہم لکھیں ھ = تَ + ک تو یہ مساواتیں شکل ذیل اختیار کرتی ہیں :

$$\frac{\text{فرط}_1}{\text{فرت}} = \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ع}_1} ،$$

$$\frac{\text{فرع}_1}{\text{فرت}} = -\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ط}_1} ، \quad \text{وغیرہ}$$

۲۸۸ — اِس کو حرکیاتی مساواتوں کی آئینی شکل کہا جاتا ہے۔ تفاعل ھ کو ہیملٹونی تفاعل کہتے ہیں اور چونکہ ھ = تَ + ک اِس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ ھ کل توانائی ہے جو مجددوں $ط_1$، $ط_2$، ... $ط_ن$ اور معیاروں $ع_1$، $ع_2$، ... $ع_ن$ کے ایک تفاعل کے طور پر بیان کی گئی ہے یہ آئینی شکل وہ سادہ ترین اور کامل ترین شکل ہے جس میں تعمیم شدہ حرکیاتی مساواتیں بیان کی جاسکتی ہیں۔ اسی سبب سے مساواتوں کی یہ آئینی شکل حرکیات اعلیٰ، ریاضیاتی طبیعات، اور ریاضیاتی ہیئت کی بہت سی تحقیقاتوں میں ابتداءً استعمال کیجاتی ہے۔

۲۸۹ — ہم اِس کتاب کو تعمیم شدہ مجددوں کے استعمال کی دو مثالیں دے کر ختم کریں گے، یہ مثالیں ریاضیاتی طبیعات کی دو شاخوں سے لیگئی ہیں۔

مثال ماحرکیات سے — فرض کرو کہ کسی شکل کا ایک ٹھوس جسم ایک ندی میں ہے جو یکساں رفتار و سے بہہ رہی ہے۔ اگر جسم پانی کی سطح کے نیچے کافی گہرائی پر ہو تو اس کی موجودگی سے سطح پر کے بہاؤ میں کوئی خلل نہیں ہوگا اور صرف جسم کے قرب میں پانی کے بہاؤ میں خلل پڑے گا۔ ابتدائی ماحرکیاتی اصولوں سے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ صرف ایک طریقہ ہے جس میں پانی جسم پر سے گذر کر بہہ سکتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ پانی کے بہاؤ کی توانائی بالحرکت مساوات

$$ت = تب + ع\, و^2$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ت وہ قیمت ہے جو توانائی بالحرکت کی ہو گی اگر جسم کو (۳۵۸)
پانی سے نکال لیا جائے ۔ فرض کرو کہ جسم پر پانی کے دباؤ کے علاوہ بیرونی
قوتیں عمل کرتی ہیں ۔ فرض کرو کہ کسی محور کے گرد اِن قوتوں کے معیاروں کا مجموعہ
طا ہے اور فرض کرو کہ طہ ایک محدد ہے جس سے اُس زاویہ کی پیمائش ہوتی
ہے جس میں سے جسم اِس محور کے گرد گھومتا ہے ۔ تب محدد طہ کے جواب میں
لگرانج کی مساوات ہے

$$\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ}\right) - \frac{جف\ ت}{جف\ طہ} = طا$$

اگر بیرونی قوتیں جسم کو پانی میں ساکن رکھنے کے لیے عین کافی
ہوں تو $\frac{فر}{فرت}\left(\frac{جف\ ت}{جف\ طہ}\right) = ۰$ اور اِس لیے

$$طا = -\frac{جف\ ت}{جف\ طہ} = -\frac{جف\ عہ}{جف\ طہ}\ و^۲$$

پس پانی کے دباؤ کے معیاروں کا مجموعہ ۔ طا ہونا چاہیئے یا

$$\frac{جف\ عہ}{جف\ طہ}\ و^۲$$

ہم عہ کو جسم کی شکل سے محسوب کر سکتے ہیں اور اِس طرح جسم پر عمل کرنے والے
جفتوں کا علم حاصل ہو سکتا ہے ۔

مثال برق مقناطیسیت سے ۔ وہ توانائی جو طاقتوں طً، طَ
کی برق کی دو یکساں روؤں کے بہاؤ کو دو معلومہ بند دَوروں میں جاری کرنیکے لیے
مطلوب ہوتی ہے شکل

$$ع = \frac{1}{2}\ ل\ طً^۲ + م\ طً\ طَ + \frac{1}{2}\ ن\ طَ^۲$$

میں معلوم ہے جہاں ل اور ن علی الترتیب پہلے اور دوسرے دَوروں کی شکل پر
منحصر ہیں اور م دونوں دَوروں کی شکل پر اور نیز ایک دوسرے کے لحاظ سے
اِن کے محلوں پر منحصر ہے ۔

فرض کرو کہ دوسرا دَور پہلے دَور کی جانب کسی خط پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔
فرض کرو کہ لا ایک محدد ہے جو اس خط پر پیمائش کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اس سمت میں جس میں لا کی پیمائش ہوئی ہے وہ قوت جو دوسرے دَور کو ساکن رکھنے کے لیے مطلوب ہے لا ہے۔

فرض کرو کہ ل سے حسب معمول تفاعل ت ـ ک تعبیر ہوتا ہے اور فرض کرو کہ دوسرے دَور پر ایک بیرونی قوت عاملہ لا عمل کرتی ہے۔ اب محدد لا کے لیے لگرانج کی مساوات ہے:

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لاَ}}\right) - \frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = \text{لا}$$

اور چونکہ کوئی اسراع نہیں ہے اس لیے

$$\text{لا} = -\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}}$$

تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ

$$\text{لا} = -\text{طَ}\frac{\text{جف م}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اگر دو رَوؤں کی توانائی توانائی بالقوہ ہوتی تو حاصل ہونا چاہیے　(۳۵۹)

$$-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = +\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}، -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ک}}{\text{جف لا}}$$

یعنے قوت لا مشاہدہ کردہ قوت کے ٹھیک مخالف ہوتی۔
اس کے برخلاف اگر توانائی توانائی بالحرکت ہے تو

$$-\frac{\text{جف ل}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ت}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$$

اور اس لیے لا کی قیمت مشاہدہ کے مطابق ہے۔
پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ کسی برقی رو کی توانائی کُلّاً توانائی بالحرکت ہوتی ہے۔

عام مثالیں

ا۔ ایک انجن کی رگڑ ایسی ہے کہ ایک ایسی طاقت سے وہ ۲۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرنے لگتا ہے جبکہ کوئی بیرونی کام انجام نہیں دیتا۔ اس کے متحرک حصوں کا جمود ایسا ہے کہ جب انجن ۱۵۰ گردشیں فی ثانیہ کرتا ہے اور اس پر ایک ایسی طاقت عمل کرتی ہے تو اس کی چال میں ۱۰ گردشوں فی ثانیہ کا اسراع پیدا ہوتا ہے۔ اگر انجن کو اپنے حال پر چھوڑ دیا جائے جبکہ وہ اپنی پوری چال ۲۵۰ گردشوں فی ثانیہ سے حرکت کر رہا ہو تو معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پیشتر وہ کتنی گردشیں کریگا۔

۲۔ ایک مربع ایک وتر کے گرد زاوی رفتار سہ سے آزادانہ حرکت کر رہا ہے کہ اچانک ایک راس جو اس وتر میں نہیں ہے ثابت ہو جاتا ہے۔ اس ثابت نقطہ پر دھکہ کا دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ نئی زاوی رفتار $\frac{1}{4}$ سہ ہوگی۔

۳۔ چار مساوی ڈنڈے جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ا اور کمیت ک ہے ایک معین کی شکل میں آزادانہ جوڑے گئے ہیں۔ یہ نظام سکون سے انتصابی وتر کے ساتھ گرتا ہے اور ایک ثابت افقی بے لچک مستوی سے ٹکراتا ہے۔ دھکہ اور اس کے بعد والی حرکت معلوم کرو۔

۴۔ دو ذرے جو ایک استوار ڈنڈے کے ذریعہ مربوط ہیں ایک چکنے انتصابی دائرہ پر حرکت کرتے ہیں۔ چھوٹے اہتزاز کا وقت معلوم کرو۔

۵۔ ایک یکساں ڈنڈے کا طول ل ہے، اس کے وسطی نقطہ سے فاصلہ ج پر کے دو نقطوں سے مساوی ڈوریاں باندھی گئی ہیں اور ان ڈوریوں کے دوسرے سرے دو ثابت نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ج ہے باندھے گئے ہیں، یہ ثابت نقطے ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں۔

صدر محدد اور ارتعاش کے متناظر دَور معلوم کرو۔

۶ — اگر پچھلی مثال کے ڈنڈے کے ایک سرے پر دھکہ د کی ایک افقی ضرب اِس کے طول کے علی القوائم پڑے تو دھکے کے بعد والی حرکت معلوم کرو ۔

۷ — نصف قطر ا کا ایک کھُردرا ایکساں اسطوانہ ہے اور اِس کی مرکزی تراش کے گرد ایک نا امتداد پذیر ڈوری لپٹی ہوئی ہے ۔ ڈوری کا ایک سرا ایک ثابت نقطہ ف سے بندھا ہے اور اسطوانے کو گھماتے ہوئے ڈوری کو اِس پر لپیٹا گیا ہے یہانتک کہ وہ نقطہ ف کو مس کرتا ہے اور ف پر اسطوانہ کا مماس انتصابی ہے ۔ تب اسطوانہ کو چھوڑ دیا گیا ہے حرکت معلوم کرو ۔

۸ — پچھلی مثال میں اگر ف پر کا مماس اسطوانہ کے محور پر عمود ہو لیکن ٹھیک انتصابی نہ ہو تو حرکت معلوم کرو ۔ (۳۶۰)

۹ — کروی قطبی محددوں میں ثابت کرو کہ اکائی کمیت کے ایک متحرک ذرہ کی توانائی بالحرکت

$$\text{ت} = \frac{1}{2}\left(\dot{\text{ر}}^2 + \text{ر}^2\dot{\text{ط}}^2 + \text{ر}^2\,\text{جب}^2\text{ط}\,\dot{\text{ل}}^2\right)$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔

پس ثابت کرو کہ ذرہ کے اسراع کے اجزائے ترکیبی ر، ط، ل کی بڑھتی ہوئی سمتوں میں حسب ذیل مقداروں کے ہیں :

$$\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{ر}}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ر}}،\quad \frac{1}{\text{ر}}\left[\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{ط}}}\right) - \frac{\text{جف ت}}{\text{جف ط}}\right]،$$

$$\frac{1}{\text{ر جب ط}}\,\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\frac{\text{جف ت}}{\text{جف}\,\dot{\text{ل}}}\right)$$

ثابت کرو کہ اِن اسراعوں کی اصلی قیمتیں حسب ذیل ہیں:

$$\frac{\text{ف}^2\text{ر}}{\text{فت}^2} - \text{ر}\dot{\text{ط}}^2 - \text{ر جب}^2\text{ط}\,\dot{\text{ل}}^2،\quad \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{ف}}{\text{فت}}\left(\text{ر}^2\dot{\text{ط}}\right) - \text{ر جب ط جم ط}\,\dot{\text{ل}}^2،$$

$\frac{1}{رجب\ طہ} \frac{فر}{فرت}$ (ر^۲ جب^۲ طہ لۂ)

۱۰ — یہ معلوم ہوا کہ ایک ذرہ کی رفتار اُس کے مدار میں اُس فاصلہ کے مُربع کے بالعکس بدلتی ہے جو اُس کو ایک ثابت نقطہ سے ہے۔ اِس کا مدار معلوم کرنے میں اقل ترین عمل کا اصول استعمال کرو اور اِس سے کشش کا قانون دریافت کرو۔

یہی نتیجے توانائی کے قانونِ بقاء سے اخذ کرو۔

۱۱ — فرض کرو کہ کائنات کی تمام قوتیں نابود کردی گئی ہیں اور یہ کہ ایک مخفی میکانیت ہے جو توانائی بالحرکت کی حامل ہوسکتی ہے۔ فرض کرو کہ اِس توانائی بالحرکت کی مقدار صرف کائنات کے مادی اجسام کے محلوں پر منحصر ہے اور اگر کائنات کی قوتیں نابود نہ ہوتیں تو مذکورہ بالا توانائی بالحرکت مقدار میں صرف ایک مستقل اور علامت کے اختلاف کے ساتھ نظام کی توانائی بالقوہ کے مساوی ہوتی۔

ثابت کرو کہ اِس قسم کی کائنات کے حرکیاتی مظاہر اُس کائنات کے حرکیاتی مظاہر کے مماثل ہوں گے جس میں دونوں قوتیں اور توانائی بالحرکت موجود ہوں جہاں مؤخر الذکر کائنات کی تبدیلیاں نیوٹن کے قوانین حرکت سے متعین کی گئی ہوں۔

۱۲ — متعدد بے کمیت کُرے جن کے نصف قطر اُ، بُ، جُ ... ہیں کثافت ثہ کے ایک لامتناہی سمندر میں ایک خط مستقیم میں حرکت کرتے ہیں، اِن کے مرکزوں کے درمیانی فاصلے $ر_{اب}$، $ر_{بج}$ ... ہیں اور اِن کی رفتاریں $و_ا$، $و_ب$، ... ہیں۔ جب اُ، بُ، جُ ... بمقابلہ $ر_{اب}$، $ر_{بج}$ ... کے چھوٹے ہوتے ہیں تو سمندر کی حرکت کی توانائی بالحرکت

$$ت = \frac{۲}{۳}\pi\, ثہ\, ا^{۳} و_{ا}^{۲} + \cdots + ۲\pi\, ثہ \frac{ا^{۳} ب^{۳}}{ر_{اب}^{۳}}\, و_{ا}\, و_{ب} + \cdots$$

سے حاصل ہوتی ہے ۔

ثابت کرو کہ کسی مشاہد کو جو سمندر کی موجودگی سے بے خبر ہو کرے اِسں طرح حرکت کرتے نظر آئیں گے گویا کہ اِن کمیتیں $\frac{۲}{۳}\pi$ ثہ $ا^{۳}$، $\frac{۲}{۳}\pi$ ثہ $ب^{۳}$، .... ہیں اور گویا کہ وہ قوتیں جو کرُوں کے ہر زوج کے درمیان عمل کرتی ہیں اِن کی اِن کمیتوں کے حاصل ضرب کے اور اِن کی رفتاروں کے حاصل ضرب کے متناسب ہیں اور نیز اِن کے درمیانی فاصلے کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہیں ۔

تمت

اشاریہ

نظری علم الحیل

نوٹ: اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

اصطلاحات

نظری علم الحیل

Acceleration	اسراع
Action	عمل
Amplitude	حیطہ
Automobile	آٹوموبیل
Bob	لنگر
Buoyancy	تیراؤ، اچھال
Capstan	لنگر خرچ
Canonical equations	آئینی مساواتیں
Catenary	زنجیرہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circuit	دور
Coefficient of friction	رگڑ کی قدر
Coefficients of Inertia	جمود کے سر
Compression	پچکاؤ
Conservation (of energy)	تحفظ (توانائی کا)
Conservative (system of forces)	تحفظی یا بقائی (قوتوں کا نظام)

Contact	تماس
Couple	جفت
Couplings	جوڑک
Crane	حمالہ
Crank	کرنیک، گردونہ
Cycloid	خط تدویر
Cycloidal pendulum	تدویری رقاص
Dip	میلان
Driving wheels	چلاؤ پہیئے
Equilibrium	توازن
Elasticity	لچک
Electromagnetism	برق مقناطیسیت
Ellipse	ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Envelope	لفاف
Experimental science	تجربی سائنس
Extensible	امتداد پذیر
Extensibility	توسیع پذیری
Extension	توسیع
External forces	بیرونی قوتیں
Flanges	کوریں
Flexibility	ملائمت
Forced oscillation	قسری اہتزاز
Fork	دوشاخہ
Frame of reference	حوالے کا فریم

Frequency	تعدد
Friction	رگڑ
Gearing	گیرائی
Galvanometer	برقی رو پیما
Generalized coordinates	تعمیمی محدد
Harmonic	موسیقی
Hold (of a ship)	پٹیا (جہاز کا)
Horse-power	اسپی طاقت
Hub	ناف
Hydrodynamics	ماحرکیات
Hyperbola	قطع زائد
Impact	تصادم
Impulse	دھکہ
Inclined plane	مائل مستوی
Indicator diagram	مظہار نقشہ
Inertia	جمود
Inextensible	ناامتداد پذیر
Internal forces	بیرونی قوتیں
Kinetic Energy	توانائی بالحرکت
Lamina	پترا
Law of inverse square	معکوس مربع کا قانون
Line of action	خط عمل
Line of quickest descent	سریع ترین اُتار کا خط
Lockgate	قفلی گیٹ
Locomotive	لوکوموٹف، حراکہ

Mechanics	علم الحیل
Modulus of Elasticity	لچک کی قدر
Moment	معیار
Momentum	معیار حرکت
Natural science	طبعی سائنس
Orbit	مدار
Oscillations	اہتزاز
Parabola	مکافی
Pedal	رکاب
Pendulum	رقاص
Period	دَور
Pitch	گھائی
Piston	فشارہ
Pivot	چول
Point of inflection	نقطہ انعطاف
Potential energy	توانائی بالقوہ
Poundal	پونڈل
Principal axes	صدر محاور
Projectile	مرمی
Range (of a projectile)	ٹپہ (مرمی کا)
Reaction	تعامل
Reflection	انعکاس
Resilience	بازگشتگی
Resolution (of forces)	تحلیل (قوتوں کی)
Rest	سکون

Restitution (impulse of)	عود (کا دھکہ)
Retardation	ابطاء
Rigidity	اُستواری
Roller	بیلن
Rolling friction	لڑھکتی رگڑ
Rotation	گردش
Sag	جھوک
Shell	خول
Simple harmonic motion	سادہ موسیقی حرکت
Skidding	گھسٹنا
Slack (couplings)	ڈھیلے (جوڑک)
Span	فصل
Spherical cap	کروی ٹوپی
Spokes	آرے
Strength	طاقت
Suspension bridge	جھولا پل
Tension	تناؤ
Theoretical Science	نظری سائنس
Thrust	دھکیل
Tractive force	جرّی قوت
Transformation	استحالہ
Translation (motion of)	(حرکت) انتقال
Transmissibility	انتقال پذیری
Uniformity of nature	فطرت کی ایکسانیت
Vectors	سمتی

Vibrations	ارتعاش
Windlass	ڈنڈا چرخ
Windmill	ہوائی چکی
Wheel and axle	چرخ اور محور
Work	کام